Les groupements de la classification complète et de l'addition des relations symétriques

Autor(en): **Piaget, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **23 (1941)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741186

Jean Piaget. — *Les groupements de la classification complète et de l'addition des relations symétriques.*

Soit un système de classes $A_1 + A_1' = B_1$; $B_1 + B_1' = C_1$; etc. groupées selon le principe de la classification « simple » [1]. Il est possible, si les classes A_1'; B_1'; C_1'... contiennent les éléments suffisants, de retrouver en A_1' des classes d'ordre A (dont il existe au moins A_2); en B_1' des classes d'ordre A, A′ et B (dont au moins B_2); en C′ des classes d'ordre A, A′, B, B′ et C (dont C_2): il y aura en ce cas classification « complète ». Les classes A_2; B_2; C_2 ... existent toujours, mais peuvent être singulières, auquel cas B_2; C_2; etc. ne sauraient être subdividées elles-mêmes. On peut alors construire un nouveau groupement, dont l'opération directe est la « substitution complémentaire » ou « vicariance » (*cf. loc. cit.*): $A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$ où A_2 est une classe incluse en A_1' et où A_2' inclut A_1 (avec pour cas limite $A_1 = A_2'$ et $A_2 = A_1$). On a donc $A_2 + A_2' = B_1$.

Théorème VIII. — Les substitutions complémentaires ou vicariances effectuées à l'intérieur d'une classification « complète » forment un groupement.

En effet, deux vicariances sont encore une vicariance, puisque $(A_1 + A_1' = A_2 + A_2') + (B_1 + B_1' = B_2 + B_2') = (A_1 + A_1' + B_1' = B_2 + B_2')$ et si $B_2 = A_x + A_x'$, alors $(A_1 + A_1' + B_1' = A_x + A_x' + B_2')$; etc.

L'opération directe est l'addition d'une équation de type $(A_1 + A_1' = A_2 + A_2')$; l'opération inverse est la soustraction

[1] Jean PIAGET, *Le rôle de la tautologie dans la composition additive des classes et des ensembles.* C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 102, 1941.

Le groupement additif des classes. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 107, 1941.

Le groupement additif des relations asymétriques (sériation qualitative) *et ses rapports avec le groupement additif des classes.* C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 121, 1941.

Sur les rapports entre les groupements additifs des classes et des relations asymétriques et le groupe additif des nombres entiers. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *58*, 125, 1941.

de l'équation; l'identique générale est $0 + 0 = 0 + 0$ et les identiques spéciales l'addition d'une équation à elle-même (tautologie) ou à une équation d'ordre supérieur (résorption). L'associativité est immédiate pour les suites homogènes et « médiate » pour les suites hétérogènes.

Les règles de calcul sont les mêmes que pour l'addition simple des classes, mais le calcul comporte les complications et plus que A_1 se résorbe en A'_2 et A_2 en A'_1 et que A'_1 et A'_2 ne sont pas tautologiques l'un par rapport à l'autre; etc.

La « classification complète ». — Il va de soi que l'on peut joindre au groupement précédent les opérations additives du groupement de la classification « simple ». On a alors un groupement général de la classification « complète », dont ces deux groupements constituent des « sous-groupements ».

Les relations symétriques. — L'une des utilités de ce groupement général est qu'il permet de construire un prototype des systèmes de relations symétriques. Celles-ci constituent, en effet, lorsqu'elles sont positives, les relations d'équivalence existant: 1° soit entre deux termes co-inclus dans la même classe, 2° soit entre deux termes à la fois non co-inclus dans une classe déterminée et co-inclus dans la classe d'ordre supérieur à la première. Or la « vicariance », propre au groupement précédent, permet précisément de composer entre elles les relations de ce second type

Hypothèses. — Si A est une classe (par exemple les fils d'un même père) et que α_1 et α_2 lui appartiennent tous deux, on a $\alpha_1 \overset{a}{\longleftrightarrow} \alpha_2$; on a de même $\alpha_1 \overset{b}{\longleftrightarrow} \beta_1$; $\alpha_1 \overset{c}{\longleftrightarrow} \gamma_1$; etc... si α_1 et β_1, etc. appartiennent à la même classe B (par exemple les petits-fils d'un même grand-père), C, etc... Nous attribuons à $\alpha_1 \overset{0}{\longleftrightarrow} \alpha_1$ le sens « α_1 est le même individu que lui-même ». Nous pouvons d'autre part conférer une signification aux relations: $\alpha_1 \overset{0'}{\longleftrightarrow} \alpha_2$ (par exemple si α_1 et α_2 ont le même père, $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, mais ne sont pas identiques, $\overset{0}{\longleftrightarrow}$, alors ils sont frères $\overset{0'}{\longleftrightarrow}$); $\alpha_1 \overset{a'}{\longleftrightarrow} \alpha_2$ (par exemple si α_1 et α_2 ont le même grand-père $\overset{b}{\longleftrightarrow}$ mais pas le même père $\overset{a}{\longleftrightarrow}$, alors ils sont cousins-germains $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$); etc... (nous excluons naturellement par hypothèse les parentés par alliances). Nous devons, enfin, poser les relations $\alpha \overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow} \beta$; $\alpha \overset{\overline{a'}}{\longleftrightarrow} \beta$, etc.; par exemple « α n'a pas le même père que β », « α n'est pas le cousin-germain de β », etc. Il va de soi que ces relations ne sont pas les inverses de $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; etc..., puisque appliquées aux mêmes termes, elles seraient contradictoires: ce sont simplement d'autres relations symétriques, qui marquent la non-co-inclusion.

