Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 20 (1938)

Artikel: Essair sur le calcul direct de la vitesse du vent : en fonction de l'altitude
Autor: Tiercy, G. / Golaz, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742933

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ESSAI SUR
LE CALCUL DIRECT DE LA VITESSE DU VENT
EN FONCTION DE L'ALTITUDE

PAR

G. TIERCY et Ch. GOLAZ

(Avec 4 fig.)

Résumé.

En combinant les équations de l'hydrodynamique et l'équation générale de la turbulence, on établit une équation différentielle linéaire du quatrième ordre par rapport à l'altitude z prise comme variable indépendante, et dont la solution doit donner la valeur de la vitesse du vent à chaque niveau. Grâce à la loi admise pour représenter la variation du gradient de pression avec l'altitude, on trouve facilement une solution particulière de l'équation différentielle complète. Ensuite, on établit une solution approchée de l'équation privée de second membre. Il s'agit alors de choisir les constantes d'intégration de façon que la solution générale de l'équation complète réponde aux observations expérimentales. On arrive finalement à une formule relativement simple, donnant, pour un état stationnaire, la vitesse approchée du vent à chaque altitude, jusqu'au niveau de la tropopause.

1. — *Equations à résoudre.* — Si l'on ne tient pas compte de la rugosité du sol, les équations à résoudre sont, comme on sait, les suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \lambda v = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} , \\ \dfrac{dv}{dt} - \lambda u = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} , \end{cases}$$

avec la disposition rétrograde des axes dans laquelle l'axe des x est dirigé vers l'ouest et l'axe des y vers le nord. Ces équations sont valables à toute altitude z, à condition qu'on y porte les valeurs que prennent la densité ρ et le gradient de pression à cette altitude.

Introduisant ici la loi de turbulence:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} ,$$

on obtient les nouvelles équations que voici:

$$\begin{cases} \dfrac{\eta}{\rho} \cdot \dfrac{d^2u}{dz^2} + \lambda v = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} , \\ \dfrac{\eta}{\rho} \cdot \dfrac{d^2v}{dz^2} - \lambda u = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} , \end{cases} \qquad (1)$$

où η/ρ est le coefficient de diffusion tourbillonnaire.

Le facteur η est certainement une fonction de z; d'après les expériences et les mesures faites, Koschmieder [1] donne les valeurs suivantes, exprimées dans le système d'unités m-kg-sec:

Altitude	1 à 10 m	10 à 100 m	100 à 500 m
η	0,1	1	5

Baldit [2] indique 7 à 10 pour une altitude $z = 300$ m. Nous

[1] *Dynamische Meteorologie*, p. 274.
[2] *Etudes élémentaires de Météorologie pratique*, p. 205.

représenterons cette variation par la loi empirique:

$$\eta = 10\left(1 - e^{-\frac{z}{\sigma}}\right) ;$$

et comme η prend rapidement la valeur moyenne 5, nous ferons $\sigma = 100$:

$$\eta = 10\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) ; \qquad (2)$$

c'est là une approximation sans doute insuffisante; mais, dans l'état actuel des choses, il faut s'en contenter.

D'autre part, nous choisirons les axes de coordonnées de telle façon qu'à chaque niveau l'axe des y soit porté dans la direction du gradient; on aura donc constamment:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \qquad -\frac{\partial p}{\partial y} = \mathrm{G} ;$$

les premiers membres des équations différentielles gardent la forme qu'ils ont dans les égalités (1); et celles-ci deviennent, en tenant compte de (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{10}{\rho}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \dfrac{d^2 u}{dz^2} + \lambda v = 0 \\ \dfrac{10}{\rho}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \dfrac{d^2 v}{dz^2} - \lambda u = \dfrac{\mathrm{G}}{\rho} . \end{array} \right. \qquad (3)$$

Tel est le système qu'il faut essayer de résoudre, au moins d'une façon approchée. La densité ρ est fonction de l'altitude z; il en est de même du gradient G, dont nous indiquerons plus loin l'expression choisie.

Remarquons qu'en prenant l'axe des y suivant le gradient de pression et celui des x perpendiculaire au gradient, on ne signifie pas par là que la trajectoire se confondra forcément avec l'isobare, c'est-à-dire que v sera nulle. On sait bien en effet que le vent réel au sol est incliné sur l'isobare, à cause de la rugosité du terrain; il résulte de cette dernière remarque que nos formules en u et v donneront une solution inapplicable au sol même, puisque les équations (3) ne tiennent pas compte de la rugosité en question; tout au plus obtiendrons-nous la

vitesse kilométrique du vent, mais pas sa direction au sol. Dans les conditions où nous nous sommes placés, la composante v doit rester négligeable à côté de u, qui représentera par conséquent la vitesse totale.

2. — *Relations auxiliaires.* — On a d'abord:

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{RT} \ , \tag{4}$$

où R = 286,83 unités du système m-kg-sec; on a aussi:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \frac{z}{m} = \mathrm{T}_0\left(1 - \frac{z}{m\mathrm{T}_0}\right) \ , \tag{5}$$

où T_0 est la température absolue au sol, et m le nombre de mètres dont il faut monter pour voir la température diminuer de 1 degré; si l'on suppose que $\mathrm{T}_0 = 300°$ et $m = 150$, on voit que l'ordre de grandeur de $m\mathrm{T}_0$ est 45000 environ. L'expression précédente de T peut être remplacée par la suivante:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 \cdot e^{-\frac{z}{45000}} \ , \tag{6}$$

qui parait plus convenable, en ce sens que T n'y devient jamais négatif, alors que cela peut se produire avec l'égalité (5) si m est considéré comme constant. Au sol, pour $z = 0$, la variation de T se fait avec la même dérivée $\left(\frac{d\mathrm{T}}{dz}\right)_0 = -\frac{1}{150}$, tant avec (6) qu'avec (5); et la relation (6) présente cet avantage qu'elle peut être conservée.

