

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Band:** 24 (1942)

**Artikel:** Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens  
**Autor:** Wavre, Rolin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741781>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

le taux du travail dissipé par rapport au travail mis en jeu, taux qui est justement ce qui nous intéresse (ultérieurement, je généraliserai les résultats en les réduisant par unité de longueur de joint et de section du piston).

J'ai ainsi trouvé que des segments ordinaires dissipent de 1 à 2% du travail utile et ai pu établir des joints particuliers ne dissipant que de 0,4 à 0,5% (occasionnellement même 0,27%, mais, dans ce dernier cas l'étanchéité était insuffisante).

Cette étanchéité se mesure en marche en coupant l'arrivée d'air et mesurant la baisse de pression en fonction du temps dans une capacité déterminée.

Malheureusement les difficultés de l'heure présente ont considérablement entravé mes recherches, surtout en rendant impossible l'obtention des matières dont j'avais besoin.

**Rolin Wavre.** — *Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens.*

Dans la séance du 7 mai 1942, nous avons indiqué un procédé pour décomposer un élément  $f$  de l'espace  $E$  (espace fonctionnel ou espace d'Hilbert) en série procédant suivant les éléments propres  $f^\alpha$  de l'opérateur  $A^2$  déduit d'un hermitien  $A$ . On posait si l'opérateur est régulier (c'est-à-dire à  $\varpi \neq 0$ )

$$f_0^\alpha = \varpi (f_0^\alpha) f^\alpha + f_0^{\alpha+1},$$

$f^\alpha$  étant la limite des itérées par  $A^2$  de  $f_0^\alpha$  et  $f_0^{\alpha+1}$  étant un nouveau reste. On obtenait par réduction transfinie

$$f = f_0^0 = \sum_{\alpha} \varpi (f_0^\alpha) f^\alpha + h \quad (1)$$

avec

$$A(h) = 0. \quad (2)$$

On a donc

$$A^2(f) = \sum_{\alpha} \varpi (f_0^\alpha) l_{\alpha}^2 f^\alpha \quad \text{et} \quad A^2(f^\alpha) = l_{\alpha}^2 f^\alpha.$$

Cette décomposition de  $f$  n'introduit que des éléments propres  $f^\alpha$  en lesquels  $f$  se décompose effectivement. La sommation dans (1) s'étend à un ensemble dénombrable de valeurs, qui rangé par ordre des  $l_\alpha$  décroissants, donne lieu aux relations

$$l_1 > l_2 > l_3 > \dots > l_\omega > l_{\omega+1} > \dots > 0$$

les  $\alpha$  parcourant une suite dénombrable de nombres transfinis de classe I ou II. Les  $l_\alpha$  sont les  $l^\alpha$  de notre note précédente.

Considérons maintenant l'équation, où  $\nu$  est un nombre et  $f$  un élément donné de E, enfin,  $\varphi$  un élément inconnu de E.

$$\varphi = f + \frac{1}{\nu} A(\varphi) \quad (3)$$

on démontre facilement que toute solution de (3) est solution de (4) et réciproquement :

$$\varphi = f^* + \frac{1}{\nu^2} A^2(\varphi) \quad \text{avec} \quad f^* = f + \frac{1}{\nu} A(f) . \quad (4)$$

Décomposons, alors  $f^\alpha$ , par l'opérateur  $A^2$  à la manière rappelée ci-dessus

$$f^* = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^* f^{\alpha} + h , \quad A(h) = 0$$

et posons

$$\varphi = f^* + \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}^2 f_{\alpha}^*}{\nu^2 - l_{\alpha}^2} f^{\alpha} , \quad (5)$$

Si  $|\nu|$  est différent des  $l_{\alpha}$  et des points d'accumulation des  $l_{\alpha}$ , (5) fournit une solution de (3). Si  $|\nu| = l_{\alpha}$ , il n'y a pas de solution de (3). Si  $|\nu|$  est une valeur propre de l'opérateur A qui ne soit ni un  $l^{\alpha}$ , ni un point d'accumulation des  $l_{\alpha}$ , alors la solution  $\varphi$  n'est déterminée qu'à un élément près, solution générale de l'équation (3) homogène: ( $f = 0$ ).

Si enfin  $|\nu| = \lim l_{\alpha}$ , sans que  $|\nu|$  soit un  $l_{\alpha}$ , alors la série (5) fournit encore une solution pourvu que la série suivante converge

$$\sum_{\alpha'} \left( \frac{f_{\alpha'}^*}{|\nu| - l_{\alpha'}} \right)^2 .$$

Et si dans ce cas  $|\nu|$  est une valeur propre autre qu'un  $l_\alpha$ , alors à la solution (5) on peut ajouter la solution générale de l'équation (3) homogène ( $f = 0$ ).

On voit comment se présentent par cette méthode d'itération des opérateurs hermitiens et de réduction transfinie les théorèmes d'Hilbert-Schmidt.

Reprenant (5) on voit que la fonction analytique  $\varphi$  de  $\nu$  admet les pôles simples  $\nu = \pm l_\alpha$ , lesquels peuvent avoir des points d'accumulation  $a$  à distance finie, les  $a$  pouvant à leur tour en avoir, comme le permet la théorie des nombres transfinis. Il n'y a pas d'autre singularité pour  $\varphi|\nu|$ , que les points  $\pm l_\alpha$  et les points du dérivé de l'ensemble  $\pm l_\alpha$ .

Avec le paramètre habituel  $\lambda$  de Fredholm on aurait donc

$$\varphi|\lambda| = f^* + \lambda^2 \sum_{\alpha} \frac{f_{\alpha}^*}{\lambda_{\alpha}^2 - \lambda^2} f^{\alpha},$$

et les mêmes remarques peuvent être faites sur les points limites de pôles (le point  $\lambda = 0$  n'est jamais singulier pour un opérateur borné).

**Jean-Pierre Vigier.** — *Quelques résultats complémentaires à la théorie de l'itération des opérateurs de M. Wavre.*

Nous opérons dans l'espace  $H$  isomorphe de l'espace fonctionnel  $E_f$  et de l'espace hilbertien  $E_{\omega}$ .

δI) opérateurs hermitiens gauches.

Ils sont définis par la relation  $(Ax, x) = -(x, Ax)$ .

Les itérés d'un élément  $x_0$  normalisé, ( $\|x_0\| = 1$ ) sont donnés par les relations suivantes:

$$l_i x_i = A(x_{i-1}) ; \quad l_i = \|A(x_{i-1})\| ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Un raisonnement presque identique à celui de M. Wavre sur les opérateurs hermitiens montre que l'on a:

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$$