Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 19 (1937)

Artikel: Sur la diffraction par un corps de révolution noir : éclairé selon son axe par une source punctiforme

Autor: Barreca, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741819

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la diffraction par un corps de révolution noir, éclairé selon son axe par une source punctiforme

(2me MÉMOIRE) [1]

PAR

P. BARRECA

(Avec 3 fig.)

---

1. — *Résumé.* Dans le présent mémoire, on étudie le cas particulier de la diffraction par un corps de révolution noir, placé dans le vide et éclairé selon son axe par une source lumineuse punctiforme rayonnant également dans toutes les directions, en envisageant les cas particuliers de la sphère, du disque mince et du tore. Le résultat de ce travail, qui complète notre mémoire précédent, se résume dans une formule générale s'appliquant à chaque cas particulier par l'introduction des valeurs particulières (algébriques, non numériques) des coordonnées du contour du corps donné et des valeurs algébriques de certaines données caractéristiques du corps, qu'on déduit de l'équation de sa surface, par des méthodes qu'on expose ici.

[1] P. Barreca, Sur la diffraction par un corps de révolution éclairé selon son axe par une source punctiforme. *Arch. des Sc. Phys. et Nat.*, mars-avril 1936, p. 98.

De la fonction arbitraire H (θ_0, ...).

2. — *La fonction* H *de notre premier mémoire n'est pas tout à fait la même dans toutes les régions de l'espace.* En effet, on peut distinguer trois cas: dans la partie de l'espace contenant exclusivement des ondes lumineuses sphériques, H ne saurait dépendre de la forme et de la position du corps obstacle; dans la région par contre dans laquelle se trouvent exclusivement des ondes ayant déjà touché l'obstacle et ne le touchant plus, la fonction H dépendra de tout le corps obstacle. Dans la suite de ce mémoire, je désignerai la valeur de la fonction H dans ces deux régions par les symboles H_1 et H_3.

Dans la région intermédiaire, toutes les ondes, dont nous supposons connaître la forme et la position, coupent toutes la surface du corps obstacle en question. Otons la partie du corps qui n'est pas encore entrée en contact avec une onde donnée de toutes ces ondes; nous envisageons donc la partie du corps touché par cette onde, au delà du point de contact. Remplaçons la partie de corps enlevée par un autre corps de révolution, ou bien remplaçons-la par rien du tout. Cette modification ne portera un effet que sur la partie de l'espace au delà du point de contact car l'effet ne saurait précéder la cause.

Dans cette région, la fonction H, que nous appellerons H_2, varie donc d'une onde à l'onde suivante par degrés infiniment petits; en d'autres termes, dans cette région, la fonction dépend d'un paramètre définissant chaque onde de cette région. Pour un corps de forme, de grandeur et de position connues, choisissons comme paramètre l'arc l du contour méridien du corps-obstacle interposé, compris entre la zone de contact de l'onde encore sphérique, qui arrive pour la première fois au contact du corps, et l'onde en question, et posons:

$$\frac{\partial H_2}{\partial l} = k(l,\ \theta_0,\ \text{paramètres})\ .$$

Par intégration de 0 à l, on a:

$$H_2 = \text{fonction arbitraire} + \int_0^l k(l, \theta_0, \ldots)\, dl \,.$$

Mais, en supposant $l = 0$, on voit que la fonction arbitraire devient $H_1(\theta_0)$ indépendamment du corps obstacle et de ses paramètres, car lorsque $l = 0$, l'onde, qui va cesser d'être sphérique, l'est encore. En d'autres termes, on aura:

$$H_2 = H_1 + F(l, \theta_0, \text{paramètres}) \,. \qquad (1)$$

Lorsque l a la valeur l max de l'onde qui va cesser définitivement d'être en contact avec le corps, la fonction H_2 se transformera définitivement en H_3. Nous laissons de côté H_1. Sur les surfaces de séparation des trois régions, il y a continuité de H_1 à H_2 et de H_2 à H_3.

3. — *Il doit exister une expression générale de* H_2 *(dont* H_3 *est un cas particulier,* $l = l$ max*) s'appliquant à tous les corps de révolution à l'aide des coordonnées* x_s *et* y_s *des points générateurs de la surface* S *du corps obstacle:*

$$x_s = a + f(l) \,, \qquad y_s = b + \varphi(l) \,,$$

l'origine coïncidant avec la source, l'axe O_x étant l'axe de révolution, a et b étant les coordonnées du point de contact de l'onde qui va cesser d'être sphérique.

En effet, si la fonction H_2 est arbitraire, cela n'est qu'une expression de notre liberté de choisir un cas particulier du corps, c'est-à-dire de prendre certains x_s et y_s. Nous pouvons faire varier nos x_s et y_s infiniment peu, ou même accumuler une infinité de fois des variations infiniment petites et continues; dans ces conditions, automatiquement H_2 doit aussi subir des changements infiniment petits et continus. Quant à l'origine, nous la ferons coïncider avec la source punctiforme, ce qui supprime l'arbitraire sur ce point.

Remarque n° 1. — $f(O) = 0, \quad \varphi(O) = 0.$

Remarque n° 2. — Nous aurons donc,

dans la première région de l'espace: $H = H_1(\theta_0)$, dont nous ne nous occuperons pas;

dans la deuxième région de l'espace:

$$H = H_1(\theta_0) + F\left(\theta_0, \frac{a + f(l)}{\lambda}, \frac{b + \varphi(l)}{\lambda}\right),$$

mais

$$F\left(\theta_0, \frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right) = 0 \ ;$$

dans la troisième région de l'espace:

$$H = H_1(\theta_0) + F\left(\theta_0, \frac{a + f(l \max)}{\lambda}, \frac{b + \varphi(l \max)}{\lambda}\right),$$

si l'on désigne par H la fonction arbitraire totale de notre premier mémoire.

4. — *Pour chaque corps particulier, dont la forme, la grandeur et la position sont données, la fonction* F *est unique.* Il est évident que $+(H_1 + F)$ et $-(H_1 + F)$ sont des solutions identiques, car le passage d'une expression à l'autre revient à changer l'origine des temps d'une demi-période. En effet, si I est un vecteur fixe, de longueur 1, parallèle à l'axe des nombres réels, on tire de la formule finale (9) de notre premier mémoire:

$$IV_{r,p} \frac{\lambda}{2\pi i \sqrt{2L}} =$$

$$= \int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\pi} e^{\pm 2\pi i \frac{x-d}{\lambda} \cos\theta_0 + iQ_2\left(\theta_0, \frac{a+f(l)}{\lambda}, \frac{b+\varphi(l)}{\lambda}\right)} \cdot I \operatorname{bes}_0 \left\{ 2\pi \frac{y}{\lambda} \sin\theta_0 \right\} P_2\left(\theta_0, \frac{a + f(l)}{\lambda}, \frac{b + \varphi(l)}{\lambda}\right) d\theta_0 \ . \quad (2)$$

Dans cette équation, nous avons remplacé $(H_1 + F)$ par $P_2 \cdot e^{iQ_2}$. (Pour les notations, voir notre premier mémoire). Or, le deuxième membre de l'équation (2) est une somme de nombres complexes, représentant une ligne polygonale de

forces, composée d'un nombre infini de vecteurs infiniment petits, ayant chacun pour longueur:

$$\beta = \mathrm{bes}_0 \left\{ 2\pi \frac{y}{\lambda} \sin \theta_0 \right\} P_2\left(\theta_0, \frac{a + f(l)}{\lambda}, \frac{b + \varphi(l)}{\lambda}\right) d\theta_0$$

et faisant, avec l'axe des nombres réels, l'angle:

$$\gamma = \pm\, 2\pi \frac{x - d}{\lambda} \cos \theta_0 + Q_2\left(\theta_0, \frac{a + f(l)}{\lambda}, \frac{b + \varphi(l)}{\lambda}\right).$$

Nous admettons toujours que l'origine des x coïncide avec la source lumineuse, par conséquent $d = 0$. Nous ne précisons pas davantage la signification de l'angle θ_0, qui est utilisé ici seulement pour le calcul numérique de β et de γ. Le vecteur résultant (la corde fermant la ligne polygonale courbe) est le premier membre de l'équation (2). Nous avons choisi des valeurs fixes pour $\frac{x - d}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, a, b, $f(l)$, $\varphi(l)$. Or, si l'on pouvait avoir plusieurs fonctions $(H_1 + F)$, c'est-à-dire plusieurs F, pour chaque corps particulier, on aurait plusieurs lignes polygonales avec un même dernier côté, mais en réalité, le phénomène physique est unique.