Définitions. — Nous appellerons « relations d'équivalence positive » les relations $\overset{a}{\longleftrightarrow}$; $\overset{b}{\longleftrightarrow}$; etc., qui sont symétriques, transitives et réflexives (avec pour cas limite l'identité $\overset{0}{\longleftrightarrow}$). Nous avons déjà rencontré précédemment (cf. *loc. cit.*) les équivalences entre les classes elles-mêmes ($A \overset{B}{=} A'$). Nous appellerons « altérités positives » les relations du type $\overset{0'}{\longleftrightarrow}$; $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; etc... qui sont symétriques mais intransitives et irréflexives. Les relations $\overset{\bar{a}}{\longleftrightarrow}$ seront dites « équivalences négatives » (symétriques, intransitives et irréflexives) et $\overset{\overline{a'}}{\longleftrightarrow}$ « altérités négatives » (symétriques intransitives et réflexives). Enfin, nous appellerons produit additif de deux relations symétriques entre trois termes α, β et γ la relation symétrique de l'ordre le plus faible déterminé entre α et γ par les relations données entre α et β et entre β et γ, soit ($\alpha \longleftrightarrow \beta + \beta \longleftrightarrow \gamma = \alpha \longleftrightarrow \gamma$). On peut aussi additionner les relations symétriques données entre deux mêmes termes ($\alpha \longleftrightarrow \beta + \alpha \longleftrightarrow \beta$) et, à la limite, les relations réflexives ($\alpha \longleftrightarrow \alpha + \alpha \longleftrightarrow \alpha$).

Théorème IX. — Toutes les équations vraies portant sur un système de relations symétriques d'équivalence et d'altérité positives et négatives forment un groupement.

En effet, vingt types de composition sont possibles en associant deux à deux les quatre relations d'équivalence et d'altérité positives et négatives reliant entre eux soit trois termes, soit deux mêmes termes. On constate d'abord que le produit de deux relations d'équivalence positive entre trois termes est celle d'ordre supérieur (nous n'écrirons pour simplifier que les relations elles-mêmes sans désigner leurs termes, par exemple $a + a = a$ signifiera $\alpha \overset{a}{\longleftrightarrow} \beta + \beta \overset{a}{\longleftrightarrow} \gamma = \alpha \overset{a}{\longleftrightarrow} \gamma$) Exemple: $a + a = a$; $b + b = b$; $a + b = b$; $b + c = c$; etc...

La raison est est que si α_1 et α_2 appartiennent à une même classe (par exemple à A) et si α_2 et β co-appartiennent à une autre classe (par exemple B) tous trois appartiendront à la plus grande de ces deux classes, puisque la plus petite est alors nécessairement emboîtée en elle. En second lieu, le produit d'une altérité et d'une équivalence (ou l'inverse) positives entre trois termes est celle des deux relations qui est d'ordre supérieur. Exemples :

$$a + a' = a' \ ; \quad a + b' = b' \ ; \quad \text{etc.}$$
$$\text{et} \quad b + a' = b \ ; \quad c + a' = c \ ; \quad c + b' = c \ ; \quad \text{etc.}$$

En effet, la relation d'équivalence exprime que deux des trois individus appartiennent à une classe commune X. Si l'un de ces deux individus est en relation d'altérité avec le troisième qui appartient à une classe Y non incluse en X alors l'autre l'est aussi, d'où $r + r' = r'$ si $r' > r$. Si au contraire Y est incluse en X, alors tous les trois appartiennent à X, d'où $r + r' = r$ si $r' < r$. En troisième lieu, le produit de deux altérités positives entre trois termes est celle d'ordre supérieur si elles sont d'ordre différent ou bien est l'équivalence d'ordre immédiatement supérieur aux deux altérités si celles-ci sont de même ordre. Exemples:

$$0' + a' = a' \ ; \quad a' + b' = b' \ ; \quad \text{etc...} \quad \text{et} \quad a' + 0' =$$
$$= a' \ ; \quad c' + b' = c' \ ; \quad \text{etc...}$$
$$\text{et} \quad 0' + 0' = a \ ; \quad a' + a' = b \ ; \quad b' + b' = c \ ; \quad \text{etc...}$$

En effet, quand les altérités sont d'ordre différent, les deux termes reliés par l'altérité d'ordre inférieur, par exemple $0' + a' = a'$ sont équivalents dans la classe d'ordre immédiatement supérieur à l'ordre de cette altérité, ce qui nous ramène au cas de la composition entre une équivalence et une altérité. Lorsque, au contraire, les altérités sont de même ordre, la composition ne peut plus reposer sur la tautologie et la résorption des classes correspondantes, comme les symétries précédentes, puisqu'elle exprime alors la vicariance de ces classes. Soit, par exemple $a' + a' = b$: la première de ces deux altérités constitue la relation entre A_1 et A'_1 et la seconde entre A_2 et A'_2; or, comme $A'_1 + A'_2 = B$, le produit $a' + a'$ ne saurait être que b (par exemple le cousin-germain paternel de mon cousin-germain paternel a le même grand-père que moi, qu'il soit mon cousin-germain, mon frère ou moi-même).

