Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 26 (1944)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires

Autor: Kwal, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742682

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL1

PREMIÈRE PARTIE

RÉSUMÉ.

On se propose d'édifier une théorie générale des corpuscules élémentaires de spin quelconque et de masse au repos, finie ou nulle. La trame mathématique du travail est basée essentiellement sur la multiplication extérieure des matrices, opération dont les propriétés sont examinées succinctement dans l'introduction. On s'en sert pour construire les matrices de spin σ et les matrices α , en nombre de 2^{2j-1} — 1, de l'hamiltonien.

L'étude de la suite, en complexité croissante, d'équations d'onde des corpuscules élémentaires, conduit à distinguer les équations primaires et les équations secondaires: composées, mixtes et mixtes composées. Les plus simples, les équations primaires, sont formées au moyen des matrices de spin de rang le plus bas possible (2 pour le spin $\frac{1}{2}$, 4 pour le spin 1, etc. ..., 2^{2j} pour le spin j). Au corpuscule de spin j et de masse au repos nulle, on peut associer 2^{2j-1} systèmes d'équations pri-

¹ Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

ARCHIVES. Vol. 26. — Septembre-Octobre 1944.

maires. Il existe donc 2^{2j-1} espèces de cette sorte de corpuscules. Lorsqu'on introduit dans les équations primaires les termes de masse, force est d'y faire figurer les fonctions complexes conjuguées. Les équations composées de degré k, qui s'obtiennent en considérant des systèmes de k+1 équations primaires simultanées, peuvent revêtir une forme dans laquelle dans le terme de masse figure la même fonction ψ que dans le reste de l'équation, et non sa conjuguée complexe. Ainsi, les équations de Dirac se présentent-elles dans notre théorie comme les équations composées du premier degré pour $j=\frac{1}{2}$.

Lorsque $j \ge 1$, on peut former les équations mixtes, en interconnectant, par l'intermédiaire du terme de masse, les 2^{2j-1} systèmes d'équations primaires, de manière à mettre en jeu des fonctions d'ondes à $2^{2j-1} \times 2^{2j+1} = 2^{4j}$ composantes. Il existe d'ailleurs, 2^{2j-1} manières différentes d'interconnection qui conduisent à autant de systèmes d'équations.

Les deux systèmes d'équations mixtes pour le corpuscule de spin 1 donnent lieu aux équations composées du premier degré qui sont équivalentes. Ce système unique est identique aux équations du photon de M. Louis de Broglie. Pour terminer, on forme les équations mixtes, composées du premier degré, dans le cas général du spin j quelconque.

1. Introduction: Multiplication extérieure des matrices.

Soient A et B deux matrices quelconques de rang (c'est-à-dire de nombre d'indices dont sont affectés les éléments de matrice) n_1 et n_2 . L'opération de la multiplication extérieure, effectuée sur les matrices A et B, dans l'ordre $A \longrightarrow B$, a pour résultat la formation d'une matrice $C = A \times B$ de rang $n = n_1 + n_2$ dont l'élément de matrice c_{i_1, \ldots, i_n} est obtenu à partir des éléments de matrice $a_{i_1, \ldots, i_{n_1}}$ et $b_{i'_1, \ldots, i'_{n_2}}$ de la manière que voici:

$$c_{i_1, \ldots i_n} = c_{i_1, \ldots i_{n_1}, \ldots i'_{1}, \ldots i'_{n_2}} = a_{i_1, \ldots i_{n_1}} \cdot b_{i'_2, \ldots i'_{n_2}} .$$
 (1a)

Nous nous bornerons dans la suite aux matrices de rang multiple de deux. Dans ce cas, il résulte de la définition précédente la relation

$$([A \times B] [C \times D]) = [(AC) \times (BD)]$$
 (1b)

où par (AC) etc. est symbolisée la multiplication ordinaire des matrices, définie comme suit:

$$(AC)_{i_{1}, \dots i_{n}; i'_{1} \dots i'_{n}} = \sum_{k_{1}, \dots k_{n}} a_{i_{1}, k_{1}; i_{2}, k_{2}; \dots i_{n}, k_{n}} \cdot c_{k_{1}, i'_{1}; k_{2}, i'_{2}; \dots k_{n}, i'_{n}} .$$
 (1c)

Nous avons, en effet, en tenant compte de (1a) et de (1c),

$$\begin{split} \left[\left(\text{AC} \right) \times \left(\text{BD} \right) \right]_{i_{1}, \ i_{2} \ ; \ i'_{1}, \ i'_{2}} &= \sum_{k} \left(a_{i_{1}, \ k} \ c_{k \, , \ i_{2}} \right) \sum_{k'} \left(b_{i'_{1}, \ k'} \ d_{k', \ i'_{2}} \right) \\ &= \sum_{k} \sum_{k'} \left[a_{i_{1}, \ k} \ b_{i'_{1}, \ k'} \right] \left[c_{k \, , \ i_{2}} \ d_{k', \ i'_{2}} \right] = \\ &= \sum_{k} \sum_{k'} \left[\text{A} \times \text{B} \right]_{i_{1}, \ k \, ; \ i'_{1}, \ k'} \left[\text{C} \times \text{D} \right]_{ki_{2} \, ; \ k' \, i'_{2}} \, . \end{split}$$

Posons dans (1b) $C = A^{-1}$ et $D = B^{-1}$, on obtient alors $[A \times B] [A^{-1} \times B^{-1}] = [1 \times 1]. \tag{1d}$

Considérons maintenant une matrice V qui transforme une matrice donnée A en une matrice diagonale:

$$V^{-1} AV = A_d (1e)$$

Nous allons montrer que la matrice $V \times V$ transforme $1 \times A$ et $A \times 1$ en matrices diagonales $1 \times A_d$ et $A_d \times 1$, respectivement.

