Critères statistiques applicables à un petit nombre d'observations

Autor(en): **Féraud, Lucien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **24 (1942)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741772

Lucien Féraud. — *Critères statistiques applicables à un petit nombre d'observations.*

1. Etant donnée une distribution normale N (x, a, h), de moyenne connue a, dont on ignore la précision h, le critère habituellement dit « de Student » [1] permet — notamment — de rejeter, pour un coefficient de probabilité fixé ε, une suite de n résultats d'observations $\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n$. Lorsque n ne dépasse pas 31 il suffit d'une lecture dans une table [2].

Le critère s'adapte à deux distributions normales indépendantes de *même précision h*, que l'on ignore, lorsque l'on connaît, par contre, la différence des moyennes: c'est le problème de « la comparaison de deux moyennes ». Il s'étend encore au cas d'un nombre quelconque de distributions normales indépendantes, de *même précision h*, que l'on ignore, mais dont on connaît toutes les moyennes.

Il existe un critère du même genre dû à R.-A. Fisher [3] qui s'applique à ν distributions normales indépendantes, de même moyenne a, de *même précision h* (c'est-à-dire à une distribution normale N(x, a, h) et à ν suites de résultats) dans l'ignorance des valeurs de a et de h.

Ainsi, dès que l'on dépasse le cas de Student proprement dit, on part de distributions normales de même précision.

2. Il s'agissait donc d'obtenir un critère applicable même lorsque les distributions originelles *n'ont pas la même précision* et permettant encore de tenir compte de toutes les observations. Par deux méthodes différentes on arrive pour $\nu = 2$ à des résultats qui restent assez simples — ce qui est indispensable.

Soit deux distributions normales indépendantes N (x, a_x, h_x), N(y, a_y, h_y) et deux suites de résultats $\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_X$; $\overset{0}{y}_1, \ldots, \overset{0}{y}_Y$.

[1] Biometrika, pp. 1-25, 1908.

[2] Metron. 1925 et R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*. Table IV, in fine, 1932.

[3] *Statistical Methods for Research Workers.*

A. On considère les carrés des rapports de Student (à un facteur près) c'est-à-dire

$$q_x = \frac{1}{X} \cdot \frac{(Sx - Xa_x)^2}{Sx^2 - \frac{(Sx)^2}{X}}$$

et l'expression analogue q_y.

La distribution de q_x, de 0 à ∞, résulte immédiatement de celle de Student; elle a pour densité

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{X-1}{2}\right)} q_x^{-\frac{1}{2}} (1 + q_x)^{-\frac{X}{2}}$$

B étant la fonction eulérienne de première espèce. On peut en dire autant de q_y et les deux expressions sont indépendamment distribuées. Par un simple changement de variables on obtient la densité de la distribution du produit $p = q_x q_y$, de 0 à ∞ :

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{X}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{Y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{X-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{Y-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{X+Y}{2}\right)} p^{-\frac{Y+1}{2}} \mathcal{F}\left(\frac{Y}{2}, \frac{Y}{2}, \frac{X+Y}{2}, \frac{p-1}{p}\right)$$

en représentant par $\mathcal{F}$ la fonction hypergéométrique.

B. De la distribution de q_x on passe immédiatement à celle de $u = \frac{1}{1 + q_x}$, de 0 à 1, dont la densité s'écrit

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{X-1}{2}\right)} u^{\frac{X-3}{2}} (1 - u)^{-\frac{1}{2}} .$$

On passe de même de la distribution de q_y à celle de $v = \frac{1}{1 + q_y}$.

Le changement de variables de l'intégrale de Dirichlet donne la densité de la distribution du produit $w = u \cdot v$, de 0 à 1:

$$\frac{\pi}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{Y-1}{2}\right)} w^{\frac{Y-3}{2}} F\left(\frac{Y-X+1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-w\right)$$

F étant la série hypergéométrique, convergente pour $0 < w < 1$.

Lorsque X et Y sont de parités différentes, F peut être remplacée par un polynome hypergéométrique de Jacobi — en particulier si $X = Y + 1$ on obtient: $\left(\frac{X}{2} - 1\right) \varpi^{\frac{X}{2}-2}$. Lorsque X et Y sont de même parité F s'exprime à l'aide des intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce K et E pour lesquelles des tables ont été établies par Legendre.

3. Les distributions des expressions $p = q_x q_y$ et

$$\varpi = \frac{1}{(1 + q_x)(1 + q_y)}$$

ayant été établies il résulte de chacune d'elles un critère applicable au cas de deux distributions normales indépendantes, de moyennes a_x, a_y connues, et de précisions h_x, h_y inconnues — non nécessairement égales. Ces critères peuvent être utilement employés alors que le critère de Student appliqué séparément à chacune des suites de résultats n'aboutit à aucune conclusion.

Jean Patry. — *Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques.*

Le théorème de Fuchs est à la base de la résolution de la plupart des équations différentielles linéaires et homogènes. Il a, en effet, conduit aux solutions de l'équation de Bessel ou de l'équation hypergéométrique sous forme de séries. D'autre part, les équations linéaires à coefficients périodiques présentent un intérêt certain pour la technique. Elles se présentent presque dans tous les cas où un phénomène est sous l'influence d'une action perturbatrice périodique. Nous ne citerons comme exemple que les phénomènes d'élasticité dans les milieux stratifiés, l'étude du courant électrique dans un circuit dont les caractéristiques varient périodiquement avec le temps, etc. Il est donc intéressant de chercher à appliquer ce théorème si fécond à une classe d'équations qui n'ont été résolues pratiquement que dans quelque cas particuliers.