D'autre part, on connaît la relation:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}\right)^{\frac{gm}{\mathrm{R}}} \ , \qquad \text{où l'on fera } p_0 = 760 \text{ mm};$$

grâce à elle, l'égalité (4) s'écrit:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{RT}_0^{\frac{gm}{\mathrm{R}}}}{p_0} \cdot \mathrm{T}^{1-\frac{gm}{\mathrm{R}}} \ ;$$

ou encore:

$$\frac{1}{\rho} = K \cdot T^{1-\frac{gm}{R}} ,$$

en posant:

$$K = \frac{RT_0^{\frac{gm}{R}}}{p_0} ; \qquad (8)$$

si maintenant on tient compte de (6), l'inverse de ρ devient:

$$\frac{1}{\rho} = K \cdot T_0^{1-\frac{gm}{R}} \cdot e^{-\frac{z}{45000}\left(1-\frac{gm}{R}\right)} . \qquad (9)$$

Posons alors:

$$1 - \frac{gm}{R} = \mathcal{K} ;$$

on voit aisément que cette quantité vaut environ -4; avec $m = 150$, $R = 287$, $g = 9{,}81$, on a en effet:

$$\frac{gm}{R} = 5{,}1 , \qquad \mathcal{K} = (1 - 5{,}1) \sim -4 ;$$

nous écrirons donc:

$$\frac{1}{\rho} = K \cdot T_0^{-4} \cdot e^{+\frac{4z}{45000}} . \qquad (10)$$

Quant au coefficient K, il vaut, dans le système d'unités adopté:

$$K = \frac{RT_0^5}{\rho_0} = \frac{287 \cdot (300)^5}{(1{,}0136) \cdot 10^5} = 68\,805 \cdot (10^5) ,$$

$$K \sim (6{,}9) \cdot 10^9 ; \qquad (11)$$

on a aussi, avec $T_0 = 300$:

$$\frac{10\,K}{T_0^4} = \frac{(6{,}9) \cdot 10^{10}}{(8{,}1) \cdot 10^9} = 8{,}5 . \qquad (12)$$

Enfin, nous poserons:

$$G = G_0 \cdot e^{\mu z} ; \qquad (13)$$

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

s'il arrive que $\mu = 0$, on aura $G = G_0 = \text{const.}$; mais en général μ n'est pas nul; il peut être négatif ou positif, car le gradient peut diminuer ou augmenter avec z, suivant les circonstances [1].

Avec (10), (11), (12) et (13), les équations (3) deviennent:

$$\left\{\begin{array}{l} 8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \dfrac{d^2u}{dz^2} + \lambda v = 0 \\ 8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \dfrac{d^2v}{dz^2} - \lambda u = 0{,}85\, G_0 \cdot e^{z\left(\mu + \frac{4}{45000}\right)} . \end{array}\right. \tag{14}$$

Il ne reste plus qu'à choisir le facteur μ, qui n'est pas forcément une constante, mais qui peut être une fonction de z dépendant des conditions du moment.

Ce nombre μ est petit.

3. — *Variation du gradient avec* z, *calcul de* μ. — Pour bien fixer les idées, désignons par (x, y) les axes horizontaux au sol, et par (X, Y) les axes horizontaux en altitude avec l'origine à la verticale de la station au sol; ces systèmes d'axes ne sont pas forcément parallèles, car les isobares en altitude peuvent

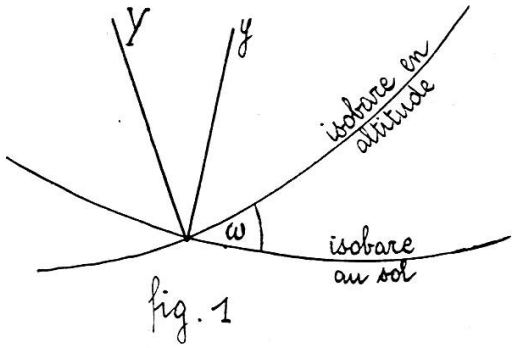


fig. 1

être différentes des isobares au sol (fig. 1); or, on a choisi l'axe des y, à tout niveau, dans la direction du gradient de pression. On a donc:

$$G_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad G = -\frac{\partial p}{\partial Y} .$$

[1] Voir BALDIT, *loc. cit.*, p. 191-192.

De la relation:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{gm}{R}} \tag{15}$$

déjà rappelée plus haut, et en tenant compte de (6), on déduit facilement les égalités suivantes, valables aussi bien dans l'hypothèse où le nombre m reste constant le long de l'isobare au sol que dans le cas où $m(x, y)$ est variable le long de cette courbe:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{p}{p_0} \cdot \dfrac{\partial p_0}{\partial x} + \dfrac{gpz}{RT_0^2} \cdot \dfrac{\partial T_0}{\partial x} \ ; \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{p}{p_0} \cdot \dfrac{\partial p_0}{\partial y} + \dfrac{gpz}{RT_0^2} \cdot \dfrac{\partial T_0}{\partial y} \ ; \end{cases} \tag{16}$$

en effet, l'égalité (6) donne:

$$m = \frac{z}{T_0 \cdot \mathrm{Log}\left(\dfrac{T_0}{T}\right)} \ ,$$

expression qu'il suffit de porter dans les dérivées logarithmiques de (15) par rapport à x et à y. Lorsque $m(x. y)$ est variable, on obtient:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gm}{R}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{T_0} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial x}\right) + \frac{g}{R} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{T}{T_0}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gpz}{RT_0}\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{1}{T_0} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial x}\right) - \frac{gpz}{RT_0} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \ ,$$

qui se réduit à la première des (16), puisque les deux termes contenant $\dfrac{\partial m}{\partial x}$ se détruisent; il en est de même pour $\dfrac{\partial p}{\partial y}$.

Maintenant, puisque le système (X, Y) s'obtient du système (x, y) par une rotation d'un angle ω, on a:

$$\begin{cases} x = X \cos\omega - Y \sin\omega \ , \\ y = X \sin\omega + Y \cos\omega \ ; \end{cases}$$

d'autre part, on a aussi:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{\partial p}{\partial X} dX + \frac{\partial p}{\partial Y} dY \ .$$

Si on admet que $m(x, y) = m = \text{const.}$, l'égalité (15) montre immédiatement que $\omega = 0$, $x = X$ et $y = Y$; comme $\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$ à cause des axes choisis, les équations (16) conduisent dans ce cas aux suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial X} = 0 \ , \qquad \left(\text{avec } \dfrac{\partial T_0}{\partial x} = 0\right) \ , \\ \dfrac{\partial p}{\partial Y} = \dfrac{p}{p_0} \cdot \dfrac{\partial p_0}{\partial y} + \dfrac{gpz}{RT_0^2} \cdot \dfrac{\partial T_0}{\partial y} \ ; \end{array} \right. \tag{17}$$

la seconde s'écrit:

$$G = G_0 \cdot \frac{p}{p_0} - \frac{gpz}{RT_0^2} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial y} \ ; \tag{17'}$$

et l'on voit que G peut être supérieur ou inférieur à G_0 suivant le signe de $\frac{\partial T_0}{\partial y}$.

