Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 24 (1942)

Artikel: Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741781

le taux du travail dissipé par rapport au travail mis en jeu, taux qui est justement ce qui nous intéresse (ultérieurement, je généraliserai les résultats en les réduisant par unité de longueur de joint et de section du piston).

J'ai ainsi trouvé que des segments ordinaires dissipent de 1 à 2% du travail utile et ai pu établir des joints particuliers ne dissipant que de 0,4 à 0,5% (occasionnellement même 0,27%, mais, dans ce dernier cas l'étanchéité était insuffisante).

Cette étanchéité se mesure en marche en coupant l'arrivée d'air et mesurant la baisse de pression en fonction du temps dans une capacité déterminée.

Malheureusement les difficultés de l'heure présente ont considérablement entravé mes recherches, surtout en rendant impossible l'obtention des matières dont j'avais besoin.

Rolin Wavre. — *Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens.*

Dans la séance du 7 mai 1942, nous avons indiqué un procédé pour décomposer un élément f de l'espace E (espace fonctionnel ou espace d'Hilbert) en série procédant suivant les éléments propres f^α de l'opérateur A^2 déduit d'un hermitien A. On posait si l'opérateur est régulier (c'est-à-dire à $\varpi \neq 0$)

$$f_0^\alpha = \varpi\,(f_0^\alpha)\, f^\alpha + f_0^{\alpha+1} \ ,$$

f^α étant la limite des itérées par A^2 de f_0^α et $f_0^{\alpha+1}$ étant un nouveau reste. On obtenait par réduction transfinie

$$f = f_0^0 = \sum_\alpha \varpi\,(f_0^\alpha)\, f^\alpha + h \qquad (1)$$

avec

$$A\,(h) = 0 \ . \qquad (2)$$

On a donc

$$A^2\,(f) = \sum_\alpha \varpi\,(f_0^\alpha)\, l_\alpha^2 f^\alpha \qquad \text{et} \qquad A^2\,(f^\alpha) = l_\alpha^2 f^\alpha \ .$$

Cette décomposition de f n'introduit que des éléments propres f^α en lesquels f se décompose effectivement. La sommation dans (1) s'étend à un ensemble dénombrable de valeurs, qui rangé par ordre des l_α décroissants, donne lieu aux relations

$$l_1 > l_2 > l_3 > \dots > l_\omega > l_{\omega+1} > \dots > 0$$

les α parcourant une suite dénombrable de nombres transfinis de classe I ou II. Les l_α sont les l^α de notre note précédente.

Considérons maintenant l'équation, où ν est un nombre et f un élément donné de E, enfin, φ un élément inconnu de E.

$$\varphi = f + \frac{1}{\nu} \mathrm{A}(\varphi) \tag{3}$$

on démontre facilement que toute solution de (3) est solution de (4) et réciproquement:

$$\varphi = f^* + \frac{1}{\nu^2} \mathrm{A}^2(\varphi) \qquad \text{avec} \qquad f^* = f + \frac{1}{\nu} \mathrm{A}(f) \, . \tag{4}$$

Décomposons, alors f^α, par l'opérateur A^2 à la manière rappellée ci-dessus

$$f^* = \sum_\alpha f^*_\alpha f^\alpha + h \, , \quad \mathrm{A}(h) = 0$$

et posons

$$\varphi = f^* + \sum_\alpha \frac{l^2_\alpha f^*_\alpha}{\nu^2 - l^2_\alpha} f^\alpha \, , \tag{5}$$

Si $|\nu|$ est différent des l_α et des points d'accumulation des l_α, (5) fournit une solution de (3). Si $|\nu| = l_\alpha$, il n'y a pas de solution de (3). Si $|\nu|$ est une valeur propre de l'opérateur A qui ne soit ni un l^α, ni un point d'accumulation des l_α, alors la solution φ n'est déterminée qu'à un élément près, solution générale de l'équation (3) homogène: ($f = 0$).

Si enfin $|\nu| = \lim l_\alpha$, sans que $|\nu|$ soit un l_α, alors la série (5) fournit encore une solution pourvu que la série suivante converge

$$\sum_{\alpha'} \left(\frac{f^*_{\alpha'}}{|\nu| - l_{\alpha'}} \right)^2 .$$

Et si dans ce cas $|\nu|$ est une valeur propre autre qu'un l_α, alors à la solution (5) on peut ajouter la solution générale de l'équation (3) homogène ($f = 0$).

On voit comment se présentent par cette méthode d'itération des opérateurs hermitiens et de réduction transfinie les théorèmes d'Hilbert-Schmidt.

Reprenant (5) on voit que la fonction analytique φ de ν admet les pôles simples $\nu = \pm\, l_\alpha$, lesquels peuvent avoir des points d'accumulation a à distance finie, les a pouvant à leur tour en avoir, comme le permet la théorie des nombres transfinis. Il n'y a pas d'autre singularité pour $\varphi|\nu|$, que les points $\pm\, l_\alpha$ et les points du dérivé de l'ensemble $\pm\, l_\alpha$.

Avec le paramètre habituel λ de Fredholm on aurait donc

$$\varphi\,|\,\lambda\,| = f^* + \lambda^2 \sum_\alpha \frac{f^*_\alpha}{\lambda^2_\alpha - \lambda^2}\, f^\alpha\,,$$

et les mêmes remarques peuvent être faites sur les points limites de pôles (le point $\lambda = 0$ n'est jamais singulier pour un opérateur borné).

Jean-Pierre Vigier. — *Quelques résultats complémentaires à la théorie de l'itération des opérateurs de M. Wavre.*

Nous opérons dans l'espace H isomorphe de l'espace fonctionnel E_f et de l'espace hilbertien E_ω.

δI) opérateurs hermitiens gauches.

Ils sont définis par la relation $(Ax, x) = -(x, Ax)$.

Les itérés d'un élément x_0 normalisé, ($\|x_0\| = 1$) sont donnés par les relations suivantes:

$$l_i x_i = A(x_{x-1}) \;;\qquad l_i = \|A(x_{i-1})\| \;;\qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Un raisonnement presque identique à celui de M. Wavre sur les opérateurs hermitiens montre que l'on a:

$$l_1 \leqslant l_2 \leqslant l_3 \leqslant \ldots$$