Détermination de F.

5. — Nous déterminons F de la façon suivante: Si V_s est la valeur (complexe) de V sur la surface du corps-obstacle, on peut l'évaluer à l'aide de l'équation (2) en posant $x = x_s$, $y = y_s$; il n'y aura, dans cette équation, que les deux inconnues (complexes) V_s et $(H_1 + F)$, tandis que x_s et y_s sont donnés. Or, si l'on peut faire disparaître le signe d'intégration, on pourra dédoubler cette équation en deux autres (complexes) car alors, l'un des membres doit être indépendant de θ_0, tandis que l'autre ne le sera pas. On pourra alors calculer V_s et F.

Remarque. — Nous écrivons encore:

$$H_1(\theta_0), \; F\left(\theta_0, \frac{x_s}{\lambda}, \frac{y_s}{\lambda}\right),$$

lorsque nous ferons usage de coordonnées cartésiennes, qui auront leur origine dans la source. Mais nous écrirons:

$$H_1(\theta_0)\ , \qquad F_p\left(\theta_0\,,\ \frac{\rho_s}{\lambda}\,,\ \theta_s\right)\,, \tag{3}$$

en désignant ainsi ces mêmes valeurs numériques lorsqu'elles sont calculées *par d'autres opérations* avec les coordonnées polaires ρ_s et θ_s (pôle dans la source). Nous aurons en effet besoin de modifier les arguments $\frac{\rho_s}{\lambda}$, θ_s sans vouloir ni pouvoir rien changer aux opérations de calcul envisagées par la notation (3).

6. — En application de ce qui précède, on tire de (1) et (2):

$$V_s = \frac{2\pi i\sqrt{2L}}{\lambda}\int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\pi} e^{\pm 2\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}\cos\theta_s\cos\theta_0}\,\mathrm{bes}_0\left\{2\pi\frac{\rho_s}{\lambda}\sin\theta_s\sin\theta_0\right\}\left\{H_1(\theta_0)+F_p\left(\theta_0\,,\ \frac{\rho_s}{\lambda}\,,\ \theta_s\right)\right\}d\theta_0$$

en appelant O_s la valeur qu'aurait eue V_s au point donné de S, si on n'a que des ondes sphériques, on aura:

$$(V_s - O_s) = \frac{2\pi i\sqrt{2L}}{\lambda}\int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\pi} e^{\pm 2\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}\cos\theta_s\cos\theta_0}\,\mathrm{bes}_0\left\{2\pi\frac{\rho_s}{\lambda}\sin\theta_s\sin\theta_0\right\}F_p\left(\theta_0\,,\ \frac{\rho_s}{\lambda}\,,\ \theta_s\right)d\theta_0\ . \tag{4}$$

7. — Rappelons que θ_0 est une grandeur variable qui ne dépend pas des autres variables, sans qu'on puisse l'appeler arbitraire, car elle n'a pas des valeurs arbitraires. Elle doit changer automatiquement pendant l'intégration de 0 à π et disparaître finalement lorsqu'on introduit les valeurs limites, autrement la formule (4) serait inutilisable.

8. — Ecrivons la dérivée totale par rapport à l de chaque membre de (4):

$$\frac{d(V_s - O_s)}{dl} = \frac{\partial(V_s - O_s)}{\partial\theta_s}\cdot\frac{d\theta_s}{dl} + \frac{\partial(V_s - O_s)}{\partial\frac{\rho_s}{\lambda}}\cdot\frac{d\frac{\rho_s}{\lambda}}{dl}$$

en calculant les deux dérivées partielles qu'on vient d'écrire.

Il n'y a pas d'autres variables qui seraient fonction de l, car ici θ_s et $\frac{\rho_s}{\lambda}$ sont des expressions générales, chacune avec les paramètres caractérisant le corps-obstacle particulier. La grandeur $\frac{\sqrt{2L}}{\lambda}$ est cachée dans les deux membres de cette équation.

9. — Posons deux variables nouvelles:

$$\alpha = \theta_s + \theta_0 , \qquad \beta = \theta_s - \theta_0 .$$

Comme les degrés de liberté doivent être les mêmes qu'auparavant, l'une quelconque de ces deux grandeurs variables nouvelles doit être arbitraire et rester constante une fois qu'elle a été choisie, tandis que l'autre variera automatiquement dans l'intégration, sa différentielle n'étant pas nulle le long de toute l'intégration. On aura:

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta , \text{ donc } d\theta_0 = \frac{1}{2}d\alpha \text{ ou bien } d\theta_0 = -\frac{1}{2}d\beta,$$

à volonté ;

$$\cos\theta_s \cos\theta_0 = \frac{1}{2}\cos(\theta_s - \theta_0) + \frac{1}{2}\cos(\theta_s + \theta_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\cos\alpha ;$$
$$\sin\theta_s \sin\theta_0 = \frac{1}{2}\cos(\theta_s - \theta_0) - \frac{1}{2}\cos(\theta_s + \theta_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha ;$$

et les limites de l'intégration seront:

$$\begin{cases} \text{pour } \theta = 0 , \text{ soit } \alpha' = \theta_s \text{ soit } \beta' = \theta_s ; \\ \text{pour } \theta = \pi , \text{ soit } \alpha'' = \theta_s + \pi \text{ soit } \beta'' = \theta_s - \pi . \end{cases} \tag{5}$$

Dans les deux cas, on a:

$$V_s - O_s = \frac{\pi i\sqrt{2L}}{\lambda} \int_{\alpha'=\theta_s}^{\alpha''=\theta_s+\pi} e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}(\cos\beta+\cos\alpha)} \mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}(\cos\beta - \cos\alpha)\right\} F_p\left\{\frac{1}{2}(\alpha-\beta), \frac{\rho_s}{\lambda}, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\} d\alpha$$

$$V_s - O_s = -\frac{\pi i\sqrt{2L}}{\lambda} \int_{\beta'=\theta_s}^{\beta''=\theta_s-\pi} e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}(\cos\beta+\cos\alpha)} \mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}(\cos\beta - \cos\alpha)\right\} F_p\left\{\frac{1}{2}(\alpha-\beta), \frac{\rho_s}{\lambda}, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\} d\beta .$$

(5 *bis*)