Si $m(x, y)$ n'est pas constant le long de l'isobare au sol, l'égalité (15) montre que les deux isobares considérées ne sont pas parallèles, c'est-à-dire que $\omega \neq 0$; dans ce cas, $\frac{\partial p}{\partial x}$ n'est pas nul, et la première des (16) s'écrit:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{gpz}{RT_0^2} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial x} \ , \qquad \text{avec } \frac{\partial T_0}{\partial x} \neq 0 \ .$$

De:

$$\frac{\partial p}{\partial X} dx + \frac{\partial p}{\partial Y} dY = \frac{\partial p}{\partial x}[\cos\omega \cdot dX - \sin\omega \cdot dY] + \\ + \frac{\partial p}{\partial y}[\sin\omega \cdot dX + \cos\omega \cdot dY]$$

on déduit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial X} = \cos\omega \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} + \sin\omega \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} \ , \\ \dfrac{\partial p}{\partial Y} = -\sin\omega \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} + \cos\omega \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} \ ; \end{array} \right.$$

et par les égalités (16):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial X} = \dfrac{p}{p_0}\cdot\dfrac{\partial p_0}{\partial y}\sin\omega + \dfrac{gpz}{RT_0^2}\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial x}\cos\omega + \dfrac{\partial T_0}{\partial y}\sin\omega\right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial Y} = \dfrac{p}{p_0}\cdot\dfrac{\partial p_0}{\partial y}\cos\omega + \dfrac{gpz}{RT_0^2}\left(-\dfrac{\partial T_0}{\partial x}\sin\omega + \dfrac{\partial T_0}{\partial y}\cos\omega\right); \end{array}\right. \qquad (17'')$$

comme on doit avoir $\dfrac{\partial p}{\partial X} = 0$, il vient:

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)},$$

valeur de ω à porter dans la seconde des équations (17'').

On peut d'ailleurs écrire, comme le montre la figure 2:

$$\frac{dp}{dY} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2}. \qquad (17''')$$

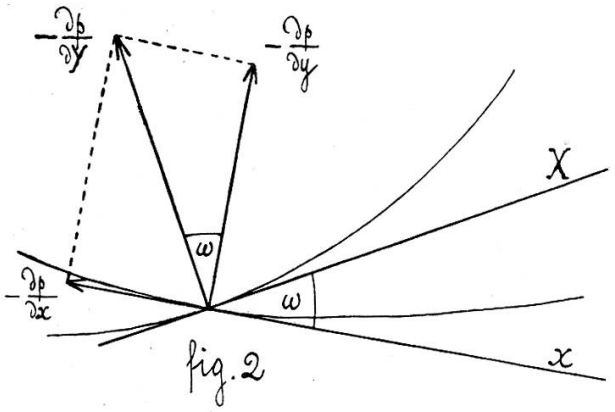


fig. 2

Ainsi, que ce soit par (17'), par (17'') ou par (17'''), on voit que G dépend de z; comme le dernier terme de (17') reste petit à côté du premier, on est conduit à poser l'égalité (13), où μ reste petit en valeur absolue.

Exemple:

Prenons:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = 0\ , \quad m = 160\ , \\ z = 1000\ , \quad T_0 = 283\ , \\ p_0 = 760 \text{ mm Hg}\ ; \\ T_0 \text{ en augmentation suivant } oy \text{ (2°,7 par degré d'arc)}; \\ p_0 \text{ en diminution suivant } Oy \text{ (2 mm par degré d'arc)}; \end{array}\right.$$

le gradient de T_0 est donc compté suivant $-Oy$; celui de p_0 suivant Oy; on trouve:

$$G_0 = 2\text{ mm} \; ; \qquad T = 283 \cdot e^{-\frac{z}{mT_0}} = 283 \cdot e^{-\frac{z}{45000}} \; ;$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{gm}{R}} = \left(e^{-\frac{1}{45}}\right)^{5,47} = e^{-0,12} = 0,887 \; ;$$

$$G = 2 \cdot \frac{p}{p_0} - \frac{1000\, gp}{RT_0^2}(2,7) \; ;$$

$$G = 1,77 - 0,078 = 0,99 \; .$$

Portant ces valeurs de G_0 et G dans (13), on trouve:

$$G = G_0 \cdot e^{\mu z}$$

$$0,5 = e^{1000\,\mu}$$

$$\mu = -\,0,0007 \; .$$

On voit que μ est petit en valeur absolue. En réalité, il est variable avec z; mais, pour une première approximation, il suffira probablement de faire μ constant, en choisissant convenablement sa valeur.

Nous verrons plus loin, au n° 5, comment la résolution de l'équation différentielle du problème sera simplifiée si l'on choisit la valeur $\mu = -\frac{4}{45000} = -\,0,00009$.

4. — *Equation en* u *du 4me ordre.* — De la première des équations (14), on tire, avec $\lambda = (1,0637)\cdot 10^{-4}$:

$$\varphi = -\,8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2u}{dz^2} \; . \qquad (18)$$

d'où les dérivées:

$$-\frac{d\varphi}{dz} = 8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left[\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{4}{45000} + \frac{892}{90000}e^{-\frac{z}{100}}\right) + \frac{d^3u}{dz^3}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)\right], \qquad (19)$$

$$-\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left[\frac{d^4u}{dz^4}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) + \frac{d^3u}{dz^3}\left(\frac{8}{45000} + \frac{892}{45000}e^{-\frac{z}{100}}\right) + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\left(\frac{4}{45000}\right)^2 - \left(\frac{892}{90000}\right)^2 \cdot e^{-\frac{z}{100}}\right)\right] . \qquad (20)$$

