

Solutions invariante $Dx^2(x,y)$ de l'équation $(-x^2) D = 0$ (1) dans l'espace pseudo-euclidien

Autor(en): **Stueckelberg, Ernest-C.-G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-741753>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Solutions invariantes* $D_{\kappa^2}(x, y)$ de l'équation $(\square - \kappa^2) D = 0$ (1) dans l'espace pseudo-euclidien.

Le continu quadridimensionnel pseudo-euclidien de l'espace-temps définit la distance invariante entre deux événements par $R(x, y)^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) = -T^2 = r^2 - t^2$ (avec $t = x^4 - y^4$, $r = |\vec{x} - \vec{y}|$). Une fonction invariante

$$D_{\kappa^2}(x, y) = D_{\kappa^2}(R^2)$$

ne peut dépendre que de cette distance R^2 . Si cette fonction est solution de l'équation homogène $(\square = g^{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu)$, elle possède en général des singularités sur le cône de lumière $R^2 = 0$, $t = \pm r$. Une telle fonction est dite solution de (1) si, pour toute fonction $\Psi(x)$, l'intégrale étendue sur tout l'espace $\int (dx)^3$ et sur tout le temps $\int_{-\infty}^{+\infty} dx^4$, la fonction

$$\Psi_{\kappa^2}^{(x)}(y) = \int_{(x)} (dx)^3 \int dx^4 D_{\kappa^2}(x, y) \Psi(y) \quad (2)$$

satisfait à l'équation homogène (1) (mentionnée dans le titre). Si $Z_p(z)$ est une fonction de Bessel de l'ordre p et de l'argument z , toute fonction invariante

$$D_{\kappa^2}(R^2) = \kappa T^{-1} Z_1(\kappa T) = 2 \frac{d}{d(R^2)} Z_0(\kappa T) \quad (3)$$

est solution de (1). La fonction D_{κ^2} obtenue par la substitution $Z_0(z) = J_0(z)$ en (3) est une première solution du problème. $J_0(z)$ étant une série de puissances (à coefficients réels) en z^2 , n'a pas de singularités au cône de lumière. Mais elle n'a pas d'intérêt dans les problèmes physiques (quantification des champs) parce qu'elle devient infinie pour $R^2 \rightarrow +\infty$. La théorie des champs quantifiés s'intéresse à des solutions invariantes de (1), qui tendent vers zéro pour $R^2 \rightarrow +\infty$. De telles fonctions réelles doivent avoir une discontinuité sur le cône de lumière, parce que toute fonction de Bessel autre que J_0

devient complexe pour un changement de la phase φ de l'argument $z = e^{i\varphi}$.

Pour obtenir de telles solutions, nous rappelons¹ que l'intégrale étendue sur le *domaine euclidien*, qui est contenu en (2) si l'intégration sur $\int dx^4$ se fait le long de l'*axe imaginaire* dans le plan riemanien de x^4 (ou de $t = x^4 - y^4$, cf. chemin (X) = (A) dans la figure), satisfait l'équation inhomogène

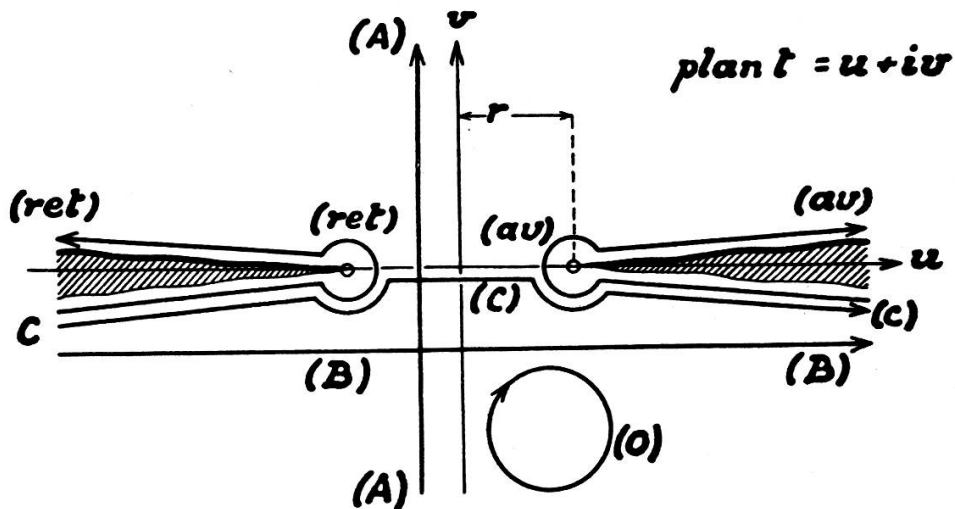
$$(\square - x^2) \Psi_{x^2}(x) = -4\pi \Psi(x) \quad (4)$$

si $Z_0(z)$ contient la singularité $Z_0(z) \rightarrow \frac{2}{\pi} \log z$ pour $z \rightarrow 0$.

Les fonctions suivantes

$$-iH_0^{(1)}(z) = J_0(z) \frac{2}{\pi} \log(e^{-i\frac{\pi}{2}} z) + g(z) \quad (5)$$

$$N_0(z) = J_0(z) \frac{2}{\pi} \log z + g(z) \quad (6)$$



satisfont à cette condition. $g(z)$ est également une série de puissances en z^2 . Elles ont en plus la propriété que $-iH_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} z)$ et $N_0(z)$ sont les deux réelles, si z est réel et positif. Elles tendent vers zéro si $z \rightarrow +$ réel ∞ . Le chemin d'intégration (X) = (A) (cf. figure) peut être déformé en l'un ou l'autre des lacets (X) = (av) ou (X) = (ret) autour des pôles

¹ STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, 56, 43, 1939.