Nous pouvons faire disparaître le signe d'intégration par dérivation par rapport à la limite inférieure, selon la règle:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -f(x_1)\ ,$$

la limite supérieure n'ayant pas d'influence. Nous remplaçons ensuite α' et β' par les valeurs (5), en revenant aux anciennes grandeurs variables. Nous aurons alors:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta_s}(V_s - O_s) &= -\frac{\pi i\sqrt{2L}}{\lambda}\cdot e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s-\theta_0)+\cos\theta_s]}\,\mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s-\theta_0)-\cos\theta_s]\right\}F_p\left\{\frac{\theta_0}{2},\frac{\rho_s}{\lambda},\ \theta_s-\frac{\theta_0}{2}\right\}\\
\frac{\partial}{\partial\theta_s}(V_s - O_s) &= +\frac{\pi i\sqrt{2L}}{\lambda}\cdot e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s+\theta_0)+\cos\theta_s]}\,\mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s+\theta_0)-\cos\theta_s]\right\}F_p\left\{\frac{\theta_0}{2},\frac{\rho_s}{\lambda},\ \theta_s+\frac{\theta_0}{2}\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Par ces deux équations, nous voulons évaluer F_p, mais pas avec ses arguments actuels, mais au contraire avec les arguments θ_0, $\frac{\rho_s}{\lambda}$ et θ_s. Soustrayons de la seconde la première équation, membre par membre, et changeons ensuite θ_0 en $2\theta_0$. Nous aurons alors:

$$\begin{aligned}
0 = +\frac{\pi i\sqrt{2L}}{\lambda}\cdot\Bigg[&e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s+2\theta_0)+\cos\theta_s]}\,\mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s+2\theta_0)-\cos\theta_s]\right\}F_p\left\{\theta_0,\frac{\rho_s}{\lambda},\ \theta_s+\theta_0\right\}+\\
&+e^{\pm\pi i\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s-2\theta_0)+\cos\theta_s]}\,\mathrm{bes}_0\left\{\pi\frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s-2\theta_0)-\cos\theta_s]\right\}F_p\left\{\theta_0,\frac{\rho_s}{\lambda},\ \theta_s-\theta_0\right\}\Bigg].
\end{aligned} \tag{7}$$

Cette équation doit toujours être vraie pour toutes les valeurs

de θ_0 et des autres variables. Par conséquent, on doit avoir séparément et simultanément:

$$\left\{\begin{aligned} F_p\left\{\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s + \theta_0\right\} &= \frac{\text{une non-fonction de } \theta_0}{e^{\pm \pi i \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s + 2\theta_0) + \cos\theta_s]} \operatorname{bes}_0\left\{\pi \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s + 2\theta_0) - \cos\theta_s]\right\}} \\ F_p\left\{\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s - \theta_0\right\} &= \frac{-\text{ la même non-fonction de } \theta_0}{e^{\pm \pi i \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s - 2\theta_0) + \cos\theta_s]} \operatorname{bes}_0\left\{\pi \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s - 2\theta_0) - \cos\theta_s]\right\}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Nous avons donné le signe moins à la dernière expression; cela nous est loisible, car la fonction figurant aux numérateurs apparaît ici pour la première fois et sera déterminée plus tard. Appelons-la Ae^{iB}, mais remarquons qu'elle pourrait parfaitement être réelle. Si elle n'était pas identique dans les deux équations (8), le deuxième membre de (7) ne serait pas égal à zéro. Si une fonction de θ_0 entrait comme multiplicateur dans (8), le premier membre de (6) ne serait pas indépendant de θ_0.

Remarque. — Si dans la dernière équation (8) on remplace θ_0 par $-\theta_0$ et si l'on appelle α la somme $(\theta_s + \theta_0)$, l'équation ne deviendra pas tout à fait identique à l'autre. On en tire seulement:

$$-F_p\left(-\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \alpha\right) = F_p\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \alpha\right);$$

mais cela ne dit pas que nous ayons affaire à une fonction impaire de θ_0. C'est que les deux équations donnent *deux* solutions, qui peuvent être paires. Mais comme elles ne se distinguent que par leur signe, nous pouvons faire usage d'une seule équation, par exemple de la première équation, (8), avec Ae^{iB} comme numérateur.

10. — Pour déduire de cette équation la valeur de $F_p\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s\right)$, faisons des changements indépendants dans les arguments de ses deux actuels facteurs de droite :

$$Ae^{iB}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s\right), \psi\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s + \theta_0\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\pm \pi i \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s + 2\theta_0) + \cos\theta_s]} \mathrm{bes}_0\left\{\pi \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta_s + 2\theta_0) - \cos\theta_s]\right\}}. \tag{9}$$

On peut faire les deux changements d'une façon arbitraire (car il n'est pas nécessaire d'avoir les mêmes valeurs numériques qu'auparavant), pourvu qu'ils aboutissent au résultat suivant, si on appelle θ'_s une autre θ_s:

$$Ae^{iB}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right), \qquad \psi\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right),$$

car alors, on est contraint de reconnaître dans leur produit la valeur de

$$F_p\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right).$$

Or, dans le premier des facteurs (9), il suffira de remplacer θ_s par θ'_s. Dans le deuxième facteur, au contraire, appelons θ'_s la somme de $(\theta_s + \theta_0)$, c'est-à-dire changeons $(\theta_s + 2\theta_0)$ en $(\theta'_s + \theta_0)$ et θ_s en $(\theta'_s - \theta_0)$.

On obtient:

$$\psi\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\pm \pi i \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta'_s + \theta_0) + \cos(\theta'_s - \theta_0)]} \mathrm{bes}_0\left\{\pi \frac{\rho_s}{\lambda}[\cos(\theta'_s + \theta_0) - \cos(\theta'_s - \theta_0)]\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^{\pm 2\pi i \frac{\rho_s}{\lambda} \cos\theta'_s \cos\theta_0} \mathrm{bes}_0\left\{2\pi \frac{\rho_s}{\lambda} \sin\theta'_s \sin\theta_0\right\}}.$$

Si le terme $(\theta_s + \theta_0)$ du premier membre s'était trouvé aussi au second membre, il aurait été remplacé par θ'_s, *comme au premier membre.* L'expression θ_0 toute seule (c'est-à-dire sans addition ni soustraction de θ_s) se serait trouvée au second membre et n'aurait pas été modifiée, pas plus qu'au premier membre; le terme $\frac{\rho_s}{\lambda}$ est resté tel quel comme au premier membre. On aura donc:

$$F_p\left(\theta_0, \frac{\rho_s}{\delta}, \theta'_s\right) = \frac{A e^{iB}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right)}{\theta^{\pm 2\pi i \frac{\rho_s}{\lambda} \cos\theta'_s \cos\theta_0} \operatorname{bes}_0\left\{2\pi \frac{\rho_s}{\lambda} \sin\theta'_s \sin\theta_0\right\}} \tag{10}$$

et on peut ôter l'apex.

11. — Si, au lieu de soustraire les deux équations (6) l'une de l'autre, membre à membre, nous en faisons la somme, nous aurons:

$$\frac{\partial}{\partial \theta'_s}(V_s - O_s) = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} A e^{iB}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta'_s\right). \tag{11}$$

Cette dernière notation doit rappeler que A et B sont des fonctions de $\frac{\rho_s}{\lambda}$ et de θ'_s.