Telle est l'expression à porter dans la seconde des équations (14). Dans le second membre de celle-ci, le gradient G_0 doit être exprimé en unités du système m-kg-sec.; or, on donne généralement le gradient de pression en mm de Hg par degré d'arc de grand cercle; soit γ ce nombre; on en tire:

$$G_0 = \frac{133\,\gamma}{111\,111} \qquad \text{et} \qquad 0{,}85\,G_0 = 0{,}00102\,\gamma\ .$$

Divisant alors toute la seconde équation (14) par le facteur $\left(-68\cdot 10^4\cdot e^{\frac{8z}{45000}}\right)$, on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(1-e^{-\frac{z}{100}}\right)^2\cdot\frac{d^4u}{dz^4}+\frac{1}{45000}\left(1-e^{-\frac{z}{100}}\right)\left(8+892\cdot e^{-\frac{z}{100}}\right)\cdot\frac{d^3u}{dz^3}\\ &+\frac{1}{(45\,000)^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{z}{100}}\right)\left(16-198\,916\,e^{-\frac{z}{100}}\right)\cdot\frac{d^2u}{dz^2}\\ &+\frac{\lambda}{68\cdot 10^4}\cdot e^{-\frac{8z}{45000}}\cdot u=-\frac{0{,}001\cdot\gamma}{68\cdot 10^4}\cdot e^{z\left(\mu-\frac{4}{45000}\right)}\ . \end{aligned}\right. \qquad (21)$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer, au moins approximativement; elle résulte des expressions admises pour représenter les valeurs de η (formule 2) et G (formule 13).

5. — *Solution particulière de* (21). — Comme nous l'avons annoncé à la fin du n° 3, nous choisirons pour μ la valeur constante:

$$\mu = -\frac{4}{45000}\ .$$

Le second membre de (21) devient ainsi:

$$2^{\text{me}}\ \text{membre} = -\frac{0{,}001\cdot\gamma}{68\cdot 10^4}\cdot e^{-\frac{8z}{45000}}\ . \qquad (22)$$

On aperçoit alors immédiatement une solution particulière de l'équation, sous la forme d'une constante u_1:

$$u_1 = -\frac{0{,}001\cdot\gamma}{\lambda} = -\frac{10\cdot\gamma}{1{,}06} = -9{,}6\,\gamma\ . \qquad (23)$$

Il ne reste donc plus qu'à chercher la solution générale u_2 de l'équation (21) privée de second membre.

Dans ce but, nous simplifierons l'écriture du premier membre, comme il est indiqué au numéro suivant.

6. — *Equation sans second membre simplifiée.* — Tenant compte du fait que le facteur $\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)$ est toujours compris entre 0 et 1, et que la quantité $\eta = 10\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right)$ atteint très vite (vers cent mètres déjà) la valeur moyenne 5, nous remplacerons l'exponentielle $e^{-\frac{z}{100}}$ par la valeur constante $\frac{1}{2}$; cela revient à adopter après coup l'hypothèse $\eta = \text{const.} = 5$.

L'équation (21) se transforme alors en la suivante:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{1}{50}\cdot\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{0{,}98}{10^4}\cdot\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{6{,}3}{10^{10}}\cdot e^{-\frac{8z}{45000}}\cdot u = 0 \ . \qquad (24)$$

D'ailleurs, on remarque que $e^{-\frac{8z}{45000}}$ reste aussi comprise entre l'unité (pour $z = 0$) et zéro (pour $z = \infty$); donnons donc à cette exponentielle une valeur a comprise entre 0 et 1, et que nous choisirons convenablement plus loin [1]. On a:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{1}{50}\cdot\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{1}{10^4}\cdot\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{6{,}3\,a}{10^{10}}u = 0 \ . \qquad (25)$$

Telle est l'équation simplifiée; elle est à coefficients constants, et sera résolue en posant $u = e^{rz}$.

7. — *Résolution de l'équation* (25). — L'équation en r est la suivante:

$$r^4 + \frac{1}{50}r^3 - \frac{1}{10^4}r^2 + \frac{6{,}3\,a}{10^{10}} = 0 \ . \qquad (26)$$

La décomposition du polynôme du premier membre en un produit de deux trinômes du second degré donne:

$$(r^2 + \alpha r + \beta)(r^2 + \alpha' r + \beta') =$$
$$= r^4 + r^3(\alpha + \alpha') + r^2(\beta + \beta' + \alpha\alpha') + r(\alpha'\beta + \alpha\beta') + \beta\beta' \ ;$$

[1] La valeur moyenne de l'exponentielle, entre $z = 0$ et $z = 18000$, est 0,3 environ.

en identifiant cette expression au premier membre de (26), on obtient les relations:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = \dfrac{1}{50} , \\ \beta + \beta' + \alpha\alpha' = -\dfrac{1}{10^4} , \\ a'\beta + \alpha\beta' = 0 , \\ \beta\beta' = \dfrac{6{,}3\,a}{10^{10}} . \end{cases} \tag{27}$$

La dernière de ces égalités montre que β et β' sont de même signe; la troisième relation indique alors que α et α' sont de signes contraires; cette troisième équation s'écrit aussi:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = -\frac{\beta}{\beta'} ; \tag{28}$$

si donc $|\alpha| > |\alpha'|$, il faut que $|\beta| > |\beta'|$.

Par la première égalité (27), on voit encore que, si $|\alpha| > |\alpha'|$, c'est α qui est positif, tandis que α' est négatif.

Ecrivons (28) comme suit, où n désigne un nombre essentiellement positif:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = -\frac{\beta}{\beta'} = n ; \tag{29}$$

c'est-à-dire que:

$$\begin{cases} \alpha = -n\alpha' , \\ \beta = n\beta' , \end{cases} \tag{30}$$

où l'on supposera que $|\alpha| > |\alpha'|$, et par conséquent $\alpha > 0$. Les égalités (27) se transforment en les suivantes, la troisième étant remplacée par (29):

$$\begin{cases} \alpha'(1 - n) = \dfrac{1}{50} , \\ \beta'(1 + n) - n\alpha'^2 = -\dfrac{1}{10^4} , \\ n\beta'^2 = \dfrac{6{,}3\,a}{10^{10}} . \end{cases} \tag{31}$$

Il y a quatre lettres dans ces expressions: α', β', a et n. On procédera comme suit: choisissant une valeur pour n, on trouvera α' et β' par la première et la troisième équation (β' en fonction de a); portant ces valeurs dans la seconde des (31), on trouvera la valeur correspondante à adopter pour a, si toutefois elle est admissible.

