Étude sur quelques formules relatives au rayonnement et leurs applications astronomiques

Autor(en): **Rossier, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **19 (1937)**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741810

ÉTUDE SUR
QUELQUES FORMULES RELATIVES AU RAYONNEMENT
ET
LEURS APPLICATIONS ASTRONOMIQUES

PAR

P. ROSSIER

RÉSUMÉ.

Les déterminations de magnitudes bolométriques reposent, dans l'état actuel de la technique des mesures, sur le calcul de la différence « magnitude apparente — magnitude bolométrique = index absolu ». Ce calcul peut être effectué en supposant connue la courbe de sensibilité de l'œil. On obtient une valeur approximative en supposant cette sensibilité concentrée sur une longueur d'onde unique. C'est là l'hypothèse fondamentale de M. Russel. Au contraire, M. Armellini suppose constante la longueur d'onde effective. Ces deux hypothèses sont identiques dans le fond et constituent un cas particulier d'une théorie plus générale élaborée par l'auteur.

On peut enfin supposer valable dans un domaine de température d'autant moins étendu qu'elles sont plus précises, diverses formules empiriques donnant la brillance visuelle du corps noir en fonction de la température. Ces formules permettent la détermination de la température d'étoiles de diamètre apparent connu, le calcul d'indices absolus visuels et parfois de la température du Soleil.

Malgré les caractères très dissemblables de ces formules, la cohérence des résultats est satisfaisante, la théorie générale citée ci-dessus est ainsi confirmée.

I. Introduction.

1. — Les recherches sur le rayonnement des corps lumineux et leurs applications à la science ou à la technique de l'éclairage peuvent être orientées de deux façons très distinctes. Le premier problème qui se pose est de déterminer la puissance rayonnée par le corps incandescent étudié. Dans le cas du corps noir, la loi de Stéfan donne la solution du problème. On peut ensuite se proposer d'analyser ce rayonnement et de déterminer sa répartition dans le spectre en fonction de la longueur d'onde. Ici, dans le cas du radiateur intégral, l'équation spectrale de Planck donne satisfaction. Ces deux lois reposent sur une base théorique très sûre fournie par la physique mathématique.

Mais, dans les applications, la plupart des récepteurs sont sélectifs; l'étude de la sensibilité est le point de départ indispensable à toute recherche, à moins qu'on ne réussisse à l'éliminer par un artifice de raisonnement approprié. Il a été possible, dans quelques cas, de procéder à cette élimination.

On a pu aussi indiquer des formules empiriques, donnant la brillance visuelle d'un corps incandescent; ces formules ont été vérifiées dans un domaine de température assez limité; elles ne reposent sur aucune base théorique, puisque une théorie physique de l'œil est impossible par principe.

Dans toutes les applications à l'astronomie, on est conduit à extrapoler sur la température. Si cette extrapolation a une signification précise lorsqu'il s'agit de lois ayant une base théorique solide, elle est très hasardeuse dans le cas des formules empiriques. Mais si plusieurs formules d'origines différentes donnent des résultats cohérents, dont quelques-uns peut-être vérifiables par d'autres méthodes, les conséquences de ces extrapolations peuvent avoir un sens assez net.

Nous nous proposons de montrer, dans un cas particulier, comment, dans une recherche relative à l'index absolu visuel,

M. Armellini a réussi à éliminer la sensibilité de l'œil. Nous appliquerons ensuite quelques formules empiriques au domaine astronomique et nous confronterons tous ces résultats avec nos propres recherches, basées sur l'étude préalable de la sensibilité spectrale des récepteurs et de l'œil en particulier.

2. — Afin d'éviter des répétitions, indiquons ici quelques définitions et rappelons quelques formules.

Appelons μ la magnitude de l'unité de surface d'une étoile. μ est une fonction de la température sur laquelle nous ferons successivement diverses hypothèses.

La magnitude absolue M d'une étoile de rayon r est

$$M = A - 5 \log r + \mu \,. \tag{1}$$

A est une constante dépendant des unités choisies.

La magnitude absolue est liée à la magnitude apparente m et la parallaxe π par la formule

$$M = 5 + m + 5 \log \pi \,.$$

Eliminons M. On obtient la relation

$$\log \pi = 0{,}2\,A - 1 - 0{,}2\,m - \log r - 0{,}2\,\mu \,. \tag{2}$$

Cette équation contient le produit

$$\pi r = \rho \delta \,,$$

où δ est le demi-diamètre apparent de l'étoile et ρ le demi-grand axe de l'orbite terrestre. Remplaçons dans la formule 2. Il vient

$$\log \delta = 0{,}2\,A - 1 - \log \rho - 0{,}2\,m - 0{,}2\,\mu \,. \tag{3}$$

Dans la suite, nous prendrons le rayon du Soleil comme unité. Nous admettrons sa magnitude absolue visuelle égale à 4,83 et sa température effective à 6200°.

La constante A est ainsi déterminée et $\log \rho = 2{,}33244$.

Il serait facile de citer de nombreuses possibilités de vérification des formules précédentes. L'étude de variables à éclipses, celle des étoiles nouvelles, des céphéides, les considérations modernes sur la constitution des étoiles, les mesures interférométriques fournissent de nombreuses valeurs numériques permettant ces contrôles.

Les deux formules donnant la magnitude absolue et la parallaxe font intervenir la magnitude apparente, la température et le rayon. Au contraire, dans celle relative au diamètre apparent, n'apparaît qu'une seule grandeur qui n'est pas un résultat d'observation, la température. Nous nous contenterons donc de la vérification la plus sûre, consistant en l'application, aux étoiles observées à l'interféromètre du Mont-Wilson, de la formule relative au diamètre apparent. L'inconvénient est de limiter la vérification à des géantes froides. Nous aurons d'ailleurs d'autres vérifications plus étendues, fournies par la théorie de l'index absolu visuel.

Le calcul de la température d'étoiles de diamètre apparent connu conduit à la résolution de l'équation

$$\varphi(\mathrm{T}) \equiv 0{,}2\,\mathrm{A} - 3{,}33244 - 0{,}2\,\mu = \log\delta + 0{,}2\,m\ .$$

La fonction φ (T) dépend évidemment de l'hypothèse faite sur μ.

Indiquons ici une fois pour toutes les données que nous admettrons pour cette vérification.

Etoile	Type spectral	m	δ	$\log\delta$	φ(T)
α Bouvier . .	K0	0,24	0″,012	$\bar{2}$,079	— 1,873
ε Pégase . . .	K0	2,54	0″,0042	$\bar{3}$,624	— 1,868
γ Aigle	K2	2,80	0″,0042	$\bar{3}$,624	— 1,816
α Taureau . .	K5	1,06	0″,010	$\bar{2}$,000	— 1,788
α Orion . . .	Ma	0,92	0″,0235	$\bar{2}$,371	— 1,445
α Scorpion . .	Ma	1,22	0,020	$\bar{2}$,301	— 1,455
β Pégase . . .	Ma	2,61	0″,0105	$\bar{2}$,021	— 1,457
α Hercule . .	Mb	3,48	0″,015	$\bar{2}$,176	— 1,128
o Baleine . . .	Md	2,0	0″,028	$\bar{2}$,447	— 1,153

Les valeurs relatives à *o* Baleine sont très incertaines, eu égard à sa variabilité.

