À propos d'un problème d'attraction et les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques

Séance du 4 juillet 1940.

Rolin Wavre. — *A propos d'un problème d'attraction et les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques.*

Existe-t-il des distributions continues et différentes de matière dans un même domaine donné D, qui créent le même potentiel hors de D et qui possèdent les mêmes tenseurs d'inertie.

La réponse ne fait pas de doute car il suffit d'ajouter à une distribution donnée quelconque une distribution de potentiel nul et de tenseur d'inertie nul. Or de telles distributions existent.

En effet, prenons des sphères concentriques S_n de masses nulles et de moment d'inertie nul par rapport au centre, si ρ_n est la densité on aura donc

$$\int_0^R \rho_n(r)\, r^2\, dr = 0 \ , \qquad \int_0^R \rho_n(r)\, r^4\, dr = 0 \ , \qquad \rho_n(R) = 0 \ ,$$

il existe une infinité de telles fonctions ρ_n pour chaque sphère S_n alors en vertu des théorèmes élémentaires de la théorie du potentiel et de la théorie des tenseurs d'inertie toute somme de telles densités ρ_n

$$\rho = \Sigma\, \alpha_n\, \rho_n(x\,,\ y\,,\ z)$$

pourra être ajoutée à une distribution donnée sans changer, ni le potentiel au dehors ni le tenseur d'inertie.

Les α_n peuvent être choisis d'une infinité de manières différentes pour que n'apparaissent dans le second corps aucune densité négative et aussi de manière à ce que ρ soit une fonction continue.

Je prétends maintenant que la fonction ρ ainsi définie est orthogonale à toute fonction harmonique H dans le domaine D. L'on a, en effet,

$$\iiint \rho \, \mathrm{H} \, d\mathrm{D} = \iiint \mathrm{H} \, dm = \sum_{\text{par sphère}} \iiint \mathrm{H} \, dm$$

$$= \sum \int_0^{\mathrm{R}} dr \int \rho \, r^2 \, \mathrm{H} \, d\omega = \sum \mathrm{H}(\mathrm{P}) \, . \, 4\pi \int_0^{\mathrm{R}} \rho \, r^2 \, dr = 0 \, ,$$

ω étant un angle solide et P le centre de la sphère; la dernière transformation résultant du théorème de la moyenne.

L'usage d'une identité de Green bien connue permettrait d'ailleurs de démontrer que la densité d'un corps de potentiel extérieur nul est orthogonale aux fonctions harmoniques.

On peut chercher à mettre en évidence, d'une autre manière encore, l'*existence de fonctions orthogonales à toutes les fonctions harmoniques* de carré sommable, comme M. Paul Lévy me l'indiquait. En effet, u étant une fonction donnée on considère l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int (u - h)^2 \, d\mathrm{D}$$

la somme (triple) étant, pour simplifier, remplacée par une intégrale simple et h étant une fonction harmonique appartenant à une classe C de fonctions de normes bornées:

$$\int h^2 \, d\mathrm{D} \leqslant 4 \int u^2 \, d\mathrm{D} \; .$$

Ces fonctions h forment un ensemble compact, donc il existe une suite minimisante et une fonction h_m pour laquelle J atteint sa borne inférieure. Pout tout autre fonction harmonique H on aurait

$$\mathrm{J} = \int (u - h_m - \lambda \mathrm{H})^2 \, d\mathrm{D} =$$

$$\int (u - h_m)^2 \, d\mathrm{D} - 2\lambda \int (u - h_m) \, \mathrm{H} \, d\mathrm{D} + \lambda^2 \int \mathrm{H}^2 \, d\mathrm{D}$$

et J dut être minimum pour $\lambda = c$ d'où

$$\int (u - h_m) \, \mathrm{H} \, d\mathrm{D} = 0 \; .$$

En posant $u - h_m = f$ on a donc $u = h_m + f$. Donc *toute fonction continue est la somme d'une fonction harmonique et d'une fonction orthogonale à toute fonction harmonique dans le domaine* D. *Cette décomposition n'est possible que d'une seule manière*, en effet, sinon on trouverait une autre h_m^x et une autre f^x et l'on aurait, ce qui est absurde:

$$h_m - h_m^x = f^x - f \qquad \text{et} \qquad \int (f - f^x)(h_m - h_m^x)\, d\mathrm{D} = 0 \; .$$

On peut choisir u analytique si l'on veut et mettre ainsi en évidence l'*existence de fonctions analytiques dans* D *et orthogonales à toutes les fonctions harmoniques dans* D et de carré sommable.

Les densités ρ des corps de potentiel nul sont aussi «nombreuses» que les fonctions de carré sommable, à des fonctions harmoniques près. En prenant ensuite les polynomes harmoniques de degré 0, 1, 2 on établit facilement les propriétés simples du tenseur d'inertie pour les densités ρ.

Jean Ruffet. — *Sur l'aplatissement terrestre calculé en seconde approximation.*

Dans son livre, Figures planétaires et Géodésie, M. Wavre applique une méthode nouvelle, appelée procédé uniforme, qui permet de trouver les formules de la géodésie supérieure. Le potentiel de la pesanteur et le rayon vecteur y sont développés en séries suivant les puissances de la vitesse angulaire ω. Nous avons poursuivi cette étude dans deux directions différentes en développant suivant les puissances de ω l'inverse du carré du rayon polaire et également la masse totale.

Les calculs relatifs à la seconde approximation sans développement de la masse suivant les puissances de la vitesse angulaire conduisent aux résultats, obtenus par M. Wavre, qui donnent pour l'inverse de l'aplatissement le chiffre 295 comme compatible avec les mesures fondamentales, les chiffres 296 et 294 pouvant éventuellement convenir aussi.