Par exemple, pour $n = 2$, il vient $a = 441$, ce qui est manifestement inadmissible, puisque a doit rester entre 0 et 1.

Nous adopterons les valeurs suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} n = 9\ , \qquad \alpha' = -\dfrac{2{,}5}{10^3}\ , \qquad \beta' = \dfrac{0{,}84\sqrt{a}}{10^5} \\ \qquad\qquad \sqrt{a} = -0{,}52\ ; \qquad a = 0{,}27\ ; \end{array}\right.$$

la valeur $a = 0{,}27$ est à peu près la moyenne des valeurs que prend l'exponentielle entre $z = 0$ et $z = 18000$.

On en tire:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha' = -\dfrac{2{,}5}{10^3}\ , \qquad \beta' = -\dfrac{0{,}44}{10^5}\ , \\ \alpha = +\dfrac{2{,}25}{10^2}\ , \qquad \beta = -\dfrac{3{,}96}{10^5} \sim -\dfrac{4}{10^5}\ ; \end{array}\right.$$

de sorte que l'équation (26) devient:

$$\left(r^2 - \frac{2{,}5}{10^3}r - \frac{0{,}44}{10^5}\right)\left(r^2 + \frac{2{,}25}{10^2}r - \frac{4}{10^5}\right) = 0\ , \qquad (32)$$

dont les racines sont:

$$\left\{\begin{array}{ll} r_1 = -\dfrac{119}{10^5}\ , & r_3 = +\dfrac{369}{10^5}\ , \\ r_2 = -\dfrac{2415}{10^5}\ , & r_4 = +\dfrac{165}{10^5}\ . \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (25) est:

$$\frac{u_2}{\gamma} = Ae^{r_1 z} + Be^{r_2 z} + Ce^{r_3 z} + De^{r_4 z}\ , \qquad (33)$$

où r_3 et r_4 sont des nombres positifs. Nous choisirons tout de suite $C = D = 0$, afin de faire disparaître les termes qui deviennent infinis avec z. Il reste donc:

$$u_2 = \gamma \cdot Ae^{-\frac{119}{10^5}z} + \gamma \cdot Be^{-\frac{2415}{10^5}z}, \qquad (34)$$

avec deux constantes seulement à déterminer.

8. — *Solution correspondante de l'équation* (21) *avec second membre.* — On a:

$$u = u_1 + u_2,$$

$$u = -9{,}6\gamma + \gamma Ae^{-\frac{12}{10^4}z} + \gamma Be^{-\frac{242}{10^4}z}, \qquad (35)$$

où γ exprime le gradient de pression au sol sous forme de différence millimétrique de colonne de mercure par degré d'arc.

Telle est la formule que nous allons adopter; la composante u y prend une valeur négative, à cause de la disposition des axes.

Quant à la composante v, elle est nulle au sol, dans les conditions du problème, comme il est facile de s'en rendre compte (voir n° 9).

De (35) on tire:

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{du}{dz} = Ar_1e^{r_1z} + Br_2e^{r_2z}, \qquad (36)$$

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d^2u}{dz^2} = Ar_1^2e^{r_1z} + Br_2^2e^{r_2z}, \qquad (37)$$

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d^3u}{dz^3} = Ar_1^3e^{r_1z} + Br_2^3e^{r_2z}. \qquad (38)$$

La présence du facteur $8\cdot10^4$ dans l'expression (18) de v engage à poser aussi $B = 0$, car $r_2^2 = \frac{585{,}64}{10^6} \sim \frac{5{,}9}{10^4}$.

9. — *Composante v.* — L'expression (18) montre que $v = 0$ si $z = 0$, puisqu'alors la parenthèse du second membre s'annule.

Pour $z \neq 0$, la composante v n'est plus rigoureusement nulle; mais elle doit rester petite à côté de u (voir le n° 15).

On tire de (18) la dérivée:

$$\frac{d\varphi}{dz} = -8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}} \left[\frac{d^2u}{dz^2} \left(\frac{4}{45000} + \frac{892}{90000} e^{-\frac{z}{100}} \right) + \frac{d^3u}{dz^3} \left(1 - e^{-\frac{z}{100}} \right) \right] . \tag{39}$$

Les relations (36) à (39) montrent que $\frac{du}{dz}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$ s'annulent pour $z = \infty$; dans (39), l'influence des exposants $r_1 z$ et $r_2 z$ l'emporte sur celle de l'exposant $\frac{4z}{45000}$; on a d'ailleurs fait $B = 0$.

10. — *Choix de la constante* A. — L'expérience indique, pour la vitesse en altitude, l'échelle approximative suivante:

z	50	100	500	600	1000	2000	3000	4000	5000	6000
vit.	4,5	6,4	8,0	8,15	8,4	8,6	8,9	9,1	9,4	9,9-10

(40)

qui correspond à un gradient $\gamma = 1$ au sol.

Nous admettrons d'autre part qu'au sol même on a une vitesse nulle $u = 0$.

Il faut ajouter que, très vite au-dessus du sol, on doit trouver les valeurs expérimentales, de l'ordre de 8 mètres, comme l'indique le tableau (40).

Ecrivons:

$$\frac{u}{\gamma} = -9{,}6 + A \cdot e^{-\frac{12}{10^4} z} , \tag{41}$$

expression indiquant que la vitesse u est proportionnelle au gradient [1].

Si l'on fait $z = 0$, on trouve:

$$0 = -9{,}6 + A ,$$

$$A = 9{,}6 ;$$

ainsi, on aurait:

$$\frac{u}{\gamma} = -9{,}6 + 9{,}6 \cdot e^{-\frac{12}{10^4} z} ; \tag{42}$$

[1] Voir à ce sujet: BALDIT, *Etudes élémentaires de Météorologie pratique*, p. 182 et 186.

cette expression satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} z = 0 & |u| = 0 \quad |\varphi| = 0 \\ z = \infty & \dfrac{du}{dz} = \dfrac{d\varphi}{dz} = 0 \ . \end{cases}$$

Par contre, avec d'autres valeurs de z, on trouve:

z	1000	2000	3000	6000	$z > 6000$
u/γ	— 6,72	— 8,74	— 9,34	— 9,6	const. = — 9,6

La solution (42), quoique répondant aux conditions rappelées plus haut, n'est pas satisfaisante numériquement pour les altitudes jusqu'à 2000 mètres ou supérieures à 5000 mètres.