3. — Nous appelons « index absolu » visuel la différence « magnitude visuelle — magnitude bolométrique » [1]. Dans deux mémoires antérieurs, nous avons donné une théorie de l'index absolu et de plusieurs problèmes d'astrophysique [2]. L'hypothèse essentielle de cette théorie est de poser, pour la sensibilité σ de l'œil

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_v}{\lambda}}\right)^a .$$

Il nous a été possible de préciser le rôle des deux constantes λ_v, longueur d'onde du maximum de sensibilité et a, acuité de ce maximum. Nous avons calculé des tables d'indices absolus auxquelles nous comparerons les résultats fournis par les diverses hypothèses que nous ferons sur la fonction μ.

On démontre facilement les propriétés suivantes [3]. L'index absolu visuel est minimum pour une étoile dont la température est les $^5/_4$ de celle d'un radiateur intégral dont le maximum d'émission a lieu pour la même longueur d'onde que le maximum de sensibilité de l'œil. Cette température est indépendante de l'acuité du maximum de sensibilité. Elle est donnée par la formule

$$T_m = \frac{b}{4\lambda_v} ,$$

où $b = 1{,}432$ cm $\times$ degré.

[1] Cette même quantité est appelée « index de chaleur » par M. Mineur (*Photographie astronomique*, Paris, 1934), en accord avec quelques auteurs américains (Pettit et Nicholson, Stellar radiation measurements. *Astrophysical Journal*, 68, 1928). Le terme d'index absolu a été utilisé par M. Brill dès 1922 (Spektrophotometrische Untersuchungen, *Astronomische Nachrichten*, 217, 218).

[2] P. Rossier, Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante. *Archives* (5), 16, 17; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 27-29, 1935.

Sensibilité des récepteurs d'énergie rayonnante II, *Archives* (5), 18; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 32-33, 1936.

Nous citerons ces deux mémoires par les rappels I ou II.

Voir aussi G. Tiercy, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, ch. XV, Paris, 1935.

[3] I, § 19, 41, 46, 47, 48.

La variation de l'index absolu en fonction de la température présente une inflexion pour une température un peu supérieure au double de la température correspondant au minimum. Le rapport de la température de l'inflexion à celle du minimum est

$$1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}} \cdot$$

L'index absolu visuel du Soleil est minimum.

La même hypothèse permet d'établir une théorie satisfaisante de la longueur d'onde effective [1]. Dans le cas du spectre normal, elle est donnée par la formule

$$\lambda_a = \frac{1}{a+5}\left(a\lambda_v + \frac{b}{T}\right) \cdot$$

On peut parfois, dans certaines applications, admettre l'infinité de l'acuité a, ce qui simplifie certaines formules. Cela est impossible dans la théorie de la longueur d'onde effective sans être conduit à la conclusion inadmissible que la longueur d'onde effective est indépendante de la température.

Pour l'index absolu, l'hypothèse de l'infinité de l'acuité est admissible, si on se borne à ne considérer que des températures suffisamment voisines de celle du minimum de l'index.

Nous avons appelé longueur d'onde colorimétrique la longueur d'onde correspondant au centre de gravité de l'aire limitée par l'axe des longueurs d'onde et la courbe de répartition de l'énergie dans le spectre. Nos hypothèses permettent de poser [2]

$$\lambda_c = \frac{a+5}{a+3}\lambda_a \cdot$$

Indiquons enfin que la magnitude absolue est donnée par la formule [3]

$$M = A - 5\log r + 1{,}086\,(a+4)\ \mathrm{Log}\left(1 + \frac{b}{a\lambda_v T}\right) \cdot$$

[1] I, § 28, 34, 43, 44.

[2] I, § 29.

[3] I, § 11. Log et log signifient respectivement logarithme naturel et logarithme décimal.

II. Théorie de l'index absolu de M. Armellini.

4. — M. Armellini propose, pour l'index absolu, une expression de la forme [1]

$$I = 10 \log T + \frac{b}{\lambda' T} + A \ . \qquad (1)$$

La constante λ' est une certaine longueur, liée à la longueur d'onde effective et de l'ordre de grandeur de celle-ci.

Le raisonnement de M. Armellini est ingénieux. Indiquons-en l'essentiel, en utilisant nos notations et nos définitions, qui diffèrent quelque peu de celles de l'auteur.

Rappelons que l'on a, pour l'index absolu I, relatif au récepteur r

$$I = m_r - m_b \ ,$$

où m_r et m_b sont les magnitudes relatives au récepteur r et à un appareil bolométrique.

Nous allons établir une équation donnant la dérivée $\frac{dI}{dt}$, puis, par une intégration, nous trouverons la formule 1. Pour cela, dérivons l'équation de définition et examinons successivement les deux termes du second membre.

$$\frac{dI}{dT} = \frac{dm_r}{dT} - \frac{dm_b}{dT} \ .$$

5. — Considérons d'abord le terme relatif à la magnitude bolométrique. La loi de Pogson peut s'écrire

$$m_b = A - 1{,}086 \operatorname{Log} E_b \ ,$$

où E_b est la puissance rayonnée.

Supposons que la répartition de l'énergie dans le spectre de l'étoile est donnée par la loi de Wien; la puissance rayonnée est

$$E_b = C \int_0^{\infty} \lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}} d\lambda \ .$$

[1] Armellini, *Trattato di astronomia siderale*, I, p. 175.

Pour faciliter l'intégration, introduisons le nombre d'ondes $x = \lambda^{-1}$; il vient

$$d\lambda = -\frac{dx}{x^2} \qquad \text{et} \qquad E_b = C\int_0^\infty x^3 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

Dérivons par rapport à la température T; on peut le faire sous le signe d'intégration, puisque les limites d'intégration sont indépendantes de la température. On a donc

$$\frac{dE_b}{dT} = C\frac{b}{T^2}\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

Intégrons par parties, en posant

$$x^4 = u \; ; \qquad e^{-\frac{bx}{T}} dx = dv \qquad \text{et} \qquad v = -\frac{T}{b} e^{-\frac{bx}{T}} \; .$$

Il vient

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{bx}{T}} dx = \left[-x^4 \frac{T}{b} e^{-\frac{bx}{T}} \right]_0^\infty + \frac{4T}{b}\int_0^\infty x^3 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

L'expression entre crochets est nulle aux limites. On a donc

$$\frac{dE_b}{dT} = \frac{4C}{T}\int_0^\infty x^3 e^{-\frac{bx}{T}} dx \qquad \text{et} \qquad -\frac{dm_b}{dT} = \frac{1{,}086}{E_b}\frac{dE_b}{dT} = \frac{1{,}086 \cdot 4}{T} \; .$$

6. — Examinons maintenant le terme relatif à la magnitude visuelle. On a comme ci-dessus

$$m_v = A - 1{,}086 \operatorname{Log} E_v \qquad \text{et} \qquad \frac{dm_v}{dT} = -\frac{1{,}086}{E_v} \cdot \frac{dE_v}{dT} \; .$$

Appelons $\sigma(x)$ la sensibilité de l'œil en fonction du nombre d'ondes x. L'éclat E_v est

$$E_v = C\int_0^\infty \sigma(x)\, x^3 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

Comme pour la magnitude bolométrique, dérivons par rapport à T. $\sigma(x)$ est indépendant de T. On a donc

$$\frac{dE_v}{dT} = \frac{b}{T^2} \cdot C \int_0^\infty \sigma(x) x^4 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

Appelons X le nombre d'ondes colorimétrique, c'est-à-dire le nombre d'ondes correspondant au centre de gravité de l'aire limitée par l'axe des x et la courbe de répartition de l'énergie apparente dans le spectre, en fonction du nombre d'ondes x. On a

$$X \cdot E_v = C \int_0^\infty \sigma(x) x^4 e^{-\frac{bx}{T}} dx \; .$$

Remplaçons l'intégrale par son expression en fonction de la dérivée de E_v; il vient

$$\frac{1}{E_v} \frac{dE_v}{dT} = \frac{bX}{T^2} \; .$$

X est évidemment fonction de la température de l'étoile considérée et de la courbe de sensibilité du récepteur. L'expérience montre que X varie relativement peu, car l'œil est très sélectif. Admettons sa constance.