Il est donc évident que toutes les compositions entre équivalences et altérités positives dérivent sans plus des tautologies, résorptions et vicariances des classes correspondant à ces relations. Quant aux équivalences et altérités négatives, on constate d'abord que la composition d'une équivalence positive avec une équivalence ou une altérité négative entre deux mêmes termes α_1 et α_2 dérive de la soustraction des classes correspondantes. Exemple:

$$b + \bar{a} = a' \ ; \quad b + \overline{a'} = a \ ; \quad c + \bar{b} = b' \ ; \quad \text{etc.}$$

En effet, si α_1 et β_2 appartiennent à la même classe B mais pas à la même classe A ils sont $\overset{a'}{\longleftrightarrow}$; etc.

Enfin le produit de deux équivalences ou altérités négatives entre trois termes sera:

$$\bar{a} + \bar{a} = z \ ; \quad \overline{a'} + \overline{a'} = z \ ; \quad \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad \bar{a} + \bar{b} = z \ ; \quad \overline{b'} + \overline{a'} = z \ ; \quad \text{etc.}$$

équations qui traduisent, si Z est la classe la plus générale du système envisagé, les vicariances ($Z - A_1 + Z - A_2 = Z$), etc.

Cela étant, il est clair que les équations exprimant ces opérations constituent un groupement, le produit de deux relations symétriques étant toujours une relation symétrique composée selon l'un des principes exposés précédemment. L'opération directe sera l'addition d'une équation vraie. Par exemple:

$$\left(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a'}{\longleftrightarrow} s = x \overset{a'}{\longleftrightarrow} s\right) +$$
$$+ \left(x \overset{a'}{\longleftrightarrow} s + s \overset{b'}{\longleftrightarrow} t = r \overset{b'}{\longleftrightarrow} t\right) = \left(x \overset{b'}{\longleftrightarrow} t\right) .$$

L'opération inverse est, comme dans le groupement des relations asymétriques, l'addition de l'équation formée des relations converses, l'ordre des relations étant alors lui-même inversé. Or la converse de

$$x \overset{a}{\longleftrightarrow} y \quad \text{est} \quad y \overset{a}{\longleftrightarrow} x \quad \text{que l'on pourrait écrire:} \quad -\left(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y\right)$$

L'identique générale, produit des opérations directe et inverse est la relation $\overset{0}{\longleftrightarrow}$, soit $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a}{\longleftrightarrow} x) = (x \overset{0}{\longleftrightarrow} x)$. Par exemple:

$$\left(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a'}{\longleftrightarrow} s = x \overset{a'}{\longleftrightarrow} s\right) +$$
$$+ \left(s \overset{a'}{\longleftrightarrow} x = s \overset{a'}{\longleftrightarrow} y + y \overset{a}{\longleftrightarrow} x\right) = \left(x \overset{0}{\longleftrightarrow} x\right) .$$

Les identiques spéciales sont la tautologie $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + x \overset{a}{\longleftrightarrow} y = x \overset{a}{\longleftrightarrow} y)$ et la résorption $(x \overset{a}{\longleftrightarrow} y + x \overset{b}{\longleftrightarrow} y = x \overset{b}{\longleftrightarrow} y)$. Quant à l'associativité, elle est, comme dans tous les groupements, immédiate dans les suites homogènes et médiate dans les suites hétérogènes.

Jean Piaget. — *Les groupements de la multiplication biunivoque des classes et de celle des relations.*

Nous aimerions chercher en cette note, à quelles conditions les « multiplications logiques » ($A \times B = AB$, où AB désigne la « partie commune » à A et à B) peuvent être ordonnées en « groupements » logistiques.

Hypothèses. — Soit A_1 une classe donnée: multiplier Z par A_1 consiste à trouver la classe ZA_1 contenant tous les individus qui sont à la fois Z et A_1. Supposons que tous les A_1 soient des Z mais sans que la réciproque soit vraie: il existe alors une classe ZA'_1 contenant tous les Z qui ne sont pas des A_1. D'où $ZA_1 + ZA'_1 = ZB_1$. Tous les Z sont alors B_1 et réciproquement. Soit maintenant une autre classe B_2 telle qu'on ait aussi $Z \times B_2 = ZA_2 + ZA'_2$. Multiplier B_1 par B_2 consistera, selon ce même principe, à associer chaque classe de B_1 à chaque classe de B_2, d'où $B_1 \times B_2 = A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2 =$