11. — *Retouche à la solution* (41)-(42). — Il est entendu que dans (41):

$$\frac{u}{\gamma} = - 9{,}6 + A \cdot e^{-\frac{12}{10^4} z}$$

la valeur trouvée A = 9,6 est valable pour la couche atmosphérique très inférieure; mais cette valeur de $\frac{u}{\gamma}$ augmente trop lentement avec z. Il est bien évident que si on applique l'équation générale ci-dessus à une autre couche connue, on trouvera pour A une autre valeur; il n'y a rien là d'étonnant, puisque les conditions ont quelque peu changé avec l'altitude, notamment η et μ, alors que nous avons adopté η et μ constants, il en est de même avec la quantité m.

En conséquence, nous allons procéder un peu comme on le fait dans la détermination des éléments d'orbites; la valeur de A trouvée au nº 10 est valable pour une première couche atmosphérique, de $z = 0$ à $z = 50$ par exemple, dans laquelle A est considéré comme constant; après cet accroissement d'altitude Δz, en passant à la couche suivante, A subit une variation ΔA, et la nouvelle valeur $A + \Delta A$ régit le phénomène à travers cette seconde couche; et ainsi de suite.

Dans chacune des couches envisagées, le coefficient A étant

considéré comme constant, l'équation (25) est satisfaite et les conditions aux limites sont vérifiées.

Il s'agit donc de rechercher comment varie le nombre A lorsque z augmente. Avec le tableau (40), on trouve:

$z =$ 0	A = 9,60
50	0,94 A = 5,10
100	0,89 A = 3,40
500	0,55 A = 1,60
800	0,38 A = 1,30
1000	0,30 A = 1,20
2000	0,091 A = 1,00
3000	0,027 A = 0,70
4000	0,008 A = 0,50
5000	0,0025 A = 0,20
5500	0,0014 A = 0
6000	0,00075 A = — 0,30

d'où le tableau suivant:

z	0	50	100	500	800	1000	2000	3000	4000	5000	5500	6000	$z > 6000$
A	9,6	5,4	3,8	3,0	3,4	4,0	11,0	25,9	62,5	80	0	— 400	nég.

On en déduit le graphique ci-joint (fig. 3).

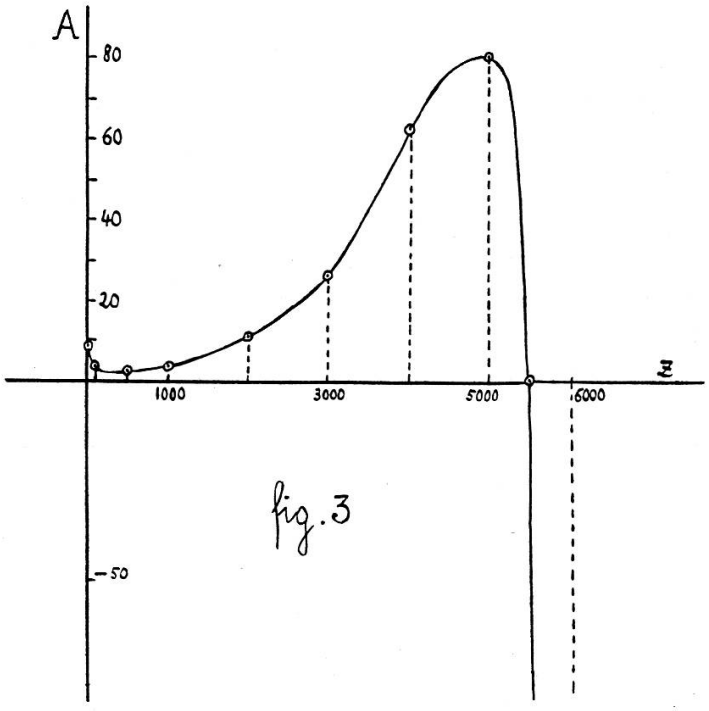


fig. 3

Cette courbe tient compte des changements dans les conditions physiques (μ, η, m) avec l'altitude; elle suffit pour toutes les applications jusqu'à 6000 mètres de hauteur.

Pour $z > 6000$, il faudra extrapoler, puisque les renseignements expérimentaux manquent presque totalement.

12. — *Grandes altitudes.* — Lorsque z augmente indéfiniment, comme il faut que $\frac{du}{dz} = 0$, on peut prévoir que le facteur A changera de valeur suivant la formule:

$$A = -\mathfrak{A} \cdot e^{\frac{12}{104}z} ; \qquad (43)$$

on le voit facilement, étant donné le calcul numérique de A par l'égalité (41) pour différentes altitudes; on a:

$$A \cdot e^{-\frac{12}{104}z} = x = \frac{u}{\gamma} + 9{,}6 ;$$

il s'ensuit que la valeur de A est donnée par:

$$A = x \cdot e^{\frac{12}{104}z}, \qquad x = -\mathfrak{A} , \qquad (43')$$

où x est négatif dès $z = 5500$ mètres; c'est la forme (43).

Le nombre x peut croître en valeur absolue jusqu'à une certaine valeur limite, car il est bien évident que la vitesse effective du vent ne devient pas infinie. En admettant que, pour un gradient au sol égal à $\gamma = 1$ mm, $\frac{u}{\gamma}$ prenne une valeur égale à -20 environ au niveau inférieur de la tropopause, c'est-à-dire à une altitude de 12 à 14 km dans nos régions [1], on voit que $|x| = \mathfrak{A}$ augmentera jusqu'à 10 environ pour le niveau en question. Mais on voit bien aussi que les valeurs numériques successives de $\mathfrak{A}$ dépendent de la façon dont se suivent les valeurs croissantes de $\left|\frac{u}{\gamma}\right|$.

[1] Au-dessus de la tropopause, on trouve la loi stratosphérique des vents d'ouest décroissants avec l'altitude croissante.

On ne possède d'indications expérimentales que jusqu'à 6000 mètres d'altitude. A partir de là, on sait bien que $\left|\frac{u}{\gamma}\right|$ continue à croître au-dessus de 10 jusqu'à 20 en tout cas; mais on ne sait rien de la loi de cette croissance.

