Sur les mouvements d'un fluide visqueux par sphères concentriques

Autor(en): **Letestu, Serge**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **23 (1941)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741225

Ces différents résultats seront développés dans un article consacré à la partie mathématique de cette recherche.

Il convient de remarquer que les mouvements relatifs tendent à durer d'autant plus qu'il y aura plus de surfaces de glissement. Une petite étude facile montre même qu'il peut y avoir une certaine indépendance si deux couches sont séparées par une infinité d'autres.

Prenons par exemple des couches parallèles de masse $m_i = \frac{2}{(i+1)(i-1)}$ et de coefficients de frottement $R_0 = R_1 = R_2 = ... = 1$. La couche supérieure peut être animée d'une vitesse $V_0 = e^t$ de plus en plus grande, et cependant les vitesses V_i des autres couches tendent vers zéro, quel que soit t avec $\frac{1}{i}$. La couche limite inférieure ne serait pas entraînée par la couche supérieure.

Serge Letestu. — *Sur les mouvements d'un fluide visqueux par sphères concentriques.*

Envisageons un nombre infini de couches sphériques concentriques infiniment minces. C'est un cas-limite du problème traité dans la note précédente par M. Wavre.

Nous appellerons r le rayon d'une surface de séparation Σ, Λ le moment résultant des forces de frottement sur Σ. L'axe instantané de rotation p est fonction de r, t, et la rotation relative de deux couches est $\frac{\partial p}{\partial r} dr$; Λ est alors une fonction de r et $\frac{\partial p}{\partial r}$; $d\mathfrak{J}$ est le moment d'inertie d'une couche par rapport à un diamètre; il dépend de r.

Les équations d'Euler pour les rotations s'écrivent

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dr} \frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_h}{\partial r} + \frac{\partial \Lambda_h}{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} . \qquad (1)$$

Si on admet une force de frottement proportionnelle à la vitesse relative, on calcule facilement:

$$\Lambda_h\left(r\,,\ \frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{8}{3}\,\pi\,k\,r^4\,\frac{\partial p_h}{\partial r}$$

$$d\mathfrak{J} = \frac{8}{3}\,\pi\,\rho\,r^4$$

où ρ est la densité et k un coefficient de la forme $\frac{K}{dr}$.

Supposons ρ et k constants, l'équation (1) devient, pour chaque projection sur les axes:

$$\frac{\rho}{k}\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{4}{r}\,\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\,. \qquad (2)$$

Comme condition aux limites, la surface extérieure $r = 1$ doit être libre, soit $\Lambda_{r=1} = 0$. A l'instant initial $t = 0$ on a la répartition des rotations:

$$p\,(r\,,\ 0) = f\,(r)\ .$$

On peut trouver la solution par séparation des variables; la solution générale sera:

$$p\,(r\,,\ t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i\,r^{-\frac{3}{2}}\,J_{\frac{3}{2}}\,(c_i\,r)\,e^{-\frac{k}{\rho}\,c_i^2\,t}\ ,$$

$J_{\frac{3}{2}}$ étant la fonction de Bessel d'ordre $^3/_2$ et les C_i les racines de la fonction de Bessel d'ordre $^5/_2$. Les coefficients seront déterminés par les égalités, en vertu du développement de Fourrier Bessel:

$$\frac{1}{2}\left\{ J'_{5/2}\,(c_i) \right\}^2 A_i = \frac{1}{2}\int_0^1 r^{5/2} f'\,(r)\;J_{5/2}(c_i\,r)\,dr\ .$$

Si nous supposons ρ et k fonctions de r, l'équation (1) s'écrit:

$$\frac{\rho}{k}\,\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{4k + k'r}{kr}\right)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \qquad (3)$$

dont la résolution amènerait des équations du type Sturm Liouville.

Passons à l'étude du problème du point de vue hydrodynamique: un tel mouvement par couche serait-il possible dans un fluide animé de mouvements lents ?

Cas d'une densité et d'une viscosité constantes.

Soit v_h les composantes de la vitesse au point x_h, X_h^e les composantes des forces extérieures, et $\mathcal{P}$ la pression; les équations de Navier s'écrivent pour les mouvements lents:

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_h} + \mu \Delta v_h + X_h^e = \rho \frac{\partial v_h}{\partial t} \cdot \tag{4}$$

Supposons les forces extérieures et la répartition des $\mathcal{P}$ indépendantes du temps, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_h} = X_h^e \, .$$

Nous pouvons considérer la vitesse v comme la somme de trois vitesses v^i, chacune représentant la vitesse de rotation autour de l'axe x_i; les équations (4) se décomposent en trois groupes de trois équations de même forme:

$$\mu \Delta v_h^i = \rho \frac{\partial v_h^i}{\partial t} \cdot \tag{5}$$

Examinons, par exemple, le groupe d'équations en v^3. Les composantes sont:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1^3 &= -\, p_3(r\,,\ t)\, x_2 \\ v_2^3 &= p_3(r\,,\ t)\, x_1 \\ v_3^3 &= 0 \end{aligned} \right. \tag{6}$$

en portant ces valeurs, la troisième équation du système est identiquement nulle et les deux premières donnent chacune:

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{4}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \tag{7}$$

il en est de même pour les deux autres groupes. Remarquons que nous retrouvons la relation (2) des couches solides.

Cas d'une densité et d'une viscosité fonctions de r. Les équations de Navier peuvent se généraliser

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_h} + (\mu + \lambda)\frac{\partial \Theta}{\partial x_h} + \Theta\frac{\partial \lambda}{\partial x_h} + \mu \Delta v_h + 2\frac{\partial \mu}{\partial x_h}\frac{\partial v_h}{\partial x_h} +$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial x_{h'}}\left(\frac{\partial v_{h'}}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_{h'}}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_{h''}}\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_{h''}} + \frac{\partial v_{h''}}{\partial x_h}\right) + X_h^e = \rho\frac{\partial v_h}{\partial t} \qquad (8)$$

$$\text{où} \qquad \Theta = \Sigma\frac{\partial v_h}{\partial x_h}\,.$$

Si $\mathcal{P}$ et X_h^e restent indépendants du temps, on peut comme précédemment décomposer v en v^i, chaque équation de (8) étant linéaire en v; le système se décompose en trois groupes. Prenons le groupe en v^3 et portons les valeurs des composantes données en (6); la troisième équation est identiquement nulle et les deux premières deviennent chacune

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{4\mu + r\mu'}{r\mu}\right)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$$

on retrouve encore les équations (3) donnant le mouvement des couches solides.

En résumé, si on suppose, dans un liquide limité par une sphère, les forces extérieures et la répartition des pressions indépendantes du temps, la viscosité et la densité fonctions du rayon, le fluide peut prendre pour des mouvements lents une rotation par couches sphériques concentriques. Les équations du mouvement sont les mêmes que pour des couches solides infiniment minces; elles sont facilement résolubles dans le cas particulier où la densité et la viscosité sont constantes.

William-H. Schopfer. — *Expériences sur la régénération et le bouturage de* Sansevieria zeylanica *Willd.*

Cette Liliacée possède des feuilles longues et dures qui permettent la multiplication de la plante par bouture. Un fragment de feuille placé en terre produit une série de petites racines dont la naissance est déterminée par la présence d'un faisceau libéro-ligneux. Puis un rhizome apparaît, produisant