Effectivement, en vertu de (1b), nous avons:

Remarque. — Les matrices de rang multiple de deux peuvent être représentées de plusieurs façons au moyen des matrices de rang deux, en faisant correspondre à tout élément $c_{i_1,\ldots i_n,\ i'_1\ldots i'_n}$ un élément $c_{i_1,i'}$, obtenu en association à toute combinaison de nombres $i_1,\ldots i_n$ un nombre i et à toute combinaison de nombres $i'_1,\ldots i'_n$ un dombre i'. Si les i_k prennent toutes les valeurs entières comprises entre 1 et l_k , i prendra toutes les valeurs entières comprises entre 1 et l_1 , l_2 , l_k .

2. Equations d'ondes des corpuscules de spin quelconque, a une seule fonction d'onde associée.

2.1 Equations primaires.

Pour que l'opérateur $\mathcal{JC}=\frac{h}{i}\, \mathbf{\alpha}_{\!h}\, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\, x_{\!h}}$ représente l'hamilto-

nien relatif au corpuscule sans masse, de spin quelconque j, il faut, les σ_k étant les matrices de spin, que l'on ait

$$\alpha_i \sigma_k - \sigma_k \alpha_i = \begin{cases}
0, & \text{si } k = i \\
\pm \alpha_l, & \text{si } k \neq i
\end{cases},$$
(2.1a)

(le signe +, lorsque les nombres i, k, l forment une permutation paire des nombres 1, 2, 3; le signe -, en cas d'une permutation impaire).

Une solution particulière des relations (2.1a) est donnée par $\alpha_i = k \sigma_i$, k étant un coefficient de proportionnalité, nombre ordinaire, par ailleurs arbitraire.

Pour pouvoir résoudre les problèmes qui puissent se poser à l'occasion des corpuscules de spin quelconque, et, en particulier, pour trouver les équations auxquelles satisfont les fonctions représentant l'onde associée, nous devons construire: 1º les matrices de spin σ_k^j , 2º les matrices ${}^l\alpha_k^j$ autres que les matrices de spin, satisfaisant aux relations (2.1a). Nous prendrons comme base de départ les matrices de Pauli et nous

allons montrer que les expressions qui suivent fournissent la solution cherchée:

$$\sigma^{j} = 1 \times 1 \times ... \times 1 \times \sigma^{\frac{1}{2}} + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 + ...$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 + ... + \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 \times ... \times 1 \times 1 .$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 \times 1 = \sum_{n=1}^{2j} s_{n}$$

$$^{1}\alpha^{j} = 1 \times 1 \times ... \times 1 \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 \times 1 = \sum_{n=1}^{2j} s_{n}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 + ... - \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 + ...$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 + ... - \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 \times ... \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{n=2}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 + ... - \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 \times ... \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times \sigma^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 + ... - \sigma^{\frac{1}{2}} \times 1 \times ... \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1 \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$= \sum_{n=1}^{2j} s_{n} - s_{1} = \sigma^{j} - 2s_{1}$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ... \times 1$$

$$... + 1 \times 1 \times ..$$

 s_n^i étant un produit de 2j facteurs où σ occupe la $n^{\text{ième}}$ place:

$$s_n^j = 1 \times 1 \times ... \times 1 \times \sigma_n^{1/2} \times 1 \times ... \times 1$$
 , (2.1d)

 $n_1, n_2, \dots n_k$ sont k nombres parmi $1, 2, \dots 2j, k$ étant un entier de l'intervalle $(0, j + \frac{1}{2})$ $0 < k \le j + \frac{1}{2}$.

D'après la loi de formation des ${}^{l_k}\alpha^j$, on voit que le nombre de valeurs possibles pour l_k est égal à \mathbf{C}^k_{2j} et le nombre total des valeurs de l est égal à

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=2j} C_{2j}^k - 1 = 2^{2j-1} - 1$$
.

Voici maintenant la démonstration annoncée que (2.1b) et (2.1c) satisfont à (2.1a).

Nous avons tout d'abord

$$\sigma_{i}^{j} \, \sigma_{k}^{j} \, = \, \sum_{n} \, (s_{i})_{n} \, \sum_{n'} \, (s_{k})_{n'} \, = \, \sum_{n} \, \sum_{n'} \, (s_{i})_{n} \, (s_{k})_{n'}$$

or

$$(s_i)_n (s_k)_{n'} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 \times ... \times \sigma_i^j \times ... \times \sigma_k^j \times ... \times 1 & \text{si } n < n' \\ 1 \times 1 \times ... \times (\sigma_i \sigma_k) \times ... \times 1 & \text{si } n = n' \\ 1 \times 1 \times ... \times \sigma_i^j \times ... \times \sigma_i^j \times ... \times 1 & \text{si } n > n' \end{pmatrix}$$

donc

$$(s_i)_n (s_k)_{n'} - (s_k)_{n'} (s_i)_n = i \delta_{nn'} (s_l)_n$$
 (2.1e)

avec

$$\delta_{nn'} = \left\{ egin{array}{ll} 0 & \mathrm{si} & n
eq n' \\ 1 & \mathrm{si} & n = n' \end{array}
ight.$$

Il en résulte que

$$\begin{split} \mathbf{\sigma}_i^j \, \mathbf{\sigma}_k^j & - \mathbf{\sigma}_k^j \, \mathbf{\sigma}_i^j \, = \, \sum_{n, \, n'} \left\{ \, \left(s_i^j \right)_n \left(s_k^j \right)_{n'} - \left(s_k^j \right)_{n'} \left(s_i^j \right)_n \, \right\} \\ & = \, i \sum_{n, \, n'} \delta_{nn'} \left(s_l^j \right)_n \, = \, i \sum_{n'} \left(s_l^j \right)_{n'} \, = \, i \, \mathbf{\sigma}_l^j \ . \end{split}$$