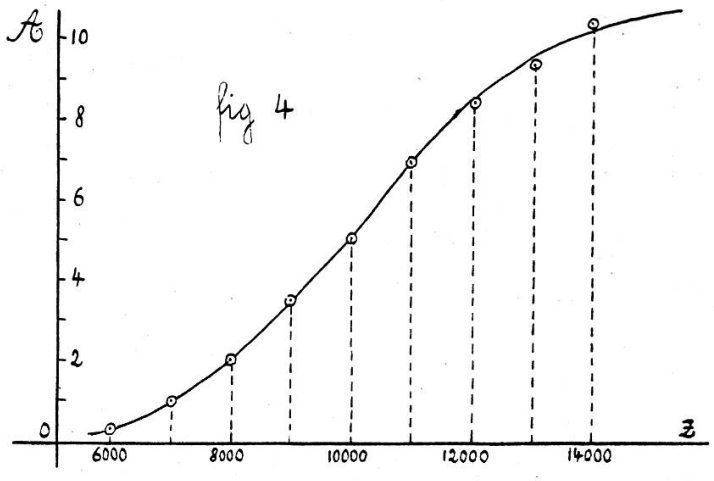
Nous admettrons, pour fixer les idées, la répartition approximative suivante:

z	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000
$\frac{u}{\gamma}$	— 9,9	— 10,6	— 11,6	— 13,1	— 14,6	— 16,6	— 18,0	— 19,0	— 20,0

d'où un tableau des valeurs de $\mathfrak{A}$ et A:

z	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	140
$\mathfrak{A} = \lvert x \rvert$	+ 0,3	+ 1	+ 2	+ 3,5	+ 5	+ 7	+ 8,4	+ 9,4	+ 1
$e^{\frac{12}{10^4}z}$	1339,4	4447,1	14765	$4{,}9 \cdot 10^4$	$1{,}6 \cdot 10^5$	$5{,}4 \cdot 10^5$	$1{,}8 \cdot 10^6$	$5{,}95 \cdot 10^6$	2.1
A	$-4 \cdot 10^2$	$-4{,}45 \cdot 10^3$	$-2{,}95 \cdot 10^4$	$-1{,}7 \cdot 10^5$	$-8 \cdot 10^5$	$-3{,}8 \cdot 10^6$	$-1{,}4 \cdot 10^7$	$-5{,}2 \cdot 10^7$	$-1{,}8$

Ce tableau donne, pour la variation de $\mathfrak{A}$ la courbe de la figure 4.



Cette courbe est représentée d'une manière suffisamment correcte par l'équation:

$$\mathfrak{A} = 24{,}2 \cdot e^{-\frac{a}{z^2}}, \qquad \text{avec} \quad a = 158 \cdot 10^6, \qquad (44)$$

valable dès $z = 6000$; on a en effet:

z	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000
$\mathfrak{A}$ (tableau)	0,3	1	2	3,5	5	7	8,4	9,4	10,4
$\mathfrak{A}$ (44)	0,3	0,97	2,06	3,44	5	6,53	8,07	9,44	10,8

Ainsi l'on aura, pour les altitudes supérieures à 6000 mètres:

$$\frac{u}{\gamma} = -9{,}6 - \mathfrak{A} \ ;$$

$$\frac{u}{\gamma} = -9{,}6 - 24{,}2 \cdot e^{-\frac{158 \cdot 10^6}{z^2}} \ . \qquad (45)$$

Avec cette relation, $\frac{u}{\gamma}$ prend la valeur -20 au niveau de la tropopause (72 km à l'heure); il n'est pas indiqué d'appliquer la formule (45) à des altitudes supérieures à celle de la tropopause; remarquons cependant qu'en y faisant z infini, la formule donne pour $\frac{u}{\gamma}$ une valeur limite de $-33{,}8$.

Ainsi la dérivée $\frac{du}{dz}$ tend vers zéro lorsque z augmente indéfiniment dans (45). C'était déjà le cas, rappelons-le, avec l'égalité (41); il ne faut pas perdre de vue que l'expression (45) provient de l'écriture plus complète:

$$\frac{u}{\gamma} = -9{,}6 - \left(\mathfrak{A} \cdot e^{+\frac{12}{10^4}z}\right) \cdot e^{-\frac{12}{10^4}z} \ ,$$

où le coefficient entre paranthèses est traité, dans chaque couche, comme une constante.

13. — *Vitesse aux faibles altitudes.* — La solution (41) indique, pour les hauteurs très faibles, les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} z = 10 \text{ mètres} \ , & \frac{u}{\gamma} = 1 \\ z = 50 \quad \text{»} \ , & \frac{u}{\gamma} = 4{,}5 \\ z = 100 \quad \text{»} \ , & \frac{u}{\gamma} = 6{,}3 \ ; \end{cases}$$

il va sans dire que tout près du sol, pour $z = 10$, la solution n'est pas applicable, puisqu'on a négligé la rugosité du sol. Mais on constate qu'à 40 ou 50 mètres d'altitude, $\left|\frac{u}{\gamma}\right|$ vaut à peu près 4, ce qui est conforme aux mesures effectuées à ce niveau; on sait en effet que le vent réel au sol possède une vitesse valant à peu près -4γ.

14. — *Remarque.* — Adoptant l'idée de Prandtl et Tollmien pour tenir compte de la rugosité du sol, M. Ch. Golaz [1] a calculé trois tableaux à double entrée donnant la vitesse V en altitude z; l'un des arguments est le suivant:

$$\frac{\mathcal{G}}{2\omega'} = \frac{\mathcal{G}}{\lambda}, \qquad \text{où} \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}.$$

On a donc: $\mathcal{G} = \frac{G}{\rho}$.