7. — La dérivée de l'index est

$$\frac{dI}{dT} = 1{,}086 \left(\frac{4}{T} - \frac{b}{T^2} \cdot X \right) \cdot$$

L'hypothèse de l'indépendance de X de la température T permet l'intégration immédiate. Il vient

$$I = 1{,}086 \left(4 \operatorname{Log} T + \frac{b}{\lambda' T} \right) + B \; ,$$

où $X\lambda' = 1$. Pour les calculs numériques, les logarithmes décimaux sont plus commodes. On a alors

$$I = 10 \log T + \frac{1{,}560}{\lambda' T} + B' \; .$$

8. — Le problème est maintenant de déterminer X. Dans le cas de l'œil, M. Armellini pose $X\lambda_v = 1$, où λ_v est la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil.

Reprenons la chose d'un peu plus haut. Appelons $E(\lambda) = E(x)$ la fonction donnant la répartition de l'énergie apparente dans le spectre de l'étoile en fonction de la longueur d'onde λ ou du nombre d'ondes x. Pour abréger l'écriture, posons

$$J(x, n) = \int_0^\infty x^n E(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad J_1(\lambda, n) = \int_0^\infty \lambda^{-n} E(\lambda)\, d\lambda .$$

Le changement de variables $x\lambda = 1$ donne

$$J_1(\lambda, n) = J(x, n-2) .$$

Pour le nombre d'ondes colorimétrique X, on a

$$XJ(x, 0) = J(x, 1) ,$$

et pour la longueur d'onde colorimétrique λ_c,

$$\lambda_c J_1(\lambda, 0) = J_1(\lambda, 1) ,$$

ou, en opérant le changement de variables $x\lambda = 1$,

$$\lambda_c \cdot J(x, -2) = J(x, -1) .$$

λ_c et X ne sont donc généralement pas inverses l'un de l'autre. Il faudrait pour cela que la répartition de l'énergie apparente dans le spectre fût représentée par une fonction E telle que

$$J(x, 0) \times J(x, -2) = J(x, 1) \times J(x, -1) . \qquad (1)$$

Les équations spectrales de Wien et de Planck ne satisfont pas à cette équation. Examinons d'abord la fonction de Wien. Il vient

$$J(x, n) = \int_0^\infty x^{n+3} e^{-\frac{bx}{T}} dx = J'(x, n+3) ,$$

$$J_1(\lambda, n) = \int_0^\infty \lambda^{-5-n} e^{-\frac{b}{\lambda T}} d\lambda = J'_1(\lambda, n+5) .$$

Le même raisonnement que ci-dessus donne

$$\lambda_c X \big(J'(x, 3)\big)^2 = J'(x, 4)\, J'(x, 2) .$$

Or [1]

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}\, dx = \frac{\alpha\,!}{\beta^{\alpha+1}} .$$

L'équation 1 devient

$$\lambda_c X (3\,!)^2 = 4\,! \cdot 2\,! \qquad \text{ou} \qquad \lambda_c X = \frac{4}{3} .$$

L'équation spectrale de Wien ne satisfait donc pas à la relation 1. Celle de Planck peut être considérée comme la somme d'une série dont le premier terme est la loi de Wien. Elle ne satisfait donc pas à la relation 1.

Le nombre d'ondes colorimétrique X n'est donc généralement pas l'inverse de la longueur d'onde colorimétrique.

Calculons ces deux grandeurs, dans le cas bolométrique. Il vient, en appliquant les formules précédentes

$$\lambda_c = \frac{b}{3\,T} = \frac{5}{3}\lambda_m , \qquad X = \frac{4}{5}\lambda_m^{-1} ,$$

La longueur d'onde colorimétrique obéit à une loi analogue à celle du déplacement de Wien. Elle est inversement proportionnelle au nombre d'ondes colorimétrique, mais ces deux quantités ne sont pas inverses.

Exprimons l'équation spectrale de Wien en nombre d'ondes. La densité d'énergie dans le spectre est $x^3 e^{-\frac{bx}{T}}$. Le maximum a lieu pour

$$x_m = \frac{3\,T}{b} = \lambda_c^{-1} .$$

Dans un spectre dispersé proportionnellement au nombre d'ondes, le maximum d'énergie a lieu pour le nombre d'ondes inverse de la longueur d'onde colorimétrique.

[1] Voir, par exemple, I, § 10.

9. — Supposons valable l'hypothèse rappelée plus haut [1], consistant à poser, pour la sensibilité de l'œil

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_v}{\lambda}}\right)^a = (\lambda_v x e^{1-\lambda_v x})^a .$$

Si l'équation spectrale de Wien est applicable, la longueur d'onde colorimétrique est X, où

$$X \cdot \int_0^\infty \left(\lambda_v x e^{1-\lambda_v x}\right)^a x^3 e^{-\frac{bx}{T}} dx = \int_0^\infty \left(\lambda_v x e^{1-\lambda_v x}\right)^a x^4 e^{-\frac{bx}{T}} dx .$$

Les intégrales indiquées précédemment [2] peuvent être calculées et on trouve pour le nombre d'ondes colorimétrique

$$X = \frac{a+4}{a\lambda_v + \frac{b}{T}} = \frac{1 + \frac{4}{a}}{\lambda_v + \frac{b}{aT}} .$$

On a donc

$$X\lambda_c = \frac{a+4}{a+3} = 1 + \frac{1}{a+3} \qquad \text{et} \qquad X\lambda_a = \frac{a+4}{a+5} .$$

La constance de X entraîne celle des longueurs d'onde effective et colorimétrique. Cela ne peut avoir lieu que pour une acuité infinie. Dans ce cas, la longueur d'onde et le nombre d'onde colorimétriques sont inverses l'un de l'autre. Ce sont là les hypothèses implicitement faites par M. Armellini.

Pratiquement, les acuités sont de l'ordre de 50 dans les applications astronomiques. On a alors $X \times \lambda_c = 1{,}02$. On ne peut plus alors admettre la constance de la longueur d'onde effective.

10. — Reprenons maintenant le raisonnement de M. Armellini. Remarquons que la première partie de la démonstration [3] peut

[1] § 3.
[2] Voir § 8 ou I § 10.
[3] Voir plus haut, § 5.

être effectuée beaucoup plus simplement en se basant sur la loi de Stéfan. On a

$$E_b = \alpha T^4 , \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{E_b}\frac{dE_b}{dT} = \frac{4}{T} \cdot$$

Cette dernière formule suppose seulement la validité de la loi de Stéfan, mais aucunement celle de l'équation spectrale de Wien.

