Sur le calcul direct de la vitesse du vent en fonction de l'altitude

Autor(en): **Tiercy, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **19 (1937)**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741874

G. Tiercy. — *Sur le calcul direct de la vitesse du vent en fonction de l'altitude.*

Les équations à résoudre, en faisant abstraction de la rugosité au sol, sont les suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \lambda v &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} - \lambda u &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\,, \end{aligned}\right.$$

où $\lambda = (1{,}0637)\,.\,10^{-4}$, et avec la disposition rétrograde des axes que voici: axe des x dirigé vers l'ouest, axe des y vers le nord.

Il ne paraît pas qu'on ait, jusqu'ici, tenté un calcul direct de la vitesse du vent en altitude, comme M. Ch. Golaz s'est proposé de le faire [1].

Il s'agit de trouver une loi de la vitesse en fonction du niveau z, qui corresponde à peu près aux observations.

Tenons compte de la loi de turbulence:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{d^2\theta}{dz^2}\,,$$

où η/ρ est le coefficient de diffusion tourbillonnaire; les équations du début deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{d^2u}{dz^2} + \lambda v &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\eta}{\rho}\cdot\frac{d^2v}{dz^2} - \lambda u &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\,. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Telles sont les équations à résoudre. Le but de cette note est d'indiquer tout d'abord quelles hypothèses on pourrait raisonnablement admettre pour le coefficient η et pour la variation du gradient de pression, afin de rendre les équations différentielles plus abordables.

[1] C. R., 1937, II, p. 70.

Le coefficient η. — Les valeurs connues expérimentalement sont les suivantes, dans le système kg-m-sec.[1]:

Altitude	1 à 10 m	10 à 100 m	100 à 500 m
η	0,1	1	5 à 10

η est donc une fonction de z, qui prend une valeur nulle au sol, où la surface fixe supprime le mouvement en hauteur.

On peut représenter cette variation par la loi empirique:

$$\eta = 10\left(1 - e^{-\frac{z}{\sigma}}\right) = 10\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) . \qquad (2)$$

Gradient de pression. — Nous choisirons d'abord les axes de façon qu'à chaque niveau l'axe des y soit porté dans la direction du gradient; on aura alors:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\mathrm{G} .$$

Nous poserons ensuite:

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \cdot e^{\mu z} , \qquad (3)$$

où G_0 est le gradient au sol.

Relations auxiliaires. — On a d'abord:

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{RT} , \qquad (4)$$

où $\mathrm{R} = 286{,}83$ unités kg-m-sec.

Rappelons aussi la relation approchée:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \frac{z}{m} = \mathrm{T}_0\left(1 - \frac{z}{m\mathrm{T}_0}\right) ;$$

[1] Voir Koschmieder, *Dynamische Meteorologie*, p. 274.

Voir aussi Baldit, *Météorologie pratique*, p. 205, où l'on donne 7 à 10 pour $z = 300$ m.

et remarquons que si on admet les valeurs $T_0 = 300°$ et $m = 150$, on a $mT_0 = 45.000$ environ; de sorte que l'égalité précédente peut être remplacée par la suivante:

$$T = T_0 \cdot e^{-\frac{z}{45\,000}}, \tag{5}$$

plus commode, et qui présente cet avantage que T n'y devient jamais négatif, quel que soit z; et pour $z = 0$ on a encore:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_0}{45\,000}.$$

D'autre part, on a aussi la relation connue:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{gm}{R}};$$

on en tire, grâce à (4):

$$\frac{1}{\rho} = K \cdot T^{1-\frac{gm}{R}}, \tag{6}$$

en posant:

$$K = \frac{RT_0^{\frac{gm}{R}}}{p_0};$$

et l'on vérifie vite qu'avec $m = 150$, $R = 287$ et $g = 9{,}81$, l'exposant de (6) vaut à très peu près:

$$1 - \frac{gm}{R} \sim -4.$$

En portant (5) dans (6), il vient:

$$\frac{1}{\rho} = K \cdot T_0^{-4} \cdot e^{\frac{4z}{45\,000}}, \tag{7}$$

où K prend une valeur numérique $\sim (6{,}9) \cdot 10^9$ dans le système d'unités kg-m-sec.

Equations différentielles. — Avec les relations (2), (3), (7) et les axes choisis, les équations (1) deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} &8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45\,000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + \lambda v = 0 \\ &8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45\,000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} - \lambda u = 0{,}85\, G_0 \cdot e^{z\left(\mu + \frac{4}{45\,000}\right)} . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si le gradient au sol est exprimé en mm de Hg par degré (γ = nombre de mm par 111,1 km), on obtient:

$$G_0 = \frac{133\,\gamma}{111111} \qquad \text{et} \qquad 0{,}85\, G_0 = 0{,}00102\,\gamma .$$

Tirant alors v de la première des (8) et portant dans la seconde, on trouve:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)^2 \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{1}{45\,000}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)\left(8 + 892\, e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^3 u}{dz^3} \\ &+ \frac{1}{(45\,000)^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)\left(16 - 198916\, e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2 u}{dz^3} + \\ &+ \frac{\lambda}{68 \cdot 10^4} \cdot e^{-\frac{8z}{45\,000}} \cdot u = -\frac{0{,}001\,\gamma}{68 \cdot 10^4} \cdot e^{z\left(\mu - \frac{4}{45\,000}\right)} . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Telle est l'équation dont il s'agit de trouver une solution, au moins approchée.

