Les quatre potentiels logarithmiques d'une circonférence

Jusqu'ici on ne sait pas si tous les produits st^* que l'on obtient avec tous les nombres des classes (s) et (s^*) épuisent les nombres de la classe (C). Si les s (et les t^*) sont des spineurs simples (ou leurs associés), au sens de Cartan, ce n'est pas le cas, car dans la représentation matricielle, un σ simple est une colonne, un τ^* une ligne, ce qui fait $2p$ paramètres alors qu'un C en a p^2, de sorte que si on se donne un nombre de Clifford C on ne peut en général trouver s et t^* tels que $st^* = \mathrm{C}$. Mais en prenant des combinaisons linéaires dans (s) et (s^*):

$$(s_1 + s_2 + \ldots)(t_1^* + t_2^* + \ldots) = s_1 t_1^* + \ldots$$

avec un nombre suffisant de termes, on peut déterminer successivement s_1, t_1, s_2, t_2, ... de manière à égaler le produit à C. Ce procédé est utilisable dans $\mathrm{E}_n^{(q)}$ quelconque. Les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° restent valables pour ces combinaisons linéaires.

R. Wavre. — *Les quatre potentiels logarithmiques d'une circonférence.*

Les potentiels des corps continus sont des intégrales définies dépendant de certains paramètres. Ces paramètres sont les coordonnées du point argument en lequel on calcule le potentiel. Il est alors naturel de donner à ces paramètres l'ensemble de leurs valeurs possibles en y comprenant les valeurs complexes. D'ailleurs, lorsque l'on affirme qu'un potentiel est une fonction analytique en dehors des masses attirantes on entend qu'elle est développable en une série de Taylor des variables x_1, x_2, x_3, coordonnées du point argument; mais l'analyticité ne prend sa pleine signification que lorsque l'on donne à ces variables des valeurs complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1\ , \qquad z_2 = x_2 + iy_2\ , \qquad z_3 = x_3 + iy_3\ .$$

Le point-argument se déplacera donc dans l'espace des trois variables complexes z_1, z_2, z_3.

D'autre part, dans l'étude des potentiels nous nous sommes préoccupés de caractériser les singularités, lignes de ramification, etc. des potentiels prolongés au travers des masses attirantes. Cette étude nous la faisions dans l'espace réel, mais il est clair qu'elle ne prendra elle aussi toute son extension que dans le domaine complexe.

L'étude du cas de la circonférence montrera l'existence de deux potentiels complexes qui coïncident dans le réel avec les potentiels connus et de deux autres potentiels qui ne peuvent être engendrés que dans le domaine complexe et dont les prolongements dans l'espace réel sont complexes.

Soient

$$c_h = a_h + ib_h \,, \qquad h = 1,\, 2,\, 3$$

les coordonnées du point attirant et r la distance définie à la manière ordinaire des points z et c. Les potentiels newtoniens complexes ont la forme générale

$$\mathrm{U} = \int_{\mathrm{D}} \frac{\rho\, d\mathrm{D}}{r} \,, \qquad r^2 = (z_1 - c_1)^2 + (z_2 - c_2)^2 + (z_3 - c_3)^2 \;;$$

D est un domaine auquel l'intégrale s'étend et ρ est une fonction des coordonnées du point attirant. Les potentiels newtoniens complexes offrent quelques difficultés auxquelles s'attaque actuellement M. Beer. Le potentiel logarithmique est plus simple à manier car un artifice permet dans certains cas de ramener le problème à l'étude de certains résidus d'intégrales qui portent sur un plan complexe auxiliaire. L'artifice consiste à écrire

$$r^2 = u \cdot u' \qquad 2\,\mathrm{L}r = \mathrm{L}u + \mathrm{L}u'$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{Z} - \mathrm{C} \,, & \mathrm{Z} &= z_1 + iz_2 \,, & \mathrm{C} &= c_1 + ic_2 \\ u' &= \mathrm{Z}' - \mathrm{C}' \,, & \mathrm{Z}' &= z_1 - iz_2 \,, & \mathrm{C}' &= c_1 - ic_2 \,. \end{aligned}$$

Si l est la ligne attirante le potentiel logarithmique s'écrira

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2} \int_l \left[\mathrm{L}(\mathrm{Z} - \mathrm{C}) + \mathrm{L}(\mathrm{Z}' - \mathrm{C}')\right] f(s)\, ds \;;$$

s est un paramètre de représentation de l et l'on a $a_1(s) \dots b_2(s)$ d'où $C(s)$ et $C'(s)$. Pour une circonférence réelle homogène de densité un et de rayon R on trouve alors

$$U = \frac{1}{2i}\int_{\lambda}\left[L(Z - C) + L(Z' - C)\right]\frac{dC}{C} \cdot$$

Dans cette expression λ est un contour de même forme que la circonférence mais il est décrit dans le plan complexe auxiliaire. Il y a alors quatre possibilités suivant que les points Z et Z′ sont ou non intérieurs à cette circonférence. On trouve, en négligeant une constante arbitraire purement imaginaire et en désignant par m la masse totale:

$$U_1 = \frac{1}{2}m(LZ + LZ') = mL\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}m(LR + LZ') = \frac{1}{2}m\left[LR + L(z_1 - iz_2)\right]$$

$$U_3 = \frac{1}{2}m(LR + LZ) = \frac{1}{2}m\left[LR + L(z_1 + iz_2)\right]$$

$$U_4 = mLR .$$

U_1 convient au cas où Z et Z′ sont tous deux hors de λ.
U_2 convient au cas où Z est intérieur à λ et Z′ est extérieur.
U_3 convient au cas où Z′ est intérieur à λ et Z est extérieur.
U_4 convient au cas où Z et Z′ sont tous les deux intérieurs.

U_1 et U_4 redonnent dans le réel les potentiels connus. Les deux autres U_2 et U_3 ne sont engendrés que dans le domaine complexe et dans le domaine réel leurs prolongements sont complexes.

Le potentiel logarithmique de double couche d'une circonférence réelle de densité un donnera les valeurs 0 dans le premier cas, π dans le second, π dans le troisième, 2π dans le quatrième. Cette valeur π est celle du potentiel de double couche dans deux espaces à quatre dimensions qui ont pour trace la circonférence elle-même dans le plan ordinaire.