On a de même

$$\begin{split} {}^{l_{k}}\alpha_{i}\,\sigma_{k} &-\sigma_{k}\,{}^{l_{k}}\alpha_{i}\,=\left\{\sigma_{i}-2\sum_{n_{1}}^{n_{k}}\left(s_{i}\right)_{n_{m}}\right\}\,\sigma_{k}-\sigma_{k}\left\{\,\sigma_{i}-2\sum_{n_{1}}^{n_{k}}\left(s_{i}\right)_{n_{m}}\right\}\\ &=\left.i\,\sigma_{l}-2\right\}\sum_{m}\left(s_{i}\right)_{n_{m}}\sigma_{k}-\sigma_{k}\sum_{m}\left(s_{i}\right)_{n_{m}}\left\{\\ &=\left.i\,\sigma_{l}-i\,2\sum_{m}\left(s_{l}\right)_{n_{m}}=\left.i\,\alpha_{l}\right.\right. &\text{C. Q. F. D.} \end{split}$$

Ainsi les équations (2.1a) admettent-elles 2^{2j-1} solutions du type (2.1b) et (2.1c). Nous pouvons donc attribuer au corpuscule de spin quelconque i, 2^{2j-1} hamiltoniens primaires; ce qui nous conduit, en nous restreignant de prime abord aux corpuscules sans masse, à écrire 2^{2j-1} systèmes d'équations d'onde, obtenus en faisant $\mathcal{JC}\psi = 0$ et, en adjoignant au groupe

d'équations ainsi engendré d'autres groupes complémentaires, choisies de manière à satisfaire la condition

On arrive à les déduire, ces groupes complémentaires dont le nombre est égal à 2j-1, en raisonnant comme suit. Commençons par poser

$$S^{\frac{1}{2}} = 2 \sigma_k^{\frac{1}{2}} \partial_k = 2 \left(\sigma_1^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (2.1g)$$

on a alors

$$\begin{split} (\mathbf{S}^{\frac{1}{2}})^2 &= \ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \\ (\delta_t - \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}) \ (\delta_t + \mathbf{S}^{\frac{1}{2}}) \ &= \ \Box \ = \ \delta_t^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 \\ [1 \times 1 \times ... \times \mathbf{S}_n^{\frac{1}{2}} \times ... \times 1 \times 1]^2 &= \\ &= 1 \times 1 \times ... \times \left(\underline{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}\right) \times ... \times 1 \times 1 \\ &= \left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2\right) \left[1 \times 1 \times ... \times 1 \times ... \times 1 \times 1\right] \\ &= \left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2\right) \left[\prod_{1}^{2j} (1_n)\right] \ . \end{split}$$

Afin de simplifier les notations, nous poserons en outre

$$\mathbf{S}_n^j = 1 \times 1 \times ... \times \mathbf{S}_n^{1/2} \times ... \times 1 \times 1 ; \qquad (2.1h)$$

 S_n^j est donc un produit extérieur de 2j facteurs dont 2j-1 sont constitués par la matrice unité et dont un, occupant la $n^{i\text{ème}}$ place, est la matrice — opérateur différentiel — $S^{1/2}$, définie par (2.1g).

Cela étant, on vérifie aisément que la solution cherchée, pour les équations d'onde primaires du corpuscule de spin j, se présente sous la forme de 2^{2j-1} systèmes d'équations, comprenant chacun 2j groupes de 2^{2j} équations (la fonction d'onde ψ^j ayant 2^{2j} fois plus de composantes que la fonc-

tion $\psi^{1/2}$ qui est à 2 composantes):

(j et j + 1 lorsque 2j est un nombre pair, $j - \frac{1}{2}$ et $j + \frac{1}{2}$ lorsque 2j est un nombre impair).

Nous pouvons donc dire qu'il existe 2^{2j-1} espèces de corpuscules sans masse de spin j et autant de corpuscules complémentaires.

Quant au terme de *masse*, on peut l'ajouter formellement aux équations que nous venons d'écrire, selon le procédé suivant:

Posons

$$\varkappa = \frac{mc}{h} \tag{2.1j}$$

et imposons aux \(\psi \) la condition

Ecrivons alors

$$(\partial_t + S^{1/2}) \psi = \varkappa \sigma \psi^* \tag{2.1l}$$

σ étant une matrice à déterminer. On a

$$\Box \psi = (\partial_t - S^{\frac{1}{2}}) (\partial_t + S^{\frac{1}{2}}) \psi = \varkappa (\partial_t - S^{\frac{1}{2}}) \sigma \psi^* =$$

$$= -\varkappa^2 \psi = \varkappa \sigma (\partial_t + (S^{\frac{1}{2}})^*) \psi^* .$$

D'où les deux conditions auxquelles doit satisfaire σ:

$$- S^{\frac{1}{2}} \sigma = \sigma(S^{\frac{1}{2}})^* \qquad (2.1m)$$

$$\sigma\sigma^* = -1 . \qquad (2.1n)$$

La condition (2.1m) conduit aux relations:

$$\sigma_k \, \sigma \, = \, - \, \sigma \, \sigma_k^* \tag{2.1m'}$$

 σ_k étant une matrice quelconque de Pauli. On satisfait les relations (2.1m) et (2.1n) en prenant pour σ le double de la matrice de Pauli à éléments purement imaginaires.