D'autre part, le deuxième terme de M. Armellini [1] peut être obtenu par un procédé tout différent, dû, semble-t-il, à M. Russel [2].

Supposons le récepteur sensible à l'unique longueur d'onde λ_v. Admettant la validité de la loi de Wien, la magnitude d'une étoile de température T est

$$m_v = A - 1{,}086 \operatorname{Log}\left(\lambda_v^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda_v T}}\right) = A + 12{,}5 \log \lambda_v + \frac{1{,}560}{\lambda_v T} \cdot$$

L'hypothèse de la sensibilité concentrée sur une longueur d'onde unique conduit donc à une expression de même forme que celle de M. Armellini.

M. Tiercy a montré que le raisonnement de M. Russel donne nécessairement une formule plus compliquée, si l'on remplace l'équation spectrale de Wien par celle de Planck, mais que les termes correctifs ont peu d'importance [3].

Nous avons montré l'équivalence de l'hypothèse de M. Armellini, constance du nombre d'ondes colorimétrique, et de celle de la sensibilité concentrée sur une longueur d'onde unique de M. Russel. On peut faire à celle-ci le reproche de confondre une magnitude qui s'étend nécessairement à un domaine fini de longueurs d'onde avec l'expression, dans une

[1] Celui discuté au § 6.

[2] Russel, Dugan, Stewart, *Astronomy*, II, p. 733.
G. Tiercy, Une formule fondamentale de l'astrophysique. Le calcul de l'index de couleur. *Archives* (5), 10; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 6, 1928.

[3] G. Tiercy, Le calcul de l'index de couleur, *loc. cit.*
L'équilibre radiatif dans les étoiles, ch. XIII, p. 294, Paris, 1935.

échelle logarithmique, d'une densité de puissance dans un spectre. L'avantage de l'artifice de M. Armellini est d'éliminer cette difficulté. Il suffit de considérer comme un fait d'expérience la presque invariabilité de X avec la température.

Remarquons enfin que l'application aux céphéides de la théorie de l'index de couleur, basée sur l'hypothèse de la sensibilité concentrée, conduit à des difficultés qu'a signalées M. Tiercy [1]. Il en est donc certainement de même pour celle de M. Armellini.

11. — On peut obtenir une formule analogue à celle de M. Armellini, mais en évitant l'hypothèse de la sensibilité concentrée. Nous avons rappelé [2] qu'on peut exprimer l'index absolu par la formule

$$I = 1{,}086\left(4 \operatorname{Log} T + [a + 4] \operatorname{Log}\left[1 + \frac{b}{a\lambda_v T}\right]\right) + A .$$

Remplaçant le logarithme du binôme par le premier terme de son développement, il vient

$$I = 1{,}086\left(4 \operatorname{Log} T + \frac{a+4}{a\lambda_v}\frac{b}{T}\right) + A ,$$

expression dont le terme algébrique est linéaire en T^{-1}, comme dans la formule de M. Armellini. Ce développement en série n'est justifié que si le produit aT est suffisamment grand, donc pour des acuités élevées et des étoiles chaudes.

Sauf dans le cas de l'acuité infinie, le facteur de bT^{-1} est supérieur au nombre d'onde colorimétrique, car

$$X = \frac{a+4}{a\lambda_v + \dfrac{b}{T}} .$$

[1] G. Tiercy, L'étoile variable S Sagittae. *Archives* (5), 10; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 5 (1928).
Le calcul de l'index de couleur, *loc. cit.*
L'équilibre radiatif dans les étoiles, *loc. cit.*
[2] § 3.

Cependant, l'erreur faite est compensée en partie dans la formule de M. Armellini, au moins qualitativement, par le fait que le premier terme négligé du développement tend à diminuer I dans la formule développée ci-dessus.

Les formules considérées ici sont linéaires en bT^{-1}. Elles ne peuvent donner des résultats satisfaisants que pour de faibles variations de température autour de celle du minimum de l'index absolu; cela sera par exemple le cas pour l'index absolu visuel et le Soleil, mais l'application en est hasardeuse si on l'étend à des observations visuelles d'étoiles très chaudes ou très froides ou à des observations photographiques d'étoiles solaires.

III. Formule de M. Hertzsprung.

12. — En 1906, M. Hertzsprung a proposé une formule donnant la puissance apparente rayonnée par un corps noir en fonction de la température [1]. Pour obtenir cette fonction, M. Hertzsprung détermine une courbe moyenne de la sensibilité de l'œil en fonction de la longueur d'onde; il utilise pour cela diverses valeurs connues à l'époque. Par une intégration graphique, il détermine la brillance du corps noir en fonction du quotient $\frac{b'}{T}$; b' est la constante figurant au numérateur de l'exposant de l'équation spectrale de Wien. M. Hertzsprung pose $b' = 14580$ microns $\times$ degrés.

Une remarque subtile a permis à M. Hertzsprung de trouver une forme de la fonction représentant la brillance B en fonction de $b'T^{-1}$. Il effectue l'intégration pour des valeurs de $\log b'T^{-1}$ variant en progression arithmétique: il calcule les différences du premier ordre et remarque que ces différences croissent pratiquement en progression géométrique. Voici d'ailleurs, en unités arbitraires, les chiffres indiqués par l'auteur.

[1] E. Hertzsprung, Ueber die optische Stärke der Strahlung des schwarzen Körpers. *Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie*, IV, 1906.

$\frac{b'}{T}$	log B	Différences	Rapport
20	2,641		
		7,088	
10	9,729		1,9049
		3,721	
5	13,450		1,9053
		1,953	
2,5	15,403		1,9052
		1,025	
1,25	16,428		

Admettant l'exactitude de ce fait, il est facile de trouver la fonction brillance B. Les différences du tableau sont proportionnelles aux valeurs de la dérivée du logarithme de B prise par rapport au logarithme de $b'T^{-1}$. Cette dérivée est une fonction exponentielle de Log $b'T^{-1}$:

$$\frac{d \operatorname{Log} B}{d \operatorname{Log} \frac{b'}{T}} = e^{\alpha+\beta \operatorname{Log} \frac{b'}{T}} .$$

Une intégration donne

$$\operatorname{Log} B = \frac{e^{\alpha}}{\beta}\left(\frac{b'}{T}\right)^{\beta} + C .$$

La constante β est

$$\beta = \frac{\log 1{,}9052}{\log 2} = 0{,}9297 \cong 0{,}93 .$$

Finalement, M. Hertzsprung admet la formule suivante que, pour abréger, nous appellerons formule H,

$$\log B = 17{,}56 - 0{,}92\left(\frac{b'}{T}\right)^{0{,}93} .$$

Compte tenu de la loi de Pogson, la magnitude visuelle μ de l'unité de surface d'un corps noir de température T est

$$\mu = A + 2{,}3\left(\frac{b'}{T}\right)^{-0{,}93} .$$

A est une constante d'étalonnage.

13. — Considérons un réseau d'isothermes de Planck. Chaque courbe entoure, sans les couper, toutes celles correspondant à des températures inférieures. Supposons constante la courbe de sensibilité de l'œil. Traçons un nouveau réseau d'isothermes représentant la puissance apparente visuelle en fonction de la longueur d'onde. Ce nouveau réseau se compose de courbes dont chacune entoure, sans en couper aucune, toutes celles correspondant à des températures inférieures. C'est dire que la brillance visuelle croît toujours avec la température. Cela reste vrai, tant qu'on reste éloigné des conditions d'éblouissement. Autrement dit, la quantité μ doit être une fonction décroissante de la température. C'est bien le cas avec la formule H; d'après elle, μ décroît d'autant plus lentement que la température est plus élevée.