$t = \pm r$ de la fonction. Ces deux solutions $\Psi_{\kappa^2}^{(av)}$ ou $\Psi_{\kappa^2}^{(ret)}$ de (4) peuvent être exprimées entièrement en termes de la densité de la source $\Psi(x)$ pour des temps réels avancés $t \geq r$ ou retardés $t \leq -r$ (méthode de Sommerfeld¹). Elles tendent vers zéro pour $R^2 \rightarrow +\infty$, si la densité de source ne diffère de zéro que dans une région finie d'espace.

Si, par contre, on choisit un chemin du type (X) = (B) dans (2), l'intégrale peut être contractée en un contour (O) fermé et situé entièrement dans la partie inférieure du plan t . Une telle fonction $\Psi_{\kappa^2}^{(B)}$ satisfait à l'équation homogène, parce que $(\square - \kappa^2) D_{\kappa^2} = 0$ dans tout le domaine d'intégration. Le parcours particulier (C) du type (B) définit $\Psi_{\kappa^2}^{(C)}$ en termes de la densité de source $\Psi(x)$ pour des temps réels. Cette solution peut être exprimée par une intégrale étendue le long de l'axe réel de t , si l'on définit dans l'intégrant D_{κ^2} (2) par la prolongation analytique le long du parcours (C) de la fonction choisie. La phase φ de $z = \kappa T = \kappa(t - r - i|\tau|)^{\frac{1}{2}}(t + r - i|\tau|)^{\frac{1}{2}}$ change de

$$(-\pi) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0$$

si t augmente de $(t < -r) \rightarrow (-r < t < r) \rightarrow (t > r)$.

Cette prolongation appliquée pour $\kappa^2 > 0$ donne

$$z = (e^{-i\pi} \kappa T) \rightarrow (e^{-i\frac{\pi}{2}} \kappa R) \rightarrow (\kappa T) .$$

La substitution de ce z en « (5) + $2J_0(z)$ » fournit la prolongation

$$(N_0(\kappa T) - iJ_0(\kappa T)) \rightarrow (-iH_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} \kappa R)) \rightarrow (N_0(\kappa T) + iJ_0(\kappa T)). \quad (7)$$

Les parties réelles et imaginaires de (7) doivent satisfaire individuellement à (1). Nous les appelons $D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y)$ et $D_{\kappa^2}^{(1)}(x, y)$. Ils résultent par la différentiation formelle (3) de deux fonctions réelles et discontinues, que l'on peut exprimer

¹ SOMMERFELD, cf. FRANK u. v. MISES, Diff. Gleich. der math. Physik, 2^{me} éd., vol. 2, p. 780 et suivantes.

en termes des symboles de Dirac $\delta(z) = d\gamma(z)/dz$;
 $2z\gamma(z) = |z| + z$; $\gamma(z) + \gamma(-z) = 1$

$$\begin{aligned} D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y) &= -D_{\kappa^2}^{(0)}(y, x) = -2 \frac{d}{d(T^2)} \left(\frac{t}{|t|} \gamma(T^2) J_0(\kappa T) \right) \\ &= r^{-1} (\delta(r+t) - \delta(r-t)) + \kappa^2 \gamma(T^2) (\dots) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_{\kappa^2}^{(1)}(x, y) &= D_{\kappa^2}^{(1)}(y, x) = 2 \frac{d}{d(R^2)} \left(-\gamma(R^2) i H_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} \kappa R) + \gamma(T^2) N_0(\kappa T) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} R^{-2} + \kappa^2 (\dots) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Les troisièmes membres de (3) et (9) indiquent les singularités les plus fortes pour $t = \pm r$. Pour des valeurs négatives de $\kappa^2 = -\sigma^2 < 0$, la prolongation doit être faite le long du parcours

$$z = (\kappa T) \rightarrow (e^{i\frac{\pi}{2}} \kappa R) \rightarrow (e^{i\pi} \kappa T) .$$

A la place de (7), on obtient une association différente, dont la partie imaginaire est (à un facteur et à un terme additionnel $2J_0(z)$ près) la fonction $D_{\kappa^2}^{(0)}(x, y)$ exprimée en (8) avec l'argument $i\sigma T$ à la place de κT . La partie réelle par contre donne une fonction différente de (9), soit

$$\begin{aligned} D_{\kappa^2}^{(1)}(x, y) &= D_{\kappa^2}^{(1)}(y, x) = \frac{d}{d(R^2)} \left(\gamma(R^2) N_0(\sigma R) - \gamma(T^2) i H_0^{(1)}(e^{i\frac{\pi}{2}} \sigma T) \right) \\ &= \frac{2}{\kappa} R^{-2} + \kappa^2 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

qui a les mêmes singularités que (9). Comme (9), elle disparaît pour R^2 et pour $T^2 \rightarrow \infty$. $D_{\kappa^2}^{(0)}$, par contre, est dans les deux cas $\kappa^2 \gtrless 0$ zéro pour $R^2 > 0$, mais il ne disparaît pour $T^2 \rightarrow \infty$ que si $\kappa^2 > 0$. D'autres propriétés, que ces fonctions possèdent en commun avec d'autres fonctions plus générales, seront étudiées dans la communication suivante ¹.

¹ E. C. G. STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, 59, 53, 1942.