Les équations primaires des corpuscules de spin j peuvent de même être pourvues formellement d'un terme de masse. En voici un groupe d'équations :

$$(\delta_t \pm S_n^j) \psi = \varkappa [\sigma' \times \sigma'' \times ... \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times ... \times \sigma^{(2j)}] \psi^*$$

$$(2.10)$$

où la matrice σ , précédemment définie, figure comme $n^{\text{ième}}$ facteur et où $\sigma' \times \sigma'' \times ... \times \sigma^{(2j)}$ représente un produit de n-1 matrices unitaires à deux lignes et à deux colonnes, ne contenant qu'un nombre pair des matrices à éléments purement imaginaires. A titre d'exemple nous allons écrire les équations primaires relatives aux corpuscules de spin 1 et $^{3}/_{2}$:

$$(1) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [S^{\frac{1}{2}} \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases} \end{cases} (2) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} - [S^{\frac{1}{2}} \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$
(2.1p)

$$Spin^{-3}/2$$

$$(1) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times S^{\frac{1}{2}} \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [S^{\frac{1}{2}} \times 1 \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [S^{\frac{1}{2}} \times 1 \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} - [S^{\frac{1}{2}} \times 1 \times 1]\right) \psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} - [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(4) \end{cases} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \\ \left(\partial_{t} + [1 \times 1 \times S^{\frac{1}{2}}]\right) \psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma'] \psi^{*} \end{cases}$$

$$(4) \end{cases} \end{cases}$$

$$(5) \end{cases} \end{cases}$$

2.2 Equations secondaires.

2.21 Equations composées.

Les équations composées de degré k du corpuscule de spin j s'obtiennent en considérant un système de k+1 équations primaires simultanées. L'intérêt des équations composées réside dans la possibilité de donner aux équations une forme où dans le terme de masse figure la même fonction ψ que dans le reste de l'équation et non pas la fonction conjuguée complexe, comme c'est le cas des équations primaires. Ces équations sont donc compatibles avec l'existence d'un hamiltonien du type

$$\mathcal{H} = \frac{h}{i} \alpha_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \alpha_5 m_0 c .$$

Envisageons premièrement les équations composées du corpuscule de spin ½:

$$\begin{cases} (\partial_t + S^{\frac{1}{2}})^{(1)} \varphi = \varkappa \sigma^{(1)} \varphi^* \\ (\partial_t + S^{\frac{1}{2}})^{(2)} \varphi = \varkappa \sigma^{(2)} \varphi^* \end{cases}$$
(2.21a)

Posons

$$^{(1)}\psi = {}^{(1)}\varphi + i {}^{(2)}\varphi$$
 , $^{(2)}\psi = \sigma({}^{(1)}\varphi^* + i {}^{(2)}\varphi^*)$, $(2.21b)$

et considérons une fonction ψ à 4 composantes ((1) ψ_1 , (1) ψ_2 , (2) ψ_1 , (2) ψ_2). Les équations (2.21*a*) deviennent

$$\left(\delta_{t} + \begin{vmatrix} \mathbf{S}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} - \mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}\right)\psi = \varkappa \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix}\psi = i\varkappa \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -i \\ +i & \mathbf{0} \end{vmatrix}\psi \quad (2.21c)$$

ce qui n'est qu'une des représentations possibles de l'équation de Dirac. D'une manière plus générale nous écrirons pour cette équation

$$(\delta_t + [\sigma^l \times S^{1/2}])\Psi = i\varkappa[\sigma^k \times 1]\psi$$
 (2.21d)

Or

$$\begin{split} \Box \, \psi &= \, i \varkappa \big(\eth_t - [\sigma^l \times \mathbf{S}^{1\!/2}] \big) [\sigma^k \times \mathbf{1}] \psi \, = \\ &= \, i \varkappa [\sigma^k \times \mathbf{1}] \, \big(\eth_t + [\sigma^l \times \mathbf{S}^{1\!/2}] \big) \psi \, = \, - \, \varkappa^2 \, \psi \ . \end{split}$$

D'où les conditions:

$$(\sigma^l)^2 = (\sigma^k)^2 = 1$$
, $\sigma^k \sigma^l = -\sigma^l \sigma^k$. (2.21*e*)

Donc σ^k et σ^l sont les doubles de deux matrices différentes de Pauli $(k \neq l)$.

En formant les équations composées de degré supérieur à un, pour le corpuscule de spin ½, on aboutit aux équations de Whittaker. Nous reviendrons encore sur ce point plus loin.

Pour le spin $j > \frac{1}{2}$, chaque système d'équations va donner naissance à une suite autonome d'équations composées. Pour chaque groupe, on déduit, par exemple, les équations composées de degré 1 qui sont les suivantes:

$$\pm \begin{vmatrix} \mathbf{S}_n^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} - \mathbf{S}_n^j \end{vmatrix} \psi = i \varkappa \begin{vmatrix} \mathbf{0}, \ [\mathbf{\sigma}' \times \mathbf{\sigma}'' \times ... \times \mathbf{\sigma}^{(n-1)} \times \mathbf{\sigma} \times \mathbf{\sigma}^{(n+1)} \times ... \times \mathbf{\sigma}^{(2j)}] \\ - [\mathbf{\sigma}' \times \mathbf{\sigma}'' \times ... \times \mathbf{\sigma}^{(n-1)} \times \mathbf{\sigma} \times \mathbf{\sigma}^{(n+1)} \times ... \times \mathbf{\sigma}^{(2j)}], \ \mathbf{0} \end{vmatrix} \Psi$$

$$(2.21f)$$

où ψ est une fonction à 2^{2j+1} composantes, définie par les relations:

$$^{(1)}\psi = {}^{(1)}\varphi + i {}^{(2)}\varphi ;$$

$$^{(2)}\psi = [\sigma' \times \sigma'' \times ... \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times ... \times \sigma^{(2j)}] ({}^{(1)}\varphi^* + i {}^{(2)}\varphi^*) .$$

$$(2.21g)$$

Ces relations devant jouer simultanément pour les 2j groupes d'équations du corpuscule de spin j, il faut que l'on ait

$$\sigma' = \sigma'' = \dots = \sigma^{(n-1)} = \sigma^{(n+1)} = \dots = \sigma^{(2j)} = \sigma$$
.