12. — Par le même moyen, nous évaluerons l'autre dérivée partielle du paragraphe 8. Posons:

$$\eta = \text{arc tang}\, \frac{\rho_s}{\lambda},$$

arc compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, car les rayons vecteurs des coordonnées polaires sont toujours compris entre zéro et l'infini positif. Posons maintenant θ_s = constante. Posons aussi:

$$\theta_0 + \eta = \sigma, \qquad \theta_0 - \eta = \delta,$$

c'est-à-dire:

$$\eta = \frac{1}{2}(\sigma - \delta), \qquad \theta_0 = \frac{1}{2}(\sigma + \delta).$$

Choisissons, pour une des nouvelles grandeurs variables (σ ou δ), une valeur fixe et choisissons l'autre comme variable d'intégration. Nous aurons alors:

$$\text{ou bien} \quad d\theta_0 = \frac{1}{2} d\sigma \qquad \text{ou bien} \quad d\theta_0 = \frac{1}{2} d\delta$$

et les limites d'intégration seront:

pour $\theta_0 = 0$, ou bien $\sigma' = \eta$ ou bien $\delta' = -\eta$;

pour $\theta_0 = \pi$, ou bien $\sigma'' = \pi + \eta$ ou bien $\delta'' = \pi - \eta$;

et on obtient:

$$V_s - O_s = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} \int_{\substack{\sigma'=+\eta \\ \delta'=-\eta}}^{\substack{\sigma''=\pi+\eta \\ \delta''=\pi-\eta}} e^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}\frac{(\sigma-\delta)}{2} \cos\frac{(\sigma+\delta)}{2} \cos\theta_s} \operatorname{bes}_0\left\{2\pi \sin\theta_s \sin\frac{(\sigma+\delta)}{2} \operatorname{tang}\frac{(\sigma-\delta)}{2}\right\} F_p\left\{\frac{(\sigma+\delta)}{2}, \operatorname{tang}\frac{(\sigma-\delta)}{2}, \theta_s\right\} \begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\delta \end{Bmatrix}.$$

Ici encore, une dérivation par rapport à la limite inférieure nous délivrera du signe d'intégration et de la limite supérieure, mais fera apparaître dans les fonctions, selon les cas, la valeur de σ' ou de δ'. Introduisons les valeurs des limites correspondant à notre cas particulier, reprenons les anciennes variables, en remplaçant aussi θ_0 par $2\theta_0$. Soustrayons de nouveau, membre à membre, les deux équations obtenues, l'une de l'autre; nous aurons alors:

$$0 = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} \Big[e^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}(\eta+\theta_0) \cos\theta_0 \cos\theta_s} \operatorname{bes}_0\{2\pi \sin\theta_s \sin\theta_0 \operatorname{tang}(\eta+\theta_0)\} F_p\{\theta_0, \operatorname{tang}(\eta+\theta_0), \theta_s\} +$$
$$+ e^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}(\eta-\theta_0) \cos\theta_0 \cos\theta_s} \operatorname{bes}_0\{2\pi \sin\theta_s \sin\theta_0 \operatorname{tang}(\eta-\theta_0)\} F_p\{\theta_0, \operatorname{tang}(\eta-\theta_0), \theta_s\} \Big]. \tag{7bis}$$

Cette équation doit être vraie pour des valeurs quelconques de θ_0 et des autres variables; par conséquent, les deux équations suivantes doivent également être vraies.

$$F_p(\theta_0, \operatorname{tang}(\eta + \theta_0), \theta_s) = \frac{\text{une non-fonction de } \theta_0}{e^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}(\eta+\theta_0)\cos\theta_0\cos\theta_s} \operatorname{bes}_0\{2\pi \sin\theta_s \sin\theta_0 \operatorname{tang}(\eta + \theta_0)\}}$$

$$F_p(\theta_0, \operatorname{tang}(\eta - \theta_0), \theta_s) = \frac{-\text{ la même non-fonction de } \theta_0}{e^{\pm 2\pi i \operatorname{tang}(\eta-\theta_0)\cos\theta_0\cos\theta_s} \operatorname{bes}_0\{2\pi \sin\theta_s \sin\theta_0 \operatorname{tang}(\eta - \theta_0)\}} \qquad (8\,bis)$$

Ici encore, l'identité de la non-fonction des deux équations, et le signe moins d'une des deux, sont nécessaires pour avoir zéro au premier membre de l'équation (7 *bis*), Mais l'affectation du signe moins à la première ou à la deuxième des équations (8 *bis*) est arbitraire, du moment que la non-fonction de θ_0 est encore à déterminer. Appelons cette fonction Me^{iN}; par le raisonnement que nous avons utilisé déjà, nous aurons:

$$F_p\left(\theta_0, \frac{\rho'}{\lambda}, \theta_s\right) = \frac{Me^{iN}\left(\frac{\rho'}{\lambda}, \theta_s\right)}{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho'_s}{\lambda}\cos\theta_s\cos\theta_0} \operatorname{bes}_0\left\{2\pi \frac{\rho'_s}{\lambda} \sin\theta_s \sin\theta_0\right\}} \qquad (10\,bis)$$

et l'on pourra de nouveau ôter l'apex.

Remarque I. — Lorsque $l = 0$, on devrait avoir $F_p = 0$ (voir remarque II dans paragraphe 3), mais le dénominateur n'est pas infini, ayant seulement la valeur correspondant au point $l = 0$. Par conséquent on doit avoir, lorsque $l = 0$:

$$Me^{iN}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s\right) = 0 \ .$$

Remarque II. — Puisque les équations (10) et (10 *bis*) sans apex doivent donner les mêmes valeurs de F_p, il est:

$$Ae^{iB}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s\right) = Me^{iN}\left(\frac{\rho_s}{\lambda}, \theta_s\right) \quad \text{que j'appelle } Ze^{iT} \ .$$

Remarque III. — Ici encore, on aura, si l'on fait la somme au lieu de la différence:

$$\frac{\partial (V_s - O_s)}{\partial \eta_s} = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} M e^{iN} , \qquad (11\ bis)$$

et pourtant, si l'on multiplie chaque membre de (11) par $\frac{d\theta_s}{dl}$ et chaque membre de (11 *bis*) par $\frac{d\eta_s}{dl}$ et que l'on additionne les deux équations, on aura:

$$\frac{d}{dl}(V_s - O_s) = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} \cdot Z e^{iT} \frac{d}{dl}(\theta_s + \eta_s) . \qquad (12)$$

C'est-à-dire: La différence (V — O) *sur la surface de l'obstacle* a la même dérivée par rapport à θ_s que par rapport à arc tang $\frac{\rho_s}{\lambda}$.

Remarque IV. — L'équation obtenue en vue d'évaluer la fonction arbitraire F_p a été dédoublée en deux équations (complexes) (10) ou (10 *bis*) et (12).

Evaluation de Ze^{iT}.

13. — Si l'on fait l'intégration par parties, de zéro à l, de chaque membre de (12), on obtient:

$$V_s - O_s = \frac{\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} \left\{ (\theta_s + \eta_s) Z e^{iT} - \int_0^l (\theta_s + \eta_s) \frac{d}{dl}(Z e^{iT})\, dl \right\}$$

car lorsque $l =$ zéro, l'expression $(\theta_s + \eta_s) Z e^{iT}$ est nulle (paragraphe 12, remarque I). En même temps, introduisons les valeurs de $(H_1 + F_p)$ qu'on tire de (10) ou de (10 *bis*) (voir paragraphe 3) dans la formule finale de notre première note, qui n'est que l'équation (2) du mémoire présent, mais sans le vecteur unitaire I:

$$V_{r,p} = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\pm 2\pi i \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda}} + \frac{2\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} (Z e^{iT}) \int_{\theta_0 = 0}^{\theta_0 = \pi} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{x - x_s}{\lambda} \cos \theta_0} \operatorname{bes}_0 \left\{ 2\pi \frac{y}{\lambda} \sin \theta_0 \right\}}{\operatorname{bes}_0 \left\{ 2\pi \frac{y_s}{\lambda} \sin \theta_0 \right\}} d\theta_0 . \qquad (13)$$

Employant cette équation pour les points de S en faisant $x = x_s$, $y = y_s$, nous aurons:

$$V_s - O_s = \frac{2\pi i \sqrt{2L}}{\lambda} (Ze^{iT})\, \pi \ .$$

Par comparaison des deux dernières équations qui donnent $(V_s - O_s)$, on aura :

$$2\pi (Ze^{iT}) = (\theta_s + \eta_s) Ze^{iT} - \int_0^l (\theta_s + \eta_s) \frac{d}{dl} (Ze^{iT})\, dl$$

puis, par dérivation par rapport à l:

$$2\pi \frac{d}{dl} (Ze^{iT}) = (Ze^{iT}) \frac{d}{dl} (\theta_s + \eta_s) + (\theta_s + \eta_s) \frac{d}{dl} (Ze^{iT}) - \\ - (\theta_s + \eta_s) \frac{d}{dl} (Ze^{iT}) \ .$$