14. — Appliquons maintenant cette formule aux problèmes esquissés dans notre introduction.

La magnitude absolue d'une étoile est

$$M = C - 5 \log r + 17140\, T^{-0,93} .$$

C est une constante d'étalonnage. Déterminons-la au moyen du Soleil. Il vient $C = -0,25$.

Calculons la parallaxe et le diamètre apparent

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,2\,C - 1 - \log r - 0,2\,m + 3428\, T^{-0,93} \\ &= -1,050 - \log r - 0,2\,m + 3428\, T^{-0,93} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \delta &= 0,2\,C - 3,332 - 0,2\,m + 3428\, T^{-0,93} \\ &= -3,382 - 0,2\,m + 3428\, T^{-0,93} . \end{aligned}$$

15. — La formule en $\log \delta$ donne

$$\varphi(T) \equiv 3428\, T^{-0,93} - 3,382 = \log \delta + 0,2\,m .$$

Une table de $\varphi(T)$ est commode pour la résolution de cette équation. Nous la limitons à la partie utile pour les géantes froides.

T	φ(T)	T	φ(T)	T	φ(T)
2000	— 0,464	3000	— 1,381	4000	— 1,850
2200	— 0,711	3200	— 1,497	4200	— 1,918
2400	— 0,919	3400	— 1,601	4400	— 1,980
2600	— 1,096	3600	— 1,693	4600	— 2,037
2800	— 1,248	3800	— 1,776	4800	— 2,089
3000	— 1,381	4000	— 1,850	5000	— 2,137

Les températures des étoiles que nous avons retenues sont les suivantes:

Etoile	Type spectral	Température	Etoile	Type spectral	Température
α Bouvier .	K0	4070	ε Pégase . .	K0	4050
γ Aigle . . .	K2	3910	α Taureau . .	K5	3830
α Orion . .	Ma	3110	α Scorpion .	Ma	3130
β Pégase . .	Ma	3130	α Hercule . .	Mb	2640
o Baleine . .	Md	2670			

Ces valeurs sont tout à fait normales. Cela montre la validité de la formule H pour les géantes froides. Comme, d'autre part, la formule a été étalonnée sur l'étoile naine qu'est le Soleil, elle doit être applicable à toutes les étoiles froides.

16. — Considérons l'index absolu visuel. Il est donné par la formule

$$I = M - M_{bol} = \mu + 10 \log T = D + 17140\,T^{-0,93} + 4,343 \,\mathrm{Log}\, T\,.$$

D est une constante que l'on choisit souvent de façon à annuler l'index absolu minimum.

Dérivons:

$$\frac{dI}{dT} = T^{-1}\,(4,343 - 15940 \cdot T^{-0,93})$$

$$\frac{d^2 I}{dT^2} = T^{-2}\,(1,93 \cdot 15940\,T^{-0,93} - 4,343)\ .$$

L'index passe par un minimum pour $T_m = 6810°$. Sa variation en fonction de la température est linéaire pour $T_i = 13810°$. Le rapport de ces deux températures est 2,028, donc légèrement supérieur à 2, comme l'indique la théorie générale [1].

Rapprochons ces deux températures de leur expression dans cette théorie:

$$T_m = \frac{b}{4\,\lambda_v}\,; \quad \frac{T_i}{T_m} = 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}}\,.$$

On en tire

$$\lambda_v = 5{,}26 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad a = 70{,}7\,.$$

M. Eddington a calculé une table d'indices basée sur la formule H. Nous l'avons discutée en détail ailleurs [2]. La confrontation de l'ensemble de la table avec notre théorie nous a fourni les valeurs suivantes

$$\lambda_v = 5{,}31 \times 10^{-5}\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad a = 50{,}1\,.$$

Ces valeurs sont probablement plus sûres que celles indiquées plus haut, qui ne sont données que par deux singularités dont l'une, l'inflexion, est de par sa nature, mal définie physiquement. L'ordre de grandeur est le même, car l'index absolu est peu sensible à la variation de l'acuité [3]; cela résulte d'ailleurs immédiatement de la possibilité d'obtenir une approximation raisonnable en posant $a = \infty$.

La valeur $5{,}26 \times 10^{-5}$ cm est un peu faible pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil. C'est cette valeur trop faible qui conduit à une température un peu trop élevée pour le Soleil, si l'on admet que l'index absolu de cet astre est nul. Il semble donc que la formule H doive subir une modification. La première qui se présente est de remplacer la valeur

[1] § 3.
[2] I, § 48.
[3] I, § 19, 21.

peu exacte de $b' = 1{,}458$ cm $\times$ degré par une autre plus moderne, 1,432 cm $\times$ degré. Il vient ainsi

$$I = D + 16856\,T^{-0{,}93} + 4{,}343\,\mathrm{Log}\,T\ ,$$
$$\frac{dI}{dT} = T^{-1}(4{,}343 - 15676\,T^{-0{,}93})$$
$$\frac{d^2I}{dT^2} = T^{-2}(1{,}93 \cdot 15676\,T^{-0{,}93} - 4{,}343)\ .$$

Le minimum et l'inflexion ont lieu respectivement pour $T_m = 6690°$ et $T_i = 13560°$. La première valeur est probablement encore un peu élevée. La deuxième est satisfaisante.

Concluons en remarquant l'accord frappant de la théorie basée sur la formule H et notre théorie générale. Ce contrôle réciproque renforce la valeur de l'une et de l'autre.

IV. — Formule de M. Fabry.

17. — Pour la brillance du corps noir, M. Fabry indique la formule empirique suivante [1]:

$$\log B = 7{,}1842 - 1{,}1444\left(\frac{10^4}{T}\right) + 0{,}00736\left(\frac{10^4}{T}\right)^2,$$

ou

$$\mathrm{Log}\,B = 16{,}5422 - 2{,}63508\,\frac{10^4}{T} + 0{,}01695\left(\frac{10^4}{T}\right)^2 .$$

Pour abréger, nous l'appellerons la formule F. L'unité choisie est la bougie $\times$ cm^{-2}.

Une telle formule résulte évidemment d'une représentation par un développement en série de valeurs expérimentales. Elle n'a aucune base théorique. Vérifiée dans un domaine de température nécessairement assez limité, elle pourra donner des résultats absurdes par une extrapolation trop poussée.

Elle n'est d'ailleurs applicable qu'à partir d'une température suffisamment élevée, puisqu'elle donnerait $B = +\infty$ pour $T = 0$.

[1] Ch. Fabry, *Cours de physique de l'Ecole polytechnique*, tome II, p. 591, Paris, 1933.

Pour abréger, posons

$$\operatorname{Log} B = \alpha - \beta\tau^{-1} + \gamma\tau^{-2}$$

avec $\beta = 2{,}63501$, $\gamma = 1695 \times 10^{-5}$, $\tau = T \times 10^{-4}$.