On posera, d'une manière générale:

$$\left(\partial_t \pm \left[\sigma^l imes \mathrm{S}_n^j
ight] \right) \psi \, = \, i arkappa igg[\sigma^h \, imes igg] rac{2j}{4} \, \sigma igg] \psi \; , \qquad (2.21h)$$

et l'on démontrera, comme précédemment, que les matrices σ^l et σ^k satisfont aux relations (2.21*e*).

2.22 Equations mixtes.

Ce type d'équations peut être formé pour $j > \frac{1}{2}$, en interconnectant par l'intermédiaire du terme de masse les 2^{2j-1} systèmes d'équations primaires (de 2^{2j-1} manières différentes, donc il existe, pour le spin j, 2^{2j-1} systèmes d'équations mixtes), de façon à obtenir des systèmes où jouent des fonctions d'onde à $2^{2j-1} \times 2^{2j+1} = 2^{4j}$ composantes. Avant de nous attaquer au cas général, nous allons pour plus de clarté traiter le cas particulier du spin 1.

Reprenons les équations (2.1p) en combinant les systèmes (1) et (2) de la manière que voici:

$$(1) \begin{cases} \left(\partial_t + \operatorname{S}^1_2 \right) \psi = \varkappa [\sigma' \times \sigma] \varphi^* , \\ \left(\partial_t + \operatorname{S}^1_2 \right) \varphi = -\varkappa [\sigma' \times \sigma] \psi^* , \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \left(\partial_t + \operatorname{S}^1_1 \right) \psi = i \varkappa [1 \times 1] \varphi \\ \left(\partial_t - \operatorname{S}^1_1 \right) \varphi = i \varkappa [1 \times 1] \psi \end{cases}$$

$$(2.22a)$$

$$(1) \begin{cases} \left(\partial_t + S_1^1\right)\psi = i\varkappa[1\times 1]\varphi ,\\ \left(\partial_t - S_2^1\right)\varphi = i\varkappa[1\times 1]\psi , \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \left(\partial_t + S_1^1\right)\psi = \varkappa[\sigma\times\sigma']\varphi^* \\ \left(\partial_t + S_1^1\right)\varphi = -\varkappa[\sigma\times\sigma']\psi^* . \end{cases}$$

$$(2.22b)$$

Dans un groupe d'équations figurent aux termes de masse des fonctions ψ^* et φ^* , tandis que dans un autre, les fonctions ψ et φ . Cela résulte des conditions de compatibilité des équations du type (1) et de celles du type (2), question dont il sera question plus tard. L'étude de l'écriture relativiste de ces équations conduit, par ailleurs, clairement à la même constatation. Quant aux matrices σ' , leur structure résulte des conditions:

$$\Box \psi = - \varkappa^2 \psi \quad \text{et} \quad \Box \varphi = - \varkappa^2 \varphi \ .$$

On a ainsi, par exemple:

$$\begin{split} \Box \, \psi \, = \, \left(\eth_t - \operatorname{S}^1_2 \right) \left(\eth_t + \operatorname{S}^1_2 \right) \psi \, = \, \varkappa \left(\eth_t - \operatorname{S}^1_2 \right) \left[\sigma' \times \sigma \right] \phi^* \\ &= \, \varkappa [\sigma' \times \sigma] \left(\eth_t + \operatorname{S}^{1*}_2 \right) \phi^* = - \, \varkappa^2 [\sigma' \times \sigma] [\sigma' \times \sigma]^* \psi = - \, \varkappa^2 \psi \; ; \end{split}$$

d'où l'on tire $\sigma'\sigma'^* = -1$, relation qui est satisfaite en prenant pour σ' la matrice σ à éléments purement imaginaires.

Nous condenserons les écritures en prenant une fonction d'onde unique $\Psi(\psi, \phi)$. Ensuite nous écrirons d'une manière plus générale:

$$\begin{split} \left(\mathbf{d}_t + [\mathbf{\sigma}^l \times \mathbf{S}_n^1] \right) \Psi &= \varkappa [\mathbf{\sigma}^k \times \mathbf{\sigma} \times \mathbf{\sigma}] \Psi^* \; ; \\ \left(\mathbf{d}_t + [\mathbf{\sigma}^{l'} \times \mathbf{S}_{n'}^1] \right) \Psi &= i \varkappa [\mathbf{\sigma}^{k'} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}] \Psi \quad (2.22a') \\ \left(\mathbf{d}_t + [\mathbf{\sigma}^{l'} \times \mathbf{S}_n^1] \right) \Psi &= i \varkappa [\mathbf{\sigma}^{k'} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}] \Psi \; ; \\ \left(\mathbf{d}_t + [\mathbf{\sigma}^l \times \mathbf{S}_n^1] \right) \Psi &= \varkappa [\mathbf{\sigma}^k \times \mathbf{\sigma} \times \mathbf{\sigma}] \Psi^* \; . \end{split}$$

On a alors

$$\Box \Psi = \varkappa \left(\partial_t - [\sigma^l \times S_n^1] \right) [\sigma^k \times \sigma \times \sigma] \Psi^* = \varkappa [\sigma^k \times \sigma \times \sigma] \left(\partial_t + [\sigma^l \times S_n^1]^* \right) \Psi^*$$

$$= \varkappa^2 [\sigma^k \times \sigma \times \sigma] [\sigma^k \times \sigma \times \sigma]^* \Psi = - \varkappa^2 \Psi ;$$

d'où
$$\sigma^k \sigma^{k*} = -1$$
, donc $\sigma^k = \sigma$, et $\sigma^l \sigma^k = \sigma^k (\sigma^l)^*$, donc $\sigma^l = 1$.