C'est-à-dire:

$$2\pi \frac{\frac{d}{dl} (Ze^{iT})}{Ze^{iT}} = \frac{d}{dl} (\theta_s + \eta_s) \ ,$$

et l'on peut constater que le deuxième membre est réel. Par conséquent, dans le premier membre les anomalies (phases) du numérateur et du dénominateur doivent être égales, c'est-à-dire qu'aucune d'elles n'est fonction de l. Et si nous appelons C un nombre complexe (qui peut aussi être réel), fonction arbitraire de certains paramètres à l'exclusion de l, on aura:

$$Ze^{iT} = Ce^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}} \ . \qquad (14)$$

Mais cette solution n'est exacte que lorsqu'on en fait usage dans un domaine $(l_2 - l_1)$ suffisamment petit. C'est comme lorsqu'on évalue une surface plane à l'aide de la formule $\int_{x_1}^{x_2} y\, dx$ (y ordonnée cartésienne, x abscisse), car, si les ordonnées n'ont pas toutes le même signe, on pourrait même obtenir comme résultat zéro, ce qui ne ferait pas plaisir à un agricul-

teur ! Or, si l'on se déplace par petits pas le long du contour méridien du corps, on a des angles $\theta_s + \eta_s$ pas trop grands, qui peuvent changer de signe; c'est pour cette raison qu'il ne serait pas indiqué de faire usage de l'intégrale indéfinie (14), sans avoir recours à des limites spéciales et utiles.

En effet, pour un disque mince (qui est encore un corps de révolution), il est aisé de reconnaître, au moyen des équations (13) et (14), qu'en prenant tout simplement pour limites $l = 0$ et $l = l$, on aurait des valeurs identiques sur les faces antérieure et postérieure, si y_s est le même (l n'étant pas le même). Il faut donc distinguer et chercher sur le contour méridien du corps le point où $(\theta_s + \eta_s)$ est maximum [1], en appelant « antérieurs » les points qui précèdent ce point et « postérieurs » les autres points.

Il se peut aussi qu'il existe plusieurs points de $(\theta_s + \eta_s)$ maximum ou minimum, mais nous laisserons cette question de côté. Pour les points antérieurs, les limites seront donc 0 et 1, et on a:

$$Ze^{iT} = C\left\{e^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}\right\},$$

tandis que, pour les points postérieurs, il faudra prendre les limites $l = l$ du max et $l = l$, en faisant aussi usage de la

[1] On peut trouver ce point aisément et avec rigueur, en partant de l'équation de la surface du corps-obstacle en coordonnées polaires:

$$\theta_s = \varkappa(\rho_s) ,$$

car il suffira d'écrire:

$$\varkappa'(\rho_s) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho^2} = 0$$

mais si ρ_s est en tout point plus long que quelques milliers d'ondes, il suffira de tracer de la source punctiforme la tangente au contour, car alors on aura en tout point:

$$\eta_s = \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho_s}{\lambda} = \text{presque } \frac{\pi}{2} .$$

valeur de l'intégrale qu'on obtiendrait séparément pour le point de $(\theta_s + \eta_s)$ max. On aura alors:

$$Ze^{iT} = C\left\{e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} - e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max}\right\} - C\left\{e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}\right\} =$$

$$= C\left\{e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} + e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max}\right\}.$$

Il est facile de voir que cette deuxième valeur est négative. Lorsque $l = 0$, on est sur la face antérieure du disque et il faut employer la première expression, qui est alors justement nulle (paragraphe 12, remarque I).

Evaluation de la fonction C par certaines données caractérisant le corps.

14. — Dans l'intégration que nous venons de faire par rapport à l, C est apparu sous forme de fonction arbitraire. Son expression générale ne peut donc être qu'une fonction de a, de b et des autres paramètres caractérisant le corps. En effet, pour évaluer l'influence de l, nous avons toujours supposé (paragraphes 2 et 8) un corps-obstacle donné et invariable.

Nous pouvons trouver facilement la valeur de C en fonction de certains rayons vecteurs de certains anneaux (réels ou imaginaires) parfaitement obscurs sur la surface S du corps-obstacle. Nous pourrions aussi exprimer ces rayons vecteurs en fonction des paramètres de l'équation ordinaire du corps-obstacle, mais cette équation ne serait peut-être pas résoluble; voici pourquoi, tout en donnant ladite équation, nous n'éliminerons pas les rayons vecteurs des anneaux.

I. Employons l'équation (13) avec les deux valeurs de Ze^{iT}, que nous avons trouvées dans le paragraphe 13, séparément pour les points « antérieur » et « postérieur » de S, en posant

aussi $V_s = 0$ et en distinguant C_a (antérieur) de C_p (postérieur). Dans les deux cas, nous aurons l'équation des anneaux:

$$0 = \frac{1}{\rho_2} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}} + \frac{2\pi i}{\lambda} C_{\substack{a \\ p}} \pi \left\{ \begin{matrix} A \\ P \end{matrix} \right\}, \tag{15}$$

dans laquelle nous désignons par ρ_2 les rayons vecteurs et dans laquelle A et P sont les abréviations suivantes:

$$A = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho_2}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)},$$

$$P = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho_2}{\lambda}\right)} + e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho) + \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho}{\lambda}\right)\max},$$

car maintenant l'intégrale vaut π. On en déduit:

$$\left. \begin{matrix} C_a \\ C_p \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{i}{\rho_2} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}}}{\pi \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \begin{matrix} A \\ P \end{matrix} \right\}}. \tag{16}$$

Comme chaque valeur des deux (C_a ou C_p) doit être unique, cette double équation est l'expression d'une loi de distribution des anneaux sur les faces antérieure et postérieure.

Egaler l'expression complexe (15) à 0 revient à égaler à 0 son module, tandis que son anomalie reste quelconque.

II. Pour les nouvelles inconnues, c'est-à-dire les ρ_2, il faut maintenant avoir une autre équation. Remarquons, à ce sujet, que l'équation (13) n'a d'autre discontinuité que celle des deux valeurs de Ze^{iT} exposées dans le paragraphe 13. Voilà pourquoi les anneaux parfaitement obscurs ne peuvent séparer des régions lumineuses que sans discontinuité. Et ce serait une faute d'exiger que, sur les anneaux, mod V ait une valeur minimum car, du moment que mod V est un nombre réel toujours positif d'une valeur quelconque, si on exigeait qu'il devienne minimum, cela reviendrait à exiger qu'il égale 0, et cette condition a déjà été imposée tout à l'heure.

C'est, au contraire, le module de la dérivée de V qu'il faut annuler, ou cette dérivée elle-même, car lorsqu'un nombre

complexe est nul, son module est 0 et son anomalie quelconque. Ce ne sera donc pas $\frac{d}{d\rho}$ mod V, mais au contraire mod $\frac{dV}{d\rho}$ que nous poserons égal à zéro. En effet, si l'on représente, selon l'usage, les nombres complexes $\xi + i\zeta$ par le vecteur qui va de l'origine des nombres au point $\xi + i\zeta$, sa croissance complexe et infinitésimale dV est également un vecteur ayant la même direction de $\frac{dV}{d\rho}$ et de grandeur mod $\frac{dV}{d\rho} \cdot d\rho$. Lorsque mod $\frac{dV}{d\rho} = 0$, il n'y a donc pas d'accroissement infinitésimal dV.