Le coefficient μ qui figure dans l'exposant du second membre peut être positif ou négatif, mais sa valeur absolue est petite; comme celle-ci change suivant la situation, il est embarrassant de choisir. Nous adopterons la valeur constante $\mu = -\frac{4}{45\,000}$, qui a l'avantage de faciliter le calcul, comme on va le voir. Le second membre de l'équation (9) s'écrit alors:

$$2^{\text{me}} \text{ membre} = -\frac{0{,}001 \cdot \gamma}{68 \cdot 10^4} \cdot e^{-\frac{8z}{45\,000}} ;$$

et l'on aperçoit de suite une solution particulière de (9); c'est l'expression constante:

$$u_1 = -\frac{0{,}001 \cdot \gamma}{\lambda} , \qquad u_1 = -9{,}6\,\gamma .$$

Il faut maintenant chercher la solution générale u_2 de l'équation (9) privée de second membre.

Dans ce but, nous allons simplifier l'équation, en tenant compte du fait que le facteur $\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)$ est compris entre 0 et 1, et en remarquant que le coefficient η atteint pratiquement très vite la valeur moyenne 5; cela nous conduit à remplacer l'exponentielle $e^{-\frac{z}{100}}$ par la valeur constante $1/2$, ce qui revient à adopter l'hypothèse courante $\eta = \text{const.} = 5$.

L'équation (9) devient:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{1}{50} \cdot \frac{d^3u}{dz^4} - \frac{1}{10^4} \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{6{,}3}{10^{10}} \cdot e^{-\frac{8z}{45\,000}} \cdot u = 0 \ , \quad (10)$$

où l'exponentielle qui figure dans le dernier terme du premier membre a toujours une valeur a comprise entre zéro et l'unité.

Nous prendrons, pour continuer le calcul, la valeur $a = 0{,}27$, qui est une sorte de valeur moyenne pour z allant de zéro à 18.000 m environ.

L'équation (10) est alors à coefficients constants; et la solution générale en est:

$$u_2 = \mathrm{A}e^{r_1 z} + \mathrm{B}e^{r_2 z} + \mathrm{C}e^{r_3 z} + \mathrm{D}e^{r_4 z} \ ,$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_1 = -\dfrac{119}{10^5} & r_2 = -\dfrac{2415}{10^5} \\ r_3 = +\dfrac{369}{10^5} & r_4 = +\dfrac{165}{10^5} \ . \end{array} \right.$$

Nous ferons $\mathrm{C} = \mathrm{D} = 0$, afin d'éliminer les termes qui augmentent indéfiniment avec z; de sorte qu'il restera:

$$u_2 = \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{119}{10^5} z} + \mathrm{B}e^{-\frac{2415}{10^5} \cdot z} \ .$$

La solution complète de (9) sera donc:

$$u = u_1 + u_2 \ ,$$

$$u = -9{,}6\gamma + \mathrm{A}e^{-\frac{12}{10^4} z} + \mathrm{B}e^{-\frac{242}{10^4} z} \ . \quad (11)$$

Telle est la formule à utiliser; on y mettra, pour les constantes A et B, des valeurs convenables pour chaque couche atmosphérique (couches de 1.000 m par exemple).

G. Tiercy. — *Sur la variation du gradient de pression avec l'altitude.*

Désignons par (x, y) les axes horizontaux au niveau du sol, et par (X, Y) les axes horizontaux en altitude, l'origine du système (X, Y) étant sur la verticale menée par l'origine du premier système. A chaque niveau, l'axe des Y est porté dans la direction du gradient de pression; il résulte de ce choix que les deux systèmes d'axes ne sont pas forcément parallèles, car les isobares en altitude peuvent ne pas être parallèles aux isobares du niveau inférieur. Nous désignerons par ω l'angle formé par l'axe X avec l'axe x.

D'autre part, nous représenterons la variation de la température absolue T par la relation [1]:

$$T = T_0 \cdot e^{-\frac{z}{45\,000}} = T_0 \cdot e^{-\frac{z}{mT_0}} . \qquad (1)$$

Rappelons maintenant l'égalité bien connue:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{gm}{R}} , \qquad (2)$$

où R est la constante des gaz pour l'air atmosphérique [2]. De (1), on tire:

$$m = \frac{z}{T_0 \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{T_0}{T}\right)} ;$$

[1] Au lieu de $T = T_0 - \frac{z}{m} = T_0\left(1 - \frac{z}{m\,T_0}\right)$; avec $T_0 = 300°$ et $m = 150$, on a l'ordre de grandeur de mT_0, qui est de 45000.

[2] $R = 286{,}8$ dans le système d'unités m, kg, sec.