D'autre part

$$\begin{array}{l} \square \, \Psi = \, i \varkappa \big(\eth_t - [\sigma^{l'} \times \operatorname{S}^1_n] \big) [\sigma^{h'} \times 1 \times 1] \Psi = \, i \varkappa [\sigma^{h'} \times 1 \times 1] \big(\eth_t + [\sigma^{l'} \times \operatorname{S}^1_n] \big) \Psi \\ = \, - \, \varkappa^2 \, \Psi \, ; \end{array}$$

d'où $\sigma^{l'}\sigma^{h'} = -\sigma^{h'}\sigma^{l'}$, donc $\sigma^{l'}$ et $\sigma^{h'}$ sont deux matrices de Pauli (avec $l' \neq k'$).

Passons maintenant au cas général du spin j. D'après ce que nous avons vu nous devons distinguer deux types d'équations:

1º Le type A:

$$\left(\delta_t + \left[\prod_{i=1}^{2j-1} \sigma^{li} imes \mathrm{S}_n^j \right] \right) \Psi = \varkappa \left[\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{ki} imes \prod_{1}^{2j} \sigma \right] \Psi^* ; \quad (2.22c)$$

2º Le type B:

$$\left(\mathbf{d}_t + \prod_{1}^{2j-1} \mathbf{g}^{l'i} \times \mathbf{S}_{n'}^{j}\right) \Psi = i \varkappa \left[\prod_{1}^{2j-1} \mathbf{g}^{h'i} \times \prod_{1}^{2j} \mathbf{1}\right] \Psi \ . \quad (2.22d)$$

La condition $\Box \Psi = -\varkappa^2 \Psi$ conduit aux relations suivantes:

$$\left(\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{l_i}
ight) \left(\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{k_i}
ight) \,=\, \left(\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{k_i}
ight) \left(\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{l_i}
ight)^{m{st}} \,. \qquad (2.22e)$$

$$\left(\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{k_i} \sigma^{k_i^*}\right) \left(\prod_{1}^{2j} \sigma \sigma^*\right) = -1 \qquad (2.22f)$$

$$\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{l'i} \sigma^{k'i} = - \prod_{1}^{2j-1} \sigma^{k'i} \sigma^{l'i} . \qquad (2.22g)$$

Comme $\sigma\sigma^* = -1$, nous voyons que suivant que 2j est impair ou pair, nous devons avoir, respectivement, un nombre pair ou impair des matrices σ^{k_i} satisfaisant à la condition $\sigma^{k_i}\sigma^{k_i^*} = -1$, c'est-à-dire telles que $\sigma^{k_i} = \sigma$. Par ailleurs nous devons avoir un nombre pair p de couples de matrices satisfaisant à la relation

$$\sigma^{l}i \sigma^{k}i = -\sigma^{k}i (\sigma^{l}i)^*$$

et 2j — p de couples de matrices satisfaisant à

$$\sigma^{l_i} \, \sigma^{k_i} \, = \, \sigma^{k_i} (\sigma^{l_i})^* \; ; \;$$

ainsi qu'un nombre impair p' de couples de matrices satisfaisant à

et un nombre 2j-p' de couples de matrices satisfaisant à

$$\sigma^{l'}i \, \sigma^{k'}i = \sigma^{k'}i \, \sigma^{l'}i$$
.

Les relations (2.22e, f et g) sont relatives aux matrices du même groupe d'équations. Il existe des relations analogues qui relient entre elles les matrices σ^{li} , σ^{hi} , σ^{hi} et σ^{li} , relatives aux groupes différents (caractérisés par les différentes valeurs de l'indice n) d'un même système d'équations (caractérisé par l'indice r). Nous appellerons l'ensemble de ces relations, les relations de compatibilité.

Voici, par exemple, comment on en obtient une partie:

$$\begin{split} &\left(\partial_{t}-\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(l_{i})}n_{1}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{1}}^{j} \end{bmatrix}\right)\left(\partial_{t}+\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(l_{i})}n_{2}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{2}}^{j} \end{bmatrix}\right)\psi=\\ &=\left(\partial_{t}-\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(l_{i})}n_{2}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{2}}^{j} \end{bmatrix}\right)\left(\partial_{t}+\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(l_{i})}n_{1}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{1}}^{j} \end{bmatrix}\right)\psi=\\ &=\left(\partial_{t}-\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(l_{i})}n_{2}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{1}}^{j} \end{bmatrix}\right)\varkappa\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(k_{i})}n_{1}\,\times\,\frac{2j}{\Pi}\,\sigma\end{bmatrix}\psi^{*}\\ &=\varkappa\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(k_{i})}n_{1}\,\times\,\frac{2j}{\Pi}\,\sigma\end{bmatrix}\left(\partial_{t}+\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,(\sigma^{(l_{i})}n_{2})^{*}\,\times\,\mathbf{S}_{n_{2}}^{j*} \end{bmatrix}\right)\psi^{*}\\ &=\varkappa^{2}\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(k_{i})}n_{1}\,\times\,\frac{2j}{\Pi}\,\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,(\sigma^{(k_{i})}n_{2})^{*}\,\times\,\frac{2j}{\Pi}\,(\sigma)^{*} \end{bmatrix}\psi\\ &=(-1)^{2j}\,\varkappa^{2}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2j-1}{\Pi}\,\sigma^{(k_{i})}n_{1}\,\frac{2j-1}{\Pi}\,(\sigma^{(k_{i})}n_{2})^{*}\,\times\,\frac{2j}{\Pi}\,1\end{bmatrix}\psi\;. \end{split}$$