Introduisons maintenant dans l'équation (13) la valeur de C donnée par l'équation (16) et employons-la de nouveau pour les points antérieurs de S. Nous aurons:

$$\frac{V_{s,1}}{\sqrt{2L}} = \frac{1}{\rho_s} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_s}{\lambda}} - \frac{1}{\rho_2} e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}} \frac{e^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}}{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}}.$$

Pour les points des anneaux, puisque $\rho_s = \rho_2$, cette expression s'annule précisément.

Dérivons-la par rapport à ρ_s en général.

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{dV_{s,1}}{d\rho_s} = \left(-\frac{1}{\rho_s^2} \pm \frac{2\pi i}{\lambda}\right) e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_s}{\lambda}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi\rho_2} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}} \left(\varkappa'(\rho_s) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_s^2}\right) e^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}}}{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}}.$$

Posons maintenant $\rho_s = \rho_2$ et égalons à zéro, pour avoir notre équation.

$$0 = \frac{1}{\rho_2^2} \mp \frac{2\pi i}{\lambda} + \frac{\varkappa'(\rho_2) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_2^2}}{2\pi\rho_2} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda} - \varkappa(\rho_2) - \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)}}. \tag{17}$$

Faisons-en de même pour les points postérieurs; l'équation donnant les ρ_2 est:

$$0 = \frac{1}{\rho_2^2} \mp \frac{2\pi i}{\lambda} +$$

$$+ \frac{\varkappa'(\rho_2) + \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_2^2}}{2\pi\rho_2} \frac{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)}}{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)} + e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}\max}} . \tag{17bis}$$

Quadrature, résultats.

15. — En faisant usage des valeurs de Ze^{iT} et de C, pour avoir F et ensuite des valeurs de $(H_1 + F)$, dans la formule finale de notre premier mémoire, c'est-à-dire l'équation (2) du présent mémoire, on aura:

I. Si la valeur donnée de l (supposée connue) [1], conduit à un point « antérieur » de la surface de l'obstacle, on aura:

$$V_{r,p,1} = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\pm 2\pi i \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda}} -$$

$$- \sqrt{2L} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}}}{\pi\rho_2} \frac{e^{\frac{\theta_s + \eta_s}{2\pi}} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}}{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)}} \int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\pi} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{x - x_s(l)}{\lambda}\cos\theta_0} \operatorname{bes}_0\left\{2\pi\frac{y}{\lambda}\sin\theta_0\right\}}{\operatorname{bes}_0\left\{2\pi\frac{y_s(l)}{\lambda}\sin\theta_0\right\}} d\theta_0 . \tag{18}$$

II. Si, au contraire, la valeur donnée connue de l, correspondant au point x, y de l'espace, conduit à un point « postérieur »,

[1] Dans la troisième région de l'espace l est toujours connue, étant l max.

on aura:

$$V_{r,p,2} = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\pm 2\pi i \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda}} -$$

$$- \sqrt{2L} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{\rho_2}{\lambda}}}{\pi \rho_2} \frac{e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}} + e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max}}{e^{\frac{1}{2\pi}\left(\varkappa(\rho_2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\lambda}\right)} + e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max}} \times$$

$$\times \int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\pi} \frac{e^{\pm 2\pi i \frac{x-x_s(l)}{\lambda}\cos\theta_0} \operatorname{bes}_0\left\{2\pi \frac{y}{\lambda}\sin\theta_0\right\}}{\operatorname{bes}_0\left\{2\pi \frac{y_s(l)}{\lambda}\sin\theta_0\right\}} d\theta_0 . \qquad (18bis)$$

Dans ces formules, x et y sont les coordonnées cartésiennes des points donnés de l'espace (avec l'origine à la source et l'axe de révolution coïncidant avec l'axe des x), $x_s(l)$ et $y_s(l)$ sont les coordonnées du point de la surface S de l'obstacle ayant le même l de (x, y) c'est-à-dire se trouvant sur une même surface d'ondes. Cependant, dans toute la troisième région de l'espace, l a la valeur invariable l max du point du corps ou les ondes quittent à jamais le corps. Si l'on n'utilise que les valeurs numériques de $x_s(l)$ et $y_s(l)$, on n'aura qu'une valeur numérique pour $V_{r,p}$. Mais il est préférable de faire usage des valeurs mathématiques de $x_s(l)$ et $y_s(l)$ en fonction de l, qui introduisent tout de suite dans la formule (18) et (18*bis*) les paramètres et les fonctions caractérisant le corps-obstacle et sa position. e est la base des logarithmes de Neper; π le rapport d'Archimède; i l'unité des nombres imaginaires; L la puissance lumineuse de la source; λ la longueur d'ondes; a et b les coordonnées du point où l'obstacle est touché pour la première fois par les ondes qui arrivent; l l'arc méridien où ce contour coupe l'onde qui passe au point (x, y). Si le point donné de l'espace est près de la surface du corps, on obtient tout de suite une valeur approchée de l.

Les ρ_2 sont aussi des données caractérisant le corps, mais on peut les envisager comme racines des équations (17) et (17*bis*),

que nous avons établies au paragraphe 14. On voit aisément qu'on aura, pour chaque point des anneaux:

$$V_{r,p,1} = V_{r,p,2} = 0 \ .$$

θ_s et ρ_s sont les coordonnées polaires (colatitude et rayon vecteur) des points de la surface S. η_s est une abréviation pour arc tang $\frac{\rho_s}{\lambda}$. Soit l'équation de la surface S en coordonnées polaires:

$$\theta_s = \varkappa(\rho_s) \ .$$

L'usage simultané des coordonnées cartésiennes et polaires apporte quelques simplifications.

16. — Si l'origine des coordonnées n'est pas dans la source lumineuse, il faut déduire, de toutes les abscisses, l'abscisse d de la source (cf. notre premier mémoire). Aussi dans les valeurs de θ_s et de ρ_s.

17. — On peut exécuter au moyen de méthodes approchées l'intégration de l'intégrale contenue dans les équations (18) et (18*bis*). La meilleure méthode [1] consiste à évaluer l'intégrale par les méthodes des surfaces planes, en divisant le domaine (0 à π) de l'intégration en un nombre entier μ de parties égales. Si $h_0, h_1, h_2, \ldots h_\mu$ sont les ordonnées de l'aire dans les points de division, c'est-à-dire les valeurs de la fonction à intégrer, on a, pour la valeur rapprochée de l'intégrale, l'expression:

$$\frac{\pi}{2\mu}(h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_{\mu-1} + h_\mu) \ .$$

[1] La méthode du paragraphe 6 de notre premier mémoire est utilisable, mais elle est tout à fait désavantageuse, car chaque dérivation entraîne une augmentation du nombre des monômes et des fonctions de Bessel et lorsqu'on utilise les valeurs limites sen $\pi = 0$, sen $0 = 0$, ils disparaissent presque tous et néanmoins on n'a qu'une valeur très peu approchée.

Les cas de dégénérescence.

18. — Vérifions quelques cas de dégénérescence. Si le corps est à une distance finie et si l a une valeur quelconque, laissons le corps se rapetisser jusqu'à ce qu'il disparaisse. Les fonctions A et P du paragraphe 14 deviendront zéro. L'équation (15) nous dit que ρ_2 aura un module infini et une anomalie indéterminée. C'est-à-dire que ρ_2 est imaginaire, ayant un module infini sur une surface voisine et infiniment petite. Comme les numérateurs et les dénominateurs des équations (18) et (18*bis*), formés d'exponentielles, égalent zéro, on a justement le cas des ondes sphériques et libres.

