Détermination du potentiel d'attraction à l'extérieur d'un astre par la pesanteur à sa surface

Détermination du potentiel d'attraction à l'extérieur d'un astre par la pesanteur à sa surface

PAR

Pierre DIVE

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

On connaît le théorème classique de Stokes en Mécanique céleste [1].

Lorsque la surface libre d'une planète est orthogonale au champ de la pesanteur, le potentiel de l'attraction qu'elle exerce sur un point extérieur ne dépend que de sa masse totale, de sa vitesse de rotation et de la forme géométrique de sa surface.

Ce théorème qui, primitivement, ne s'appliquait qu'aux astres tournant en bloc a été étendu par M. R. Wavre aux astres fluides animés de rotations intérieures barotropes — dans lesquels le champ de la pesanteur est encore orthogonal à la famille des surfaces d'égale densité [2] —, puis, par nous, aux astres fluides doués de rotations permanentes quelconques, barotropes ou baroclines, indépendamment de toute hypothèse restrictive sur la disposition relative, des lignes de force de la pesanteur et des couches à densité constante intérieures. Enfin, un peu plus tard, M. Wavre est parvenu à une proposition, plus générale encore, qui s'applique à une masse fluide animée de mouvements tout à fait quelconques [3].

[1] Cf. TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 324.
[2] Cf. R. WAVRE, *C. R.*, 184, 1927, p. 277 et *C. R.*, 185, 1927, p. 1113.
[3] Cf. R. WAVRE, *C. R.*, t. 194, 1932, p. 1447.

Dans notre thèse (*Rotations internes des astres fluides*, p. 36) nous avons énoncé le théorème suivant qui peut être rapproché du théorème de Stokes généralisé, mais qui ne saurait être confondu avec lui:

Lorsque la surface d'un astre fluide, tournant en bloc ou animé de rotations internes, barotropes ou baroclines, supporte une pression constante, le potentiel de l'attraction, à l'extérieur de cet astre, ne dépend que de la forme géométrique de sa surface et de l'intensité de la pesanteur superficielle.

Comme le théorème de Stokes, cette proposition indique que la connaissance du champ d'attraction extérieur d'un astre n'exige pas celle de la répartition des masses intérieures qui le produisent. Elle montre, en plus, qu'il n'est pas nécessaire de connaître la masse totale de l'astre, ni d'avoir recours à des repères extérieurs — qui permettraient de mesurer directement sa vitesse de rotation dans l'espace, — pour déterminer son potentiel extérieur. Des opérations géodésiques superficielles d'arpentage et de gravité suffisent, en principe, à donner tous les éléments du calcul de ce potentiel. L'action de la Terre, dans tout son champ extérieur, pourrait nous être connue, même si d'épais nuages la recouvraient et masquaient complètement l'Univers stellaire.

Nous allons donner une démonstration simple de l'unicité du potentiel extérieur d'un astre quand on donne seulement la forme de sa surface et la valeur de la pesanteur g_e en chacun de ses points.

Exprimons qu'en un point P_e de cette surface l'accélération de la pesanteur g_e est égale à la somme des projections sur la normale des vecteurs représentant l'attraction des masses et la force centrifuge, on a:

$$g_e = -\left(\frac{dU}{dn}\right)_e - \omega_e^2 l \frac{dl}{dn}, \tag{1}$$

où U est le potentiel extérieur étudié;

dn, un élément de la normale extérieure en P_e;

ω_e, la vitesse de rotation sur le parallèle de P_e;

l la distance de P_e à l'axe de rotation Oz;

l'indice e affectant, d'une façon générale, les grandeurs considérées sur la surface S_e [1].

Or, pour toutes les rotations permanentes, barotropes ou baroclines, nous avons, quel que soit l'ordre de connexion de l'astre,

$$\omega_e^2 = -\, 2\,\frac{dU_e}{dl^2}\ , \tag{2}$$

la dérivée étant prise sur la surface limite S_e sur laquelle la pression p_e a, par hypothèse, la même valeur en tout point.

Introduisons, au lieu de dl^2, l'élément correspondant dt d'abscisse curviligne le long de la méridienne C_e de P_e, et la latitude φ (angle de la verticale dn_e avec le plan équatorial), la formule (1) devient

$$g_e = -\left(\frac{dU}{dn}\right)_e + \left(\frac{dU}{dt}\right)_e \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\ , \tag{3}$$

$\left(\dfrac{dU}{dt}\right)_e$ étant égal à la dérivée $\dfrac{dU_e}{dt}$ du potentiel superficiel suivant la tangente à la méridienne C_e.

La forme de la surface limite S_e et la pesanteur g_e étant imposées, peut-il exister deux solutions U_1 et U_2 répondant à ces mêmes données ?

Posons

$$V \doteq U_1 - U_2\ ,$$

(3) donnerait

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_e \sin\varphi = \left(\frac{dV}{dt}\right)_e \cos\varphi\ . \tag{4}$$

Cette relation montre que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ V$, dont les composantes suivant la normale et la tangente à C_e sont

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_e \quad \text{et} \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_e\ , \tag{5}$$

est, en tout point de S_e, orthogonal à l'axe de rotation Oz; ce qu'on traduit en coordonnées cartésiennes par l'équation:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e = 0\ . \tag{6}$$

[1] *Rotations internes...* loc. cit., p. 31.

La fonction

$$H \equiv \frac{\partial V}{\partial z} \equiv \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_2}{\partial z} \tag{7}$$

est alors harmonique à l'extérieur de S_e, nulle sur S_e, et nulle à l'infini comme les composantes $Z_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z}$ et $Z_2 = \frac{\partial U_2}{\partial z}$ des attractions newtoniennes définies par les potentiels U_1 et U_2. D'après le principe de Dirichlet, H est donc nulle dans tout l'espace extérieur. On le voit immédiatement sur la formule

$$H = \iint_{S_e} H_e \left(\frac{dG}{dn}\right)_e dS_e \quad (H_e = 0) \ , \tag{8}$$

où G désigne la fonction de Green pour l'extérieur de S_e.

Ainsi, V garde la même valeur le long de toute parallèle à Oz, et, comme il est nul à l'infini (potentiel newtonien), il est nul partout. On en déduit que $U_1 = U_2$ et qu'il ne peut exister qu'une solution U du problème posé.

Notre théorème est démontré: U ne dépend que de S_e et g_e; ce que nous exprimons symboliquement par

$$U = U(S_e , g_e) \ . \tag{9}$$

Quant au calcul effectif de U, nous avons montré, dans notre thèse (*loc. cit.*, pp. 33 à 36), comment il se ramène à la résolution d'une équation de Fredholm de seconde espèce.

Faisons encore une remarque.

Dans l'hypothèse des rotations barotropes, M. Wavre a montré que la pesanteur g_e, à la surface d'un astre fluide, ne dépend, comme son potentiel extérieur U, que des données de Stokes, c'est-à-dire de la forme de sa surface S_e, de sa vitesse angulaire superficielle ω_e, et de sa masse totale M[1]:

$$g_e = g_e (S_e , \omega_e , M) \ . \tag{10}$$

En tenant compte de cette relation, on voit que notre théorème, exprimé par (9), permet de retrouver le théorème de Stokes pour les rotations barotropes.

[1] Cf. R. Wavre, *Figures planétaires*, p. 42.