Or, dans le présent travail, nous avons posé:

$$G = G_0 \cdot e^{\mu z} \qquad \left(\mu = -\frac{4}{45000}\right),$$

$$G_0 = \frac{133\,\gamma}{111\,111} = 0{,}00102\,\gamma = 10^{-3}\cdot\gamma.$$

Pour de petites valeurs de z, on peut considérer G comme restant pratiquement égal à G_0; et il vient:

$$\frac{\mathcal{G}}{\lambda} = \frac{G}{\lambda\rho} = \frac{G_0}{\lambda\rho} = \frac{10^{-3}\cdot\gamma}{1{,}0637\,.\,10^{-4}\cdot\rho} = \frac{9{,}40\,\gamma}{\rho} = \frac{9{,}40\,\gamma}{1{,}293};$$

de sorte que, *pour* $\gamma = 1$, on a:

$$\frac{\mathcal{G}}{\lambda} = 7{,}27.$$

L'argument du second tableau de Golaz vaut $\frac{\mathcal{G}}{\lambda} = 10$; et ce deuxième tableau donne, pour $z = 100$ mètres, des valeurs un peu supérieures à celle que nous avons trouvée; un tableau calculé pour $\frac{\mathcal{G}}{\lambda} = 7{,}27$ conduirait à des nombres comparables à $-6{,}5$ pour $z = 100$, avec une faible rugosité du sol.

[1] *Suppl. aux Archives*, 1937, vol. 54, nº 2.

15. — *Commentaires sur la composante* v. — La composante v doit rester pratiquement nulle à toute altitude; c'est là une conséquence du choix des axes et des conditions du problème. Nous nous proposons de voir si cette exigence est satisfaite, ou peut l'être, au moins approximativement.

Il y a deux manières de calculer v; ou bien par la première des équations (14):

$$\frac{v}{\gamma} = -8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{1}{\gamma} \ , \qquad (46)$$

ou bien par la seconde de ces équations:

$$8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = \lambda u + 0{,}85\, G_0 \cdot e^{z\left(\mu + \frac{4}{45000}\right)} \ ,$$

c'est-à-dire, avec $\mu = -\frac{4}{45000}$, $(0{,}85) \cdot G_0 = 0{,}00102\,\gamma$ et $\lambda = (1{,}0637) \cdot 10^{-4}$:

$$8{,}5 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = \lambda u + 0{,}001\,\gamma \ . \qquad (47)$$

16. — *Calcul au moyen de* (46). — C'est le plus simple; on obtient:

$$\frac{v}{\gamma} = -8 \cdot 10^4 \cdot e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot A r_1^2 \cdot e^{r_1 z} \ ,$$

$$\frac{v}{\gamma} = -e^{\frac{4z}{45000}}\left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right) \cdot (0{,}1152\,A)\, e^{r_1 z} \ , \qquad (48)$$

où $r_1 = -\frac{12}{10^4}$ et $r_1^2 = \frac{1{,}44}{10^6}$. La constante A a déjà été utilisée et adoptée pour satisfaire aux conditions de la composante u; on ne dispose donc plus d'aucune constante arbitraire pour v.

Malgré cela, l'équation (48) donne pour v des valeurs absolues relativement petites par rapport à celles de u. Au sol même, on trouve $v = 0$, puisque la parenthèse de (48) est nulle. Plus haut, (48) donne:

z	50	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	5500	6000
v/γ	— 0,24	— 0,25	— 0,20	— 0,15	— 0,14	— 0,11	— 0,08	— 0,04	0	+ 0,06

On constate que φ ne représente jusqu'ici qu'un petit pourcentage de la valeur de u:

z	50	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	5500	6000
% de u/γ	5%	4%	2,5%	2%	1,6%	1,2%	0,9%	0,4%	0%	0,6%

Ces résultats sont encore réduits en valeur absolue, du moins à partir de 500 mètres d'altitude, si l'on adopte, comme on l'a fait pour la résolution de l'équation en u, les valeurs moyennes suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour } \left(1 - e^{-\frac{z}{100}}\right), \text{ la valeur } 0{,}5 \ ; \\ \text{pour } e^{-\frac{8z}{45000}}, \text{ la valeur } a = 0{,}27 \ , \\ \text{ce qui correspond à } 0{,}52 \text{ pour } e^{-\frac{4z}{45000}} . \end{array}\right. \tag{49}$$

On trouve alors:

z	50	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	5500	6000
$\frac{\varphi}{\gamma}$	— 0,60	— 0,41	— 0,20	— 0,14	— 0,12	— 0,09	— 0,06	— 0,026	0	+ 0,034

Dans ces conditions, on peut dire que, jusqu'à 6000 mètres en tout cas, la composante φ reste pratiquement très petite et négligeable à côté de u.

Si maintenant on considère des altitudes supérieures à 6000 mètres, on a, avec les valeurs (49) et l'égalité (43):

$$\frac{\varphi}{\gamma} = - 8 \cdot 10^4 \cdot \mathrm{A} r_1^2 \cdot e^{r_1 z} = - 8 \cdot 10^4 \left[- \mathfrak{A} \cdot r_1^2 \right]$$

où $\mathfrak{A}$ est donné par (44); d'où:

$$\frac{\varphi}{\gamma} = 8 \cdot 10^4 \cdot \frac{(1{,}44)}{10^6} \cdot (24{,}2) \cdot e^{-\frac{a}{z^2}}, \qquad (a = 158 \cdot 10^6) \ ;$$

$$\frac{\varphi}{\gamma} = 2{,}79 \cdot e^{-\frac{a}{z^2}} = 0{,}115\, \mathfrak{A} \ , \tag{50}$$

expression qui fournit pour 6000 m la valeur + 0,034, faisant le raccord avec le tableau précédent.

On trouve ensuite par (50):

z	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	∞
v/γ	0,11	0,23	0,40	0,58	0,80	0,97	1,08	1,20	2,79
u/γ	— 10,6	— 11,6	— 13,1	— 14,6	— 16,6	— 18	— 19	— 20	— 33,8
$\lvert v \rvert$ en % de u	1%	2%	3%	4%	5%	5,4%	5,7%	6%	8,2%

Ainsi, jusqu'au niveau de la tropopause, la valeur absolue de $\frac{v}{\gamma}$ ne représente partout qu'un petit pourcentage de la valeur correspondante de $\frac{u}{\gamma}$; on peut donc négliger la composante v, et s'en tenir à la solution trouvée pour u et résumée par les formules suivantes:

$$\begin{cases} \text{formule (41), avec tableau de A (n° 11)} , \\ \text{formule (45), avec (43) et (44)} . \end{cases}$$

Telle est la solution approchée que nous proposons pour le problème posé au n° 1, et concernant, cela va sans dire, un état stationnaire.