Dérivons:

$$\frac{dB}{dT} = B\tau^{-3}(\beta\tau - 2\gamma) .$$

Cette dérivée s'annule pour $T = 130°$. La formule F donne donc à B une valeur croissante dans tout le domaine de température qui nous intéresse. Mais B tend vers une valeur finie lorsque T croît indéfiniment. La question se pose de savoir jusqu'où la croissance de B est suffisamment rapide. Pour cela, calculons la deuxième dérivée

$$\frac{d^2B}{dT^2} = B\tau^{-6}\left\{-2\beta\tau^3 + (6\gamma - \beta^2)\tau^2 + 4\beta\gamma\tau - 4\gamma^2\right\} \cdot$$

Elle est nulle pour

$$5{,}27\,\tau^3 - 6{,}84\,\tau^2 + 0{,}1787\,\tau - 11{,}5 \cdot 10^{-4} = 0 .$$

τ est de l'ordre de l'unité, le dernier terme est négligeable, ce qui conduit à $T = 12700°$.

Au delà de 13000°, la croissance de B se ralentit, la formule doit perdre de sa valeur. Le domaine de validité, s'il n'est limité que par ces considérations, et nous verrons que cela semble être le cas, est remarquablement étendu.

18. — La formule F est exprimée en bougies $\times$ cm^{-2}. On admet pour la brillance du Soleil, observé hors de l'atmosphère terrestre, une valeur de l'ordre de 190000 bougies $\times$ cm^{-2}. Calculons la température correspondante. Il vient $T = 5920°$. Il s'agit bien là d'une température voisine de celle du Soleil; la brillance du Soleil est connue avec si peu de précision qu'il semble difficile de demander mieux.

19. — Calculons la magnitude absolue et tirons de son expression celles du diamètre et de la parallaxe. On a

$$M = E - 5\log r + 2{,}861 \cdot \frac{10^4}{T} - 184 \cdot \frac{10^4}{T^2} \cdot$$

E est une constante. On pourrait essayer de la déterminer en appliquant les considérations développées ci-dessus. On ne tiendrait ainsi aucun compte de l'absorption atmosphérique terrestre. Il est préférable d'admettre la valeur que nous avons adoptée de la magnitude absolue du Soleil. Il vient ainsi E = 0,26 et

$$M = 0{,}26 - 5 \log r + 2{,}861 \cdot \frac{10^4}{T} - 184 \cdot \frac{10^4}{T^2} \cdot$$

La parallaxe est

$$\log \pi = 0{,}2\,E - 1 - 0{,}2\,m - \log r + \frac{5722}{T} - \frac{368000}{T^2}$$

$$= -0{,}948 - 0{,}2\,m - \log r + \frac{5722}{T} - \frac{368000}{T^2} \cdot$$

On a enfin, pour le diamètre apparent

$$\log \delta = 0{,}2\,E - 3{,}332 - 0{,}2\,m + \frac{5722}{T} - \frac{368000}{T^2}$$

$$= -3{,}280 - 0{,}2\,m + \frac{5722}{T} - \frac{368000}{T^2} \cdot$$

Le dernier terme de ces formules est négligeable pour des températures suffisamment élevées. Le calcul montre que si l'on tient à une précision du centième de magnitude, le terme en T^{-2} ne peut être négligé que pour des températures supérieures à 13600°, valeur pour laquelle la validité de la formule est incertaine. Si on se contente du dixième de magnitude, cette limite tombe à 4300°.

20. — Pour le calcul de la magnitude absolue, nous avons indiqué [1] la formule

$$M = A - 5 \log r + 1{,}086\,(a + 4)\ \mathrm{Log}\left(1 + \frac{b}{a\,\lambda_v\,T}\right) \cdot$$

Développant en série, il vient

$$M = A - 5 \log r + 1{,}086\,\frac{a+4}{a\,\lambda_v} \cdot \frac{b}{T} - 1{,}086\,\frac{a+4}{a^2\,\lambda_v^2} \cdot \frac{b^2}{T^2} \cdot$$

[1] § 3.

L'identification des coefficients donne

$$\lambda_v = 5{,}50 \times 10^{-5}\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad a = 405 \ .$$

La valeur de la longueur d'onde du maximum de sensibilité est excellente. Quant à l'acuité, elle est beaucoup plus élevée que toutes celles que nous avons eu l'occasion de déterminer dans le domaine astronomique. Elle dépasse même celles trouvées au laboratoire, qui sont de l'ordre de 180 [1]. Cette détermination ne doit d'ailleurs être acceptée que sous toutes réserves, eu égard au peu de convergence du développement du logarithme.

21. — Pour la vérification numérique relative aux étoiles de diamètre apparent connu, on trouve la formule

$$\varphi(\mathrm{T}) \equiv -\,3{,}280 + \frac{5722}{\mathrm{T}} - \frac{368000}{\mathrm{T}^2} = 0{,}2\,m + \log \delta \ .$$

Quoique l'équation en T soit élémentaire, une table reste d'un usage commode.

T	φ(T)	T	φ(T)	T	φ(T)
2000	— 0,511	3000	— 1,414	4000	— 1,873
2200	— 0,755	3200	— 1,528	4200	— 1,939
2400	— 0,960	3400	— 1,629	4400	— 1,999
2600	— 1,134	3600	— 1,719	4600	— 2,053
2800	— 1,283	3800	— 1,800	4800	— 2,104
3000	— 1,414	4000	— 1,873	5000	— 2,150

Les étoiles considérées ont, d'après la formule F, les températures suivantes:

Etoile	Type spectral	Température	Etoile	Type spectral	Température
α Bouvier .	K0	4000	ε Pégase . .	K0	3990
γ Aigle . . .	K2	3840	α Taureau . .	K5	3770
α Orion . .	Ma	3050	α Scorpion .	Ma	3070
β Pégase . .	Ma	3080	α Hercule . .	Mb	2590
o Baleine . .	Md	2630			

[1] I, § 36.

Ces valeurs sont tout à fait admissibles. Rappelons que l'étalonnage a été fourni par le Soleil. La formule F est donc valable pour les étoiles froides, jusqu'au type G en tous cas.

22. — Examinons maintenant l'index absolu. Il est donné par la formule

$$I = F + \frac{28610}{T} - \frac{184 \cdot 10^4}{T^2} + 10 \log T \ .$$

Dérivons:

$$\frac{dI}{dT} = T^{-1}\left(4{,}343 - \frac{28610}{T} + \frac{368 \cdot 10^4}{T^2}\right)$$

$$\frac{d^2I}{dT^2} = -\frac{2}{T^2}\left(2{,}171 - \frac{28610}{T} + \frac{542 \cdot 10^4}{T^2}\right) .$$

Le minimum a lieu pour $T_m = 6580°$, température peu supérieure à celle du Soleil. L'inflexion se présente à 12990°.

Remarquons la différence entre la valeur de la température du Soleil déduite de la brillance, soit 5920°, et celle donnée par les minimum de l'index absolu. Elle atteint 10 %. Le peu de certitude de la valeur de cette brillance rend difficile une conclusion ferme.