Or les expressions précédentes doivent être égales aussi à:

$$\begin{split} & \left(\eth_t + \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, \sigma^{(l_i)} n_1 \, \times \, \mathbf{S}_{n_1}^j \end{bmatrix} \right) \varkappa \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, \sigma^{(k_i)} n_2 \, \times \, \prod_1^{2j} \, \sigma \end{bmatrix} \psi^* \\ & = \varkappa \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, \sigma^{(k_i)} n_2 \, \times \, \prod_1^{2j} \, \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eth_t + \prod_1^{2j-1} \, (\sigma^{(l_i)} n_1)^* \, \times \, \mathbf{S}_{n_1}^{*j} \end{bmatrix} \psi^* \\ & = \varkappa^2 \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, \sigma^{(k_i)} n_2 \, \times \, \prod_1^{2j} \, \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, (\sigma^{(k_i)} n_1)^* \, \times \, \prod_1^{2j} \, \sigma^* \end{bmatrix} \psi \\ & = (-1)^{2j} \varkappa^2 \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, \sigma^{(k_i)} n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2j-1}{\Pi} \, (\sigma^{(k_i)} n_1)^* \, \times \, \prod_1^{2j} \, 1 \end{bmatrix} \psi \end{split}$$

Des raisonnements analogues doivent être faits à propos des équations du type B, ainsi que pour un groupe A et un autre du type B (appartenant tous au même système d'équations). On aboutit ainsi à l'ensemble suivant de relations de compatibilité:

$$\begin{array}{lll}
\Pi & \sigma^{(l_i)} n_1 & \Pi & \sigma^{(k_i)} n_2 & = & (-1)^{(1-\delta_{n_1}, n_2)} \Pi & \sigma^{(k_i)} n_2 & \Pi & (\sigma^{(l_i)} n_1) * \\
\Pi & \sigma^{(l'_i)} n_1 & \Pi & \sigma^{(k'_i)} n_2 & = & (-1)^{\delta_{n_1}, n_2} \Pi & \sigma^{(k'_i)} n_2 & \Pi & \sigma^{(l'_i)} n_1 \\
\Pi & \sigma^{(l_i)} & \Pi & \sigma^{(k_i)} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)} \Pi & (\sigma^{(l_i)}) * \\
\Pi & \sigma^{(l_i)} & \Pi & \sigma^{(k_i)} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)} \Pi & (\sigma^{(l'_i)}) * \\
\Pi & \sigma^{(l_i)n_1} & \Pi & \sigma^{(l_i)n_2} & = & \Pi & \sigma^{(l_i)n_2} \Pi & \sigma^{(l_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{(l_i)n_1} & \Pi & \sigma^{(l_i)n_2} & = & \Pi & \sigma^{(l'_i)n_2} \Pi & \sigma^{(l'_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{l_i} & \Pi & \sigma^{l_i} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & (\sigma^{(k_i)n_1}) * \\
\Pi & \sigma^{(k_i)n_1} & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{(k_i)n_1} & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_2} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_2} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \\
\Pi & \sigma^{k_i} & \Pi & (\sigma^{k_i})^{n_1} & = & \Pi & \sigma^{(k_i)n_1} \Pi & \sigma^{(k_i)n_1}$$

Nous allons donner maintenant le nombre r de groupes du type A et le nombre 2j - r de groupes du type B dans chacun des 2^{2j-1} systèmes d'équations relatives au spin j:

Spin	Type A	Туре В	Nombre total de groupes	
$ \begin{array}{c c} 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2j & \text{impair} \\ \text{pair} \end{array} $	1 1 ou 3 1 ou 3 1 ou 5 1, 3 ou 5	1 2 ou 0 2 ou 1 4, 2 ou 0	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	(2.22~i)

Lorsque les r groupes du type A sont pris d'une manière quelconque parmi les 2i groupes:

$$\left(\delta_t + \left[\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{(l_i^r)_n} \times S_n^j\right]\right) \psi = \varkappa \left[\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{(k_i^r)_n} \times \prod_{1}^{2j} \sigma\right] \psi^*$$

$$n = 1, 2, \dots 2j$$

alors que les 2j - r groupes du type B sont fixés, parmi les 2j groupes,

$$\left(\partial_t + \left[\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{(l_i^{2j-r})_{n'}} \times S_{n'}^j \right] \right) \psi = i \varkappa \left[\prod_{1}^{2j-1} \sigma^{(k_i^{2j-r})_{n'}} \times \Pi \mathbf{1} \right] \Psi ,$$

$$n' = 1, 2, \dots 2j$$

par la condition $n' \neq n$. Il y a ainsi C_{2j}^r systèmes admettant r groupes du type A et 2j-r groupes du type B, donc, au total, $\Sigma' C_{2j}^r$ systèmes, la somme Σ' étant étendue à toutes les valeurs impaires de r, comprises entre 1 et 2j. Or, d'après une relation bien connue $C_{2j}^r = C_{2j-1}^r + C_{2j-1}^{r-1}$. On voit donc que $\Sigma' C_{2j}^r = \sum_{0}^r C_{2j-1}^r$, où la dernière somme est étendue à toutes les valeurs entières de r comprises entre 0 et 2j-1. Elle est donc bien égale à 2^{2j-1} . Les 2^{2j-1} systèmes, obtenus en prenant pour le nombre 2j-r de groupe B un nombre impair, sont équivalents aux systèmes complexes conjugués des systèmes précédents.