19. — Au contraire, si, au lieu de se rapetisser, le corps obstacle s'éloigne de nous jusqu'à l'infini, la première région de l'espace (paragraphe 2) s'étend et va occuper tout l'espace. Nous ne pourrons alors aboutir à aucune conclusion définie. Si nous avons eu recours à ce cas dans notre premier mémoire, c'était parce que nous procédions selon une autre méthode.

20. — Une autre vérification qui devient impossible est celle des cas $x = \infty$, $y = \infty$, car l'exponentielle sous le signe d'intégration ne tend pas vers une limite, cette exponentielle étant exprimée par:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ .$$

Lorsque x croît indéfiniment, $\cos x$ et $\sin x$ ne font que passer de $+1$ à -1 et de -1 à $+1$. Il en est de même de la fonction de Bessel, car

$$\mathrm{bes}_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z \operatorname{sen} \omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z \cos \omega)\, d\omega \ .$$

Lorsque z croît indéfiniment, les lignes trigonométriques de cette deuxième intégrale, sous le signe d'intégration, n'ont pas de limite, mais passent de $\cos(+z)$ à $\cos(-z)$, c'est-à-dire de $+1$ à -1 et de -1 à $+1$. Par cela les formules ne disent plus rien, elles sont illusoires.

Exemples.

21. — Prenons quelques exemples. Pour chaque cas particulier il s'agira seulement d'écrire, sans les résoudre, les formules finales (18) et (18*bis*), l'équation donnant $(\theta_s + \eta_s)$ maximum et l'équation donnant les ρ_2.

22. — Cas de la *sphère* (voir figure 1). Il est préférable de choisir comme variable ε plutôt que l. On aura:

$$l = R\varepsilon\,, \quad a = D - R\,, \quad b = 0\,,$$

$$x_s(l) = D - R\cos\varepsilon\,, \quad y_s(l) = R\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\,,$$

$$\theta_s = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{R\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}{D - R\cos\varepsilon}\,, \quad \rho_s = \sqrt{R^2 + D^2 - 2RD\cos\varepsilon}\,,$$

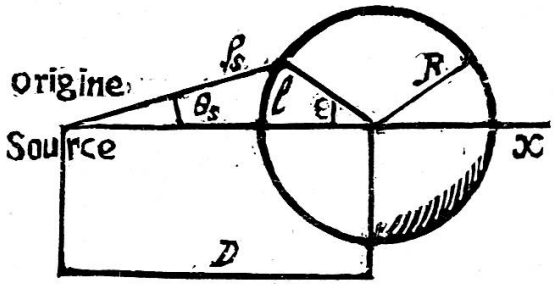

Fig. 1.

qu'il faut introduire dans (18) ou (18*bis*) pour ce cas. En outre,

$$\frac{d\theta_s}{d\varepsilon} = R\,\frac{D\cos\varepsilon - R}{D^2 + R^2 - 2RD\cos\varepsilon}\,;$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\rho_s}{\lambda} =$$

$$= \frac{2\lambda RD\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}{(\lambda^2 + R^2 + D^2 - 2RD\cos\varepsilon)\sqrt{R^2 + D^2 - 2RD\cos\varepsilon}}\,.$$

Pour cette raison, la valeur de ε (appelons-la ε_1) séparant les points antérieurs (équation 18) des points postérieurs (équation (18 *bis*), est donnée par l'équation:

$$\frac{D\cos\varepsilon_1 - R}{\sqrt{R^2 + D^2 - 2RD\cos\varepsilon_1}} + \frac{2\lambda D\,\mathrm{sen}\,\varepsilon_1}{\lambda^2 + R^2 + D^2 - 2RD\cos\varepsilon_1} = 0\,. \tag{19}$$

Mais on obtient une valeur de ε_1 en bonne approximation, au cas où l'obstacle est placé à au moins quelques milliers de λ de la source, en écrivant:

$$\varepsilon_1 = \text{presque arc tang } \frac{\sqrt{D^2 - R^2}}{R},$$

équation obtenue simplement au moyen de la tangente à la sphère menée par la source. Pour avoir aussi l'équation donnant ρ_2, appelons ε_2 la valeur (réelle ou imaginaire) de ε telle qu'on ait:

$$\rho_2 = \sqrt{R^2 + D^2 - 2RD \cos \varepsilon_2} \tag{20}$$

pour la définition des cos des arcs imaginaires, voir: Genocchi-Peano, *Calcolo differenziale*, Turin, Bocca frères éditeurs, 1884, page 215, ou G. Peano, *Calcolo infinitesimale.* On aura alors pour la sphère:

$$\varkappa(\rho_2) = \text{arc tang } \frac{R \text{ sen } \varepsilon_2}{D - R \cos \varepsilon_2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{on a aussi pour les} \\ \text{équations (17) et (17}bis\text{):}\end{array} \quad \varkappa'(\rho_2) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_2^2} = \frac{\dfrac{d\varkappa}{d\varepsilon_2}}{\dfrac{d\rho_2}{d\varepsilon_2}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_2^2}\right),$$

$$A = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\text{arc tg}\frac{R \text{ sen } \varepsilon_2}{D - R\cos\varepsilon_2} + \text{arc tg}\frac{\sqrt{R^2+D^2-2RD\cos\varepsilon_2}}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\text{arc tg}\frac{D-R}{\lambda}},$$

$$P = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\text{arc tg}\frac{R \text{ sen } \varepsilon_2}{D - R\cos\varepsilon_2} + \text{arc tg}\frac{\sqrt{R^2+D^2-2RD\cos\varepsilon_2}}{\lambda}\right)} -$$

$$- 2e^{\frac{1}{2\pi}\left(\text{arc tg}\frac{R \text{ sen } \varepsilon_1}{D - R\cos\varepsilon_1} + \text{arc tg}\frac{\sqrt{R^2+D^2-2RD\cos\varepsilon_1}}{\lambda}\right)} + e^{\frac{1}{2\pi}\text{arc tg}\frac{D-R}{\lambda}}.$$

Il faut introduire ces valeurs particulières (20) de ρ_2 et de $\varkappa'(\rho_2)$ dans l'équation (17) ou (17*bis*) pour obtenir l'équation donnant ε_2; nous obtiendrons ensuite ρ_2 à l'aide de l'équation (20).

23. — Cas du *disque mince* (voir figure 2). Le premier contact des ondes avec l'obstacle se fait sur l'axe. En plus: $a = D$, $b = 0$. En ce même point, mais dans la face postérieure, les ondes cessent de toucher l'obstacle sur cet axe, car, si l'on

emploie l'équation (18*bis*) pour évaluer V sur la face postérieure et dans le centre de cette face, l'intégrale vaut π et $V_{r,p,2}$ n'est pas nul. C'est-à-dire qu'il y a encore de la lumière, sauf aux endroits des anneaux, s'il y en a de réels. Le demi-contour méridien du disque est le double, aller et retour, de la distance

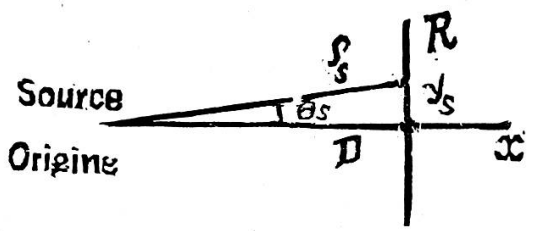

Fig. 2.

du centre de la face antérieure au bord et du bord au centre de la face postérieure. Si l est donné pour un point déterminé de l'espace et si le point du disque pour lequel l a la même valeur se trouve sur la face antérieure, on aura:

$$x_s(l) = \mathrm{D}\ , \quad y_s(l) = l\ , \quad \text{équation (18)}\ ,$$

tandis que si le point du disque caractérisé par le même paramètre l est sur la face postérieure, on aura:

$$x_s(l) = \mathrm{D}\ , \quad y_s(l) = 2\mathrm{R} - l\ , \quad \text{équation (18}bis\text{)}\ .$$