D'autre part, l'inflexion de l'index absolu se produit à une température quelque peu inférieure au double de celle correspondant au minimum. La différence est faible. Il semble donc possible d'admettre la validité de la formule F jusque vers cette inflexion, soit en tous cas jusqu'à la classe spectrale A. Pour nous en assurer, construisons une table permettant la comparaison immédiate de diverses valeurs de l'index absolu. Prenons pour cela les valeurs suivantes I_F, basées sur la formule F, I_H calculées par M. Eddington d'après la formule H, I_1, I_2 et I_3 établies d'après notre théorie générale et correspondant aux valeurs suivantes des constantes de sensibilité:

$$\lambda_1 = 5{,}5 \times 10^{-5}\,\text{cm} \ , \qquad a_1 = 50 \ .$$

$$\lambda_2 = 5{,}309 \times 10^{-5}\,\text{cm} \ , \qquad a_2 = 50{,}1 \ .$$

$$\lambda_3 = 5{,}44 \times 10^{-5}\,\text{cm} \ , \qquad a_3 = 75 \ .$$

Température	I_F	I_H	I_1	I_2	I_3
2000	4,37	—	3,93	4,21	4,24
2500	2,65	2,71	2,43	2,65	2,61
3000	1,62	1,67	1,51	1,67	1,56
4000	0,57	0,62	0,55	0,64	0,60
5000	0,15	0,18	0,15	0,20	0,17
6000	0,01	0,02	0,01	0,03	0,02
8000	0,09	0,06	0,08	0,05	0,07
10000	0,36	0,29	0,33	0,28	0,32
12000	0,68	0,58	0,64	0,57	0,59
15000	1,17	1,04	1,12	1,03	1,11
20000	1,95	1,77	1,87	1,77	1,86
25000	2,63	—	2,54	2,42	2,54
30000	3,24	—	3,13	3,01	3,07

Jusqu'à la température du Soleil, la formule F donne des valeurs de l'index absolu appartenant au domaine de variation des valeurs connues. Au delà, elle donne des valeurs systématiquement trop grandes. La différence est de l'ordre de 0,1 mag vers 12000°; elle ne dépasse 0,2 mag qu'au delà de 20000°.

Remarquons que nos valeurs de l'index absolu ont été calculées dans l'hypothèse de la validité de l'équation spectrale de Wien. L'application de la loi de Planck conduit à des corrections qui diminuent l'index absolu de quantités voisines de 0,1 mag vers 10000° et atteignant 0,5 mag à 30000° [1]. Cela tend à diminuer le domaine de validité de la formule F du côté des températures élevées.

A la valeur du minimum de l'index correspond un maximum de sensibilité de l'œil placé à $5{,}44 \times 10^{-5}$ cm, ce qui est bon. Le désaccord de cette valeur d'avec celle trouvée en comparant les coefficients des deux formules linéaires en b/T montre avec quelle prudence il faut opérer sur le développement en série.

Admettons donc la valeur $\lambda_v = 5{,}44 \times 10^{-5}$ cm. Choisissons une valeur de I suffisamment éloignée du minimum, soit

[1] II, § 10.

$I = 1{,}62$, correspondant à $T = 3000°$ et calculons la valeur correspondante de l'acuité a. On est conduit à l'équation [1]

$$\frac{1{,}62}{2{,}5} = 4 \log \frac{3000}{6580} + (a + 4) \log \frac{a + \dfrac{1{,}432 \cdot 10^5}{5{,}44 \cdot 3000}}{a + 4} \; .$$

Le calcul montre qu'il n'est pas possible de satisfaire rigoureusement à cette équation. A la valeur $a = 75$ correspond sensiblement un minimum du second membre. La valeur de ce minimum diffère très peu du premier membre. Nous admettrons donc les valeurs suivantes des constantes de sensibilité:

$$\lambda_v = 5{,}44 \times 10^{-5}\,\text{cm} \; ; \qquad a = 75 \; .$$

Cette acuité est un peu supérieure à celles généralement trouvées dans les applications astronomiques. Il n'y a rien là d'étonnant, car la formule F n'a pas été établie à leur intention et les applications usuelles conduisent généralement à des valeurs relativement élevées de l'acuité. En même temps qu'un déplacement de la sensibilité vers le violet, la diminution de l'intensité de la source entraîne une diminution de l'acuité.

L'incertitude du calcul basé sur l'approximation que constitue le développement en série peut être éliminée en comparant l'ensemble des valeurs sûres données par la formule F à celles que donne l'application des méthodes basées sur les courbes de sensibilité. Calculons donc les valeurs de l'index absolu correspondant aux constantes de sensibilité indiquées ci-dessus. Ces valeurs figurent dans le tableau, colonne I_3. Elles diffèrent peu de celles obtenues par d'autres méthodes ou basées sur des constantes de sensibilité de l'œil quelque peu différentes.

Nous avons déjà signalé le fait que la formule F donne un développement de la magnitude absolue comportant des termes en T^{-1} et T^{-2}. Il en est de même pour l'index absolu.

Au contraire, l'hypothèse de la sensibilité concentrée conduit à des formules linéaires en T^{-1}. Pour des étoiles chaudes, ces deux groupes de formules sont équivalentes, puisque le terme

[1] I, § 21.

en T^{-2} est alors négligeable. Nous retrouvons ici le fait sur lequel nous avons déjà insisté que les formules linéaires ne doivent être appliquées qu'avec circonspection et en limitant de façon appropriée le domaine de température où on les utilise.

V. — Formule de MM. Wensel, Roeser, Barbrow et Caldwell.

23. — Ces auteurs ont proposé la formule suivante pour la brillance du corps noir [1]

$$B = 2495 \left(\frac{T}{2955}\right)^{\frac{461,4}{\sqrt{T}}} \text{ bougies-cm}^{-2} .$$

Nous l'appellerons la formule W.

L'accord avec l'expérience est remarquablement bon. De la température de fusion du platine à celle de l'iridium, les écarts n'atteignent pas 1 $^0/_{00}$. La formule a été vérifiée de 1500° à 2800°. Elle est donc certainement valable pour les étoiles froides.

Etudions-la tout d'abord pour elle-même. Prenons les logarithmes et dérivons:

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dT} = \frac{461,4}{\sqrt{T^3}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{T}{2955}\right) .$$

Cette dérivée s'annule pour $T = 22000°$. B est donc une fonction croissante de la température jusqu'à 22000°. Au delà, la formule W est inapplicable.

Examinons la deuxième dérivée; il vient

$$\frac{d^2B}{dT^2} = \frac{461,4\,B}{T^{\frac{5}{2}}}\left\{\frac{461,4}{T^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{T}{2955}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{T}{2955}\right) - \frac{1}{2}\right\} .$$

[1] Wensel, Roeser, Barbrow and Caldwell, Derivation of photometric Standards for tungsten-filaments lamps. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 13, 2, Washington, 1934.

Elle s'annule pour $T = 8150°$. L'extrapolation au delà de cette valeur est peu sûre. La formule W a donc l'avantage d'une bonne précision pour les températures correspondant aux étoiles très froides, mais l'inconvénient d'un domaine de validité assez limité.

24. — Appliquons-la au Soleil, en égalant, comme plus haut, à 190000 bougies cm^{-2} sa brillance. Il lui correspond une température de 6170°, valeur dont on remarquera la concordance avec celle généralement admise.