2.23 Equations mixtes composées.

Nous allons suivre la même procédure qu'au § 2.21. Tout d'abord nous allons former les équations mixtes composées du premier degré pour le corpuscule de spin 1. Partons, par exemple, des équations (2.22b):

et introduisons une fonction d'onde $\Psi(^{(1)}\Psi, {}^{(2)}\Psi, {}^{(3)}\Psi$ et ${}^{(4)}\Psi)$, formée de la manière suivante:

$${}^{(1)}\Psi = {}^{(1)}\psi + i {}^{(2)}\psi \qquad {}^{(3)}\Psi = -i[\sigma \times \sigma] \left({}^{(1)}\varphi^* + i {}^{(2)}\varphi^* \right) \qquad (2.23b)$$

$${}^{(2)}\Psi = {}^{(1)}\varphi + i {}^{(2)}\varphi \qquad {}^{(4)}\Psi = +i[\sigma \times \sigma] \left({}^{(1)}\psi^* + i {}^{(2)}\psi^* \right) \qquad (2.23b)$$
Archives. Vol. 26. — Septembre-Octobre 1944.

Les équations (2.23a) prennent alors la forme suivante:

$$egin{aligned} \left(\mathbf{d}_t + \left[\mathbf{\sigma}_{_{\! 3}} imes \mathbf{1} imes \mathbf{S}_{_{\! 1}}^{^{1}} \right] \mathbf{\Psi} &= i arkappa \left[\mathbf{\sigma}_{_{\! 1}} imes \mathbf{1} imes \prod_{1}^{2} \mathbf{1} \right] \mathbf{\Psi} \ \\ \left(\mathbf{d}_t + \left[\mathbf{1} imes \mathbf{\sigma}_{_{\! 3}} imes \mathbf{S}_{_{\! 2}}^{^{1}} \right] \right) \mathbf{\Psi} &= i arkappa \left[\mathbf{1} imes \mathbf{\sigma}_{_{\! 1}} imes \prod_{1}^{2} \mathbf{1} \right] \mathbf{\Psi} \end{aligned} \end{aligned}$$
 (2.23c)

où les matrices σ_1 et σ_3 sont les doubles de deux matrices réelles de Pauli.

En appliquant le même procédé aux équations (2.22a) nous aboutissons aux équations suivantes:

$$\left(\mathbf{d}_t + \left[\mathbf{1} \times \mathbf{\sigma}_3 \times \mathbf{S}_1^1 \right] \right) \Psi' = i \varkappa \left[\mathbf{1} \times \mathbf{\sigma}_1 \times \prod_{1}^2 \mathbf{1} \right] \Psi'$$
 $\left(\mathbf{d}_t + \left[\mathbf{\sigma}_3 \times \mathbf{1} \times \mathbf{S}_2^1 \right] \right) \Psi' = i \varkappa \left[\mathbf{\sigma}_1 \times \mathbf{1} \times \prod_{1}^2 \mathbf{1} \right] \Psi'$. (2.23d)

La transformation, définie par la matrice unitaire:

$$U = \frac{1}{2} ([1 \times 1] + [\sigma_1 \times \sigma_1] + [\sigma \times \sigma] + [\sigma_3 \times \sigma_3]) [1 \times 1] \quad (2.23e)$$
permet de prouver l'équivalence de $(2.23c)$ et de $(2.23d)$.

Donc les équations composées du premier degré, auxquelles donnent lieu les deux systèmes d'équations mixtes pour le corpuscule de spin 1, sont équivalentes. Ce système unique d'équations mixtes composées pour j=1 est d'ailleurs identique au système d'équations que M. Louis de Broglie a mis à la base de sa théorie du photon.

Dans le cas général du spin j quelconque, nous avons:

$$\left(\partial_t + \left[\Pi \, \sigma^{li} \times \mathbf{S}_n^j \right] \right)^{(1)} \psi = \varkappa \left[\Pi \, \sigma^{ki} \times \Pi \, \sigma \right]^{(1)} \psi^*$$

$$\left(\partial_t + \left[\Pi \, \sigma^{li} \times \mathbf{S}_n^j \right] \right)^{(2)} \psi = \varkappa \left[\Pi \, \sigma^{ki} \times \Pi \, \sigma \right]^{(2)} \psi^*$$

$$(2.23f)$$

et les équations du type B, doublées de la même manière. En posant:

$$^{(1)}\Psi \,=\,^{(1)}\psi \,+\,i\,^{(2)}\psi \,\,\,\,\,\,^{(2)}\Psi = -\,i[\Pi\,\sigma^{(ki)}{}^{n_0}\, imes\,\Pi\,\sigma]\,(^{(1)}\psi^* +\,i\,^{(2)}\psi^*)$$
 ,

nous obtenons, compte tenu des relations de compatibilité, les équations suivantes:

$$\begin{array}{l} \left(\eth_{t} + \left[\sigma_{3} \times \Pi \, \sigma^{(li)_{n}} \times \mathrm{S}_{n}^{j} \right] \right) \Psi = i \varkappa \left[\sigma_{1} \times \Pi \, \left(\sigma^{(ki)_{n}} \, \sigma^{(ki)_{n_{0}}} \right) \times \Pi \, 1 \right] \Psi \\ \left(\eth_{j} + \left[1 \times \Pi \, \sigma^{(l'i)_{n'}} \times \mathrm{S}_{n'}^{j} \right] \right) \Psi = i \varkappa \left[1 \times \Pi \, \sigma^{(k'i)_{n'}} \times \Pi \, 1 \right] \Psi \end{array} \right) \\ \left(\grave{a} \; suivre \right) \end{array}$$

$$\left(\grave{a} \; suivre \right)$$