Solutions invariantes Dx2 (x,y) de l'équation de Schroedinger relativiste

Autor(en): **Stueckelberg, Ernest-C.-G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741754

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Solutions invariantes* $D_{\varkappa^2}(x, y)$ *de l'équation de Schroedinger relativiste.*

La théorie des champs quantifiés fait appel à une fonction $D(x, y)$ [1], qui satisfait à l'équation de Schroedinger: $\varkappa = m/h$, $D_\mu(x) = \partial/\partial x^\mu - j(e/h)\,\Phi_\mu(x)$; $j^2 = -1$; $F(j)^* = F(-j)$

$$(D^*_\mu(x)\,D^{\mu *}(x) - \varkappa^2)\,D_{\varkappa^2}(x, y) = (D_\mu(y)\,D^\mu(y) - \varkappa^2)\,D_{\varkappa^2}(x, y) = 0 \tag{1}$$

En l'absence des forces, les solutions invariantes ne peuvent dépendre que de R^2. Dans la note précédente [2], nous avons démontré qu'il n'existe que deux fonctions de ce type, qui disparaissent pour $R^2 \to \infty$, soit

$$D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y) = -D^{(0)}_{\varkappa^2}(y, x) \;; \qquad D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y) = D^{(1)}_{\varkappa^2}(y, x)\,. \tag{2}$$

Nous allons démontrer que si $\Phi_\mu \neq 0$, il existe une série de fonctions complexes $D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y)$ ayant la symétrie

$$D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y) = j^{n+1}\,D^{(n)}_{\varkappa^2}(y, x)^*\,. \tag{3}$$

La solution $D^{(0)}(x, y)$ est l'analogue spatiotemporelle de la *fonction de Green:* Une solution quelconque $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ de l'équation de Schroedinger (1) est déterminée en un événement y, si sa valeur et la valeur de sa dérivée normale sont connues sur un hyperplan $x = (\vec{x}, x^4 = \text{const.})$.

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = -\frac{1}{4\pi}\int (dx)^3 \left\{ \left(D^{4*}(x)\,D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)\right)\Psi_{\varkappa^2}(x) - D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)\left(D^4\Psi_{\varkappa^2}(x)\right)\right\}. \tag{4}$$

La fonction $D^{(0)}_{\varkappa^2}$ doit donc avoir la propriété

$$D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y) = 0 \;; \qquad \frac{\partial D^{(0)}_{\varkappa^2}(x, y)}{\partial x^4} = -4\pi\,\delta(\vec{x} - \vec{y}) \qquad \text{pour } x^4 = y^4 \tag{5}$$

[1] *Cf.* p. ex. PAULI. *Rapport du Congrès Solvay* 1939, paru dans Phys. Rev. *58*, 716, 1940 et Rev. Mod. Phys. *13*, 203, 1941.

[2] E. C. G. STUECKELBERG. C. R. séances Soc. Phys. et Hist. nat. Genève, *59*, 49, 1942.

parce que, sur l'hyperplan $x = x^4$, $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ et $\partial\Psi_{\varkappa^2}/\partial y^4$ peuvent être donnés arbitrairement.

Pour démontrer (4), nous cherchons l'ensemble des fonctions propres $S(x/\mu)$ de l'équation de Schroedinger, qui appartiennent à des valeurs propres de la masse $\varkappa^2(\mu)$ et qui sont dénombrées par un indice μ (continu ou discontinu). Soit $\int (d\mu)^4$ la sommation sur l'ensemble invariant de cet indice, et $\int (dx)^4 = \int (dx)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^4$ la sommation sur tout l'espace-temps. Alors ces fonctions peuvent être normalisées à

$$\int (dx)^4 S^*(x/\mu)\, S(x/\mu') = \delta(\mu/\mu') \; ;$$

$$\int (d\mu')^4 S^*(x/\mu')\, S(y/\mu') = \delta(x/y) \; . \tag{6}$$

le symbole $\delta(a/b)$ signifie que $\int (db)^4\, \delta(a/b)\, f(a) = f(b)$. A l'aide de ces fonctions, on forme la matrice

$$\varepsilon(\mu/\mu') = 2\pi j\, \delta\left(\varkappa^2(\mu) - \varkappa^2(\mu')\right)$$
$$\int (dx)^3 \left\{ \left(D^4 S(x/\mu)\right)^* S(x/\mu') - S(x/\mu)^* D^4 S(x/\mu') \right\} \tag{7}$$

qui, étant hermitique, peut toujours être mise en forme diagonale $\varepsilon(\mu/\mu') = \varepsilon(\mu)\, \delta(\mu/\mu')$. Les fonctions $D^{(n)}$ sont définies par

$$D^{(n)}_{\varkappa^2}(x, y) = 2(2\pi)^2 \int (d\mu)^4\, \delta\left(\varkappa^2(\mu) - \varkappa^2\right)$$
$$\left(j\, \varepsilon(\mu)\right)^{n-1} S(x/\mu)^*\, S(y/\mu) \; . \tag{8}$$

La relation (4) est obtenue pour $\Psi_{\varkappa^2(\mu')}(y) = A(\mu')\, S(y/\mu')$ si l'on multiplie (7) avec $A(\mu')\, \varepsilon(\mu)^{-1}\, S(y/\mu)$ et si on somme sur $(d\mu)^4$. Elle est vraie d'abord pour tout $A(\mu')\, S(y/\mu')$ appartenant à la masse $\varkappa^2(\mu')$. A cause de la linéarité de (4), ceci est vrai pour toute solution $\Psi_{\varkappa^2}(y)$ de l'équation de Schroedinger avec $\varkappa^2 = \varkappa^2(\mu')$. La solution $D^{(1)}$ permet de définir à partir d'une fonction $\Psi(x)$ quelconque des fonctions

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int (dx)^4\, D^{(1)}_{\varkappa^2}(x, y)\, \Psi(x) \tag{9}$$

qui satisfont à (1) et ont la propriété que

$$\Psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\varkappa^2)\, \Psi_{\varkappa^2}(y) \quad . \tag{10}$$

Pour démontrer ce théorème, on exprime d'abord $\Psi(x)$ par la somme

$$\Psi(x) = \int (d\mu')^4\, \mathrm{A}(\mu')\, \mathrm{S}(x/\mu') \tag{11}$$

et substitue cette expression en (9) tenant compte de la définition (8) de $\mathrm{D}^{(1)}$. En vertu de la première relation d'orthogonalité (6), on trouve

$$\Psi_{\varkappa^2}(y) = \int (d\mu)^4\, \delta\left(\varkappa(\mu)^2 - \varkappa^2\right) \mathrm{A}(\mu)\, \mathrm{S}(y/\mu) \tag{12}$$

qui, à son tour, satisfait à (10). En l'absence des Φ_μ, on choisit les $\mathrm{S}(x/k) = (2\pi)^{-2} \exp\,(j k_\alpha x^\alpha)$ et l'on retrouve $\mathrm{D}^{(n)} = \mathrm{D}^{(0)}$ ou $\mathrm{D}^{(1)}$ de la communication précédente suivant que n est pair ou impair.

L'application de ces fonctions montrera une nouvelle analogie entre la mécanique du point matériel et celle des champs quantifiés complexes [1].

[1] E. C. G. Stueckelberg. Helv. Phys. Acta, *14*, 321 et 588, 1941; *15*, 588, 1942, et un article en préparation.

* $\delta(a)$ et $\delta(\vec{x})$ sont les symboles de Dirac habituels, qui sont les propriétés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da\, \delta(a - b)\, f(a) = f(b) \quad ; \qquad \int (dx)^3\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \quad .$$