25. — Donnons maintenant l'expression de la magnitude absolue et des grandeurs qui lui sont liées, en déterminant, comme plus haut, la constante d'étalonnage au moyen du Soleil:

$$\begin{aligned} M &= A - 5 \log r - \frac{1153,5}{\sqrt{T}} \log T + \frac{4003}{\sqrt{T}} \\ &= 9,55 - 5 \log r - \frac{1153,5}{\sqrt{T}} \log T + \frac{4003}{\sqrt{T}} . \end{aligned}$$

La parallaxe et le diamètre apparent sont

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,2 A - 1 - \log r - 0,2 m - \frac{230,7}{\sqrt{T}} \log T + \frac{800,6}{\sqrt{T}} \\ &= - 0,910 - \log r - 0,2 m - \frac{230,7}{\sqrt{T}} \log T + \frac{800,6}{\sqrt{T}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \delta &= 0,2 A - 3,332 - 0,2 m - \frac{230,7}{\sqrt{T}} \log T + \frac{800,6}{\sqrt{T}} \\ &= - 1,412 - 0,2 m - \frac{230,7}{\sqrt{T}} \log T + \frac{800,6}{\sqrt{T}} . \end{aligned}$$

La température d'une étoile de diamètre apparent connu est donnée par l'équation

$$\varphi(T) \equiv \frac{800,6}{\sqrt{T}} - \frac{230,7}{\sqrt{T}} \log T - 1,412 = \log \delta + 0,2 m .$$

La table suivante en permet la solution facile, dans le cas qui nous intéresse ici, des géantes considérées plus haut.

T	φ(T)	T	φ(T)
2000	— 0,548	3000	— 1,450
2200	— 0,792	3200	— 1,564
2500	— 0,998	3400	— 1,664
2600	— 1,172	3600	— 1,752
2800	— 1,322	3800	— 1,832
3000	— 1,450	4000	— 1,902

On obtient ainsi les températures suivantes pour les étoiles de notre liste

Etoile	Type spectral	Tem-pérature	Etoile	Type spectral	Tem-pérature
α Bouvier .	K0	3920	ε Pégase . .	K0	3900
γ Aigle . . .	K2	3760	α Taureau . .	K5	3690
α Orion . .	Ma	2990	α Scorpion .	Ma	3010
β Pégase . .	Ma	3010	α Hercule . .	Mb	2550
o Baleine . .	Md	2580			

Ces valeurs sont bonnes. Les dernières, appartenant au domaine où la formule W a été vérifiée expérimentalement, peuvent être considérées comme des déterminations indépendantes, compte tenu de la condition d'étalonnage fournie par le Soleil.

26. — Déterminons enfin l'index absolu donné par la formule W. On trouve

$$I = F - \frac{1153,5}{\sqrt{T}} \log T + \frac{4003}{\sqrt{T}} + 10 \log T$$

$$= \left(10 - \frac{1153.5}{\sqrt{T}}\right) \log \frac{T}{2955} + G\ .$$

F et G sont des constantes d'étalonnage liées par la condition

$$G = F + 34,71\ .$$

Calculons la dérivée. Il vient

$$\frac{dI}{dT} = T^{-\frac{3}{2}}\left[4{,}343\sqrt{T} + 576{,}7 \log T - 2502\right] .$$

Elle s'annule pour $T = 5800°$, valeur un peu inférieure à la température du Soleil.

Comme il est certain que le domaine de validité de la formule W n'atteint pas l'inflexion de l'index, il est inutile de pousser la discussion plus loin.

Comparons quelques valeurs de l'index calculé au moyen de la formule W aux tables précédemment citées [1].

T	I_W	I_H	I_1	I_2
2000	4,18	—	3,93	4,21
2500	2,46	2,71	2,32	2,65
3000	1,43	1,67	1,51	1,67
4000	0,42	0,62	0,55	0,64
5000	0,06	0,18	0,15	0,20
6000	0,00	0,02	0,01	0,00
7000	0,09	0,005	0,01	0,00
8000	0,25	0,06	0,08	0,05

Pour les températures basses, il y a pratiquement coïncidence entre les valeurs de I_W et celles données par les autres théories. Elles se vérifient donc toutes entre elles. Au delà de 3000° la formule W donne des valeurs systématiquement trop petites de quantités de l'ordre de 0,1 mag, jusqu'au minimum de l'index. Au delà de ce minimum, les valeurs de I_W sont trop grandes. Nous savons d'ailleurs que le domaine de validité de la formule W ne s'étend pas au delà de 8000°.

On pourrait se proposer de confronter ces valeurs avec celles que donnerait la méthode des courbes de sensibilité avec des constantes appropriées. Cela est sans grand intérêt, car à la valeur $T_m = 5800°$ de la température du minimum de l'index, correspond un maximum de sensibilité de l'œil placé à $6{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm, valeur manifestement trop élevée. Ce n'est donc

[1] § 22.

qu'après un ajustement portant sur cette longueur d'onde qu'il serait possible de déterminer l'acuité. Autant dire que celle-ci reste inconnue, car elle est très sensible à une variation de la longueur d'onde du maximum de sensibilité.

VI. Comparaison des formules empiriques précédentes.

27. — Rapprochons les températures des géantes froides et du Soleil, telles qu'elles sont données par les diverses formules examinées.

Etoile	Type spectral	Température		
		Hertzsprung	Fabry	Wensel
α Bouvier	K0	4070	4000	3920
ε Pégase	K0	4050	3990	3900
γ Aigle	K2	3910	3840	3760
α Taureau . . .	K5	3830	3770	3690
α Orion	Ma	3110	3050	2990
α Scorpion . . .	Ma	3130	3070	3010
β Pégase	Ma	3130	3080	3010
α Hercule	Mb	2640	2590	2550
o Baleine	Md	2670	2630	2580
Soleil (brillance)		—	5920	6170
» (index minimum) .		6810	6580	5800

Il y a évidemment des différences systématiques de formule à formule. Pour les étoiles froides, elles sont de l'ordre de 4 % et ne dépassent pas 150°. C'est bien l'ordre de grandeur des erreurs auxquelles on peut s'attendre dans des déterminations de températures stellaires. Remarquons, notamment en ce qui concerne α Hercule, que la valeur obtenue appartient au domaine où les formules ont pu être vérifiées au laboratoire.

28. — La concordance des valeurs obtenues pour le Soleil est moins bonne, mais l'incertitude dépasse à peine celle des

diverses valeurs admises actuellement. Par exemple, M. Bosler [1] retient les valeurs suivantes:

5860° donnée par la loi de Stéfan, valeur à rapprocher de celles correspondant à la brillance, soit 5920° et 6170°;

6250° ou 6050°, valeurs basées sur le maximum d'émission;

6000° à 7000°, correspondant à l'assimilation du Soleil à un radiateur obéissant à la loi de Planck; on rapprochera ces derniers chiffres de ceux correspondant au minimum de l'index absolu visuel, soit 6810°, 6580° et 5800°.

29. — Concluons en répétant ici la remarque déjà faite dans notre introduction: nous avons discuté diverses théories basées sur des hypothèses différentes et des raisonnements mathématiques sans lien les uns avec les autres; les lois obtenues ont des formes analytiques sans analogie. Elles conduisent, dans le domaine de température où leur validité ne peut pas être infirmée *a priori*, à des résultats remarquablement cohérents. Or l'application des théories thermiques à l'astrophysique repose toujours sur une extrapolation audacieuse. Quand les diverses méthodes conduisent à des résultats numériques comparables, la valeur de ces résultats en est considérablement augmentée. En particulier, l'accord des théories partielles rapportées ici avec notre théorie générale de l'indice absolu constitue une vérification des unes et des autres, qui rend assez sûrs les résultats acquis.

Observatoire de Genève.

[1] *Astrophysique*, p. 227, Paris, 1928.