Les points où $(\theta_s + \eta_s)$ est maximum se trouvent au bord, car θ_s et η_s croissent et décroissent simultanément, c'est-à-dire:

$$e^{\frac{\theta_s+\eta_s}{2\pi}\max} = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2}}{\lambda}\right)}\ .$$

Pour obtenir l'équation donnant les ρ_2, appelons y_2 les ordonnées cartésiennes (réelles ou imaginaires) correspondantes. Nous aurons alors:

$$\varkappa(\rho_2) = \operatorname{arc\,tang}\frac{y_2}{\mathrm{D}}\ , \qquad \rho_2 = \sqrt{y_2^2 + \mathrm{D}^2}\ . \qquad (21)$$

On en tirera, pour en faire usage dans l'équations (17) ou (17*bis*):

$$\varkappa'(\rho_2) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho_2^2} = \frac{\dfrac{d\varkappa}{dy_2}}{\dfrac{d\rho_2}{dy_2}} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + (y_2^2 + D^2)}$$

$$A = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y_2}{D} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y_2^2 + D^2}}{\lambda}\right)} - e^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{D}{\lambda}}$$

$$P = e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y_2}{D} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{y_2^2 + D^2}}{\lambda}\right)} - 2e^{\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{D} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{R^2 + D^2}}{\lambda}\right)} + e^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{D}{\lambda}}$$

Nous avons donc toutes les valeurs qu'il faut introduire dans les équations (17) et (17*bis*) pour avoir y_2, et après cela les ρ_2, ce qui nous permettra ensuite de faire usage des équations (18) et (18*bis*).

24. — Cas du *tore à section circulaire* (voir figure 3). Par révolution d'un cercle autour d'un axe de son plan qui ne le

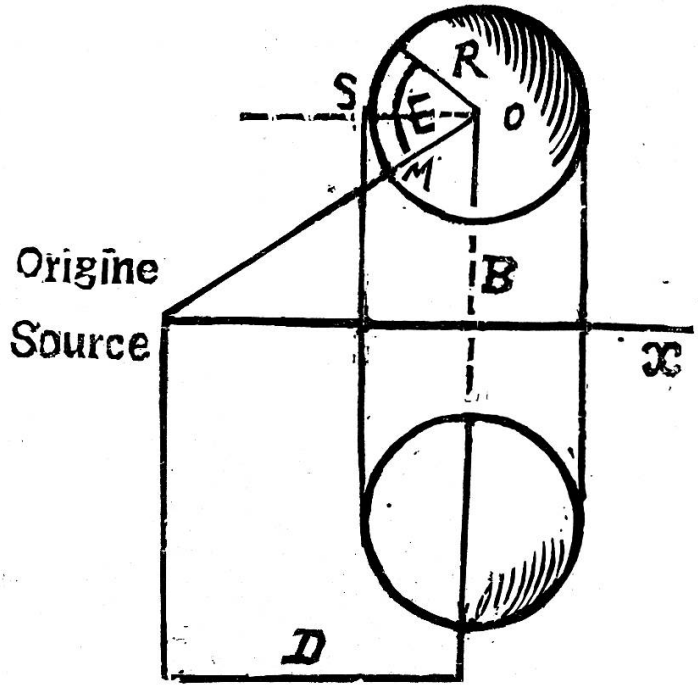

Fig. 3.

coupe pas, on obtient le tore à section circulaire. Ce tore est touché par les ondes pour la première fois au point M sur la

droite passant par la source et par le centre O de la section circulaire. Il est moins facile de dire quel est le point où les ondes quitteront définitivement le tore. L'origine des l est M. Les coordonnées de M sont:

$$a = D - R\frac{D}{\sqrt{D^2 + B^2}}, \qquad b = B - R\frac{B}{\sqrt{D^2 + B^2}}.$$

Comme le point S de la parallèle à l'axe passant par O a les coordonnées (D — R) et B, on a:

$$x_s(l) = D - R + R\cos\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{D}\right),$$

$$y_s(l) = B + R\operatorname{sen}\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tang}\frac{A}{D}\right).$$

Pour obtenir le point où il faut remplacer l'équation (18) par l'équation (18*bis*), il suffira de dériver par rapport à ε et d'égaler à zéro la somme des deux expressions:

$$\theta_s = \operatorname{arc\,tang}\frac{y_s}{x_s} = \operatorname{arc\,tang}\frac{B + R\operatorname{sen}\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tang}\frac{B}{D}\right)}{D - R + R\cos\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tang}\frac{B}{D}\right)} \tag{22}$$

$$\eta_s = \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}{\lambda} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\left[B + R\operatorname{sen}\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{D}\right)\right]^2 + \left[D - R + R\cos\left(\varepsilon - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{D}\right)\right]^2}}{\lambda}. \tag{23}$$

Nous obtiendrons d'une manière presque identique la valeur inconnue ε_2 (réelle ou imaginaire) telle qu'on ait:

$$\rho_2 = \sqrt{\left[B + R\operatorname{sen}\left(\varepsilon_2 - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{D}\right)\right]^2 + \left[D - R + R\cos\left(\varepsilon_2 - \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{D}\right)\right]^2},$$

car nous pouvons écrire les équations (22) et (23) pour ρ_2 et ε_2, ainsi que l'équation (17) ou (17*bis*), qui donnera en premier lieu ε_2. De même pour A et P.

25. — On voit que les cas particuliers des corps de révolution sont faciles à résoudre, sauf la résolution, pour chaque cas

particulier, de l'équation définissant le maximum de $(\theta_s + \eta_s)$ et de celles définissant les ρ_2 des anneaux obscurs.

Aperçu bibliographique.

J. Strutt (Lord Rayleigh) a donné déjà une solution approchée du cas particulier de la sphère rigide et du son, à ondes dont la longueur dépasse de beaucoup le rayon de la sphère (cf. sa *Theory of sound*, 1896, paragraphe 334). Pour le cas de la sphère rigide et du son, à ondes planes beaucoup plus courtes que le rayon de la sphère, J. W. Nicholson, a donné une solution approchée dans son mémoire *On the Diffraction of short Waves by a rigid Sphere*, (Philosophical Magazine, February 1906, p. 193).

La bibliographie est plus riche pour le cas du disque mince. Voir notamment E. Lommel, *Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens, theoretisch und experimentell bearbeitet*, Abhandl. der bayerischen Akad. der Wissenschaften, 1884-1886, p. 229. On trouvera d'autres vérifications expérimentales, des équations données dans ce mémoire, dans Mason E. Hufford et Arnold T. Davis, *La diffraction de la lumière au moyen d'une ouverture circulaire et la théorie des ondes de Lommel* (Physical Review, avril 1929, page 589).

Voir aussi, pour le disque mince et les ondes planes, W. Ignatowsky, *Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen*[1] *und Erwiderung an F. Koettler* (Ann. der Physik, 1925, p. 589).

Pour les ellipsoïdes (non de révolution, mais qui pourront l'être dans des cas particuliers), cf. F. Moeglich, *Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt* (Ann. der Physik, 1927, Bd. 83, p. 609). Le cas d'un corps de révolution quelconque n'a pas encore été traité dans toute sa généralité, pour autant que j'ai pu le voir, sauf dans le travail que voici.

Reggio en Calabre (Italie), ce 29 mai 1937.

M. le prof. E. Cherbuliez, directeur des *Archives*, a eu l'extrême obligeance de revoir mon texte français, ce dont je le remercie vivement.

[1] Plusieurs cas particuliers.