Principe de correspondance d'une mécanique asymptotique classique

Autor(en): **Stueckelberg, Ernest-C.-G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **26 (1944)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742725

Mais on montre, d'autre part, que les inégalités suivantes sont valables

$$\mu^2 E_{\Delta\mu}(z) \leqq A^2 E_{\Delta\mu}(z) \leqq (\mu + \Delta\mu)^2 E_{\Delta\mu}(z) \; .$$

Donc

$$A^2 z = \int_0^{+\infty} \mu^2 \, dE_\mu(z) \; .$$

Ensuite, par des artifices, un peu long à résumer ici, on peut écrire:

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, dE_\mu(z) \; , \tag{2}$$

ce qui fournit la décomposition spectrale de Az. Cette méthode extrêmement rapide est fondée, comme on le voit, uniquement sur la distribution asymptotique (1) des normes des itérés des différents éléments. L'inverse, à savoir déduire (1) de (2) ne ferait aucune difficulté.

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Principe de correspondance d'une mécanique asymptotique classique.*

Pendant ces dernières années, différentes recherches ont donné des résultats qui montrent que le continu espace-temps est doué d'une structure atomique analogue à la composition du continu matériel par ses molécules ou, mieux encore, parallèle à la structure imposée par la nature quantique de l'énergie-quantité de mouvement.

On a pu démontrer (Wentzel [1] [1], Dirac [2] et l'auteur [3, 11] que l'équation de mouvement de l'électron ponctuel (qte. de mouvement $\pi^\alpha(\lambda) = m\dot{z}^\alpha(\lambda)$, événement $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)\big)$ établie

[1] Pour la littérature, voir la communication suivante de Stueckelberg et Bouvier.

par Lorentz est valable, en toute rigueur, pour l'électron ponctuel de masse m soumise à une force incidente $f^\alpha(\pi, z)$:

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\pi}^\alpha - \eta_1' \lambda_0^2 \left(\dddot{\pi}^\alpha - 3\pi^\alpha m^{-2} (\ddot{\pi}, \dot{\pi})\right) + \ldots\right) - \\ &\qquad - \lambda_0 \left((\ddot{\pi}^\alpha - \pi^\alpha m^{-2} (\dot{\pi}, \dot{\pi})\right) - \xi_1' \lambda_0^2 (\ddddot{\pi}^\alpha - \ldots) + \ldots) \\ &+ \lambda_0^2 \left(\eta_{00}' \dot{\pi}^\alpha m^{-2} (\dot{\pi} \dot{\pi}) + \ldots\right) - \lambda_0^3 (\xi_{00}' \ldots) \\ &\qquad = f^\alpha + \zeta_1 \lambda_0 \left(\dot{f}^\alpha - \pi^\alpha m^{-2} (\dot{\pi}, f)\right) + \ldots \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Dirac [2] a remarqué le premier qu'il y a des solutions non physiques de (1.1)) par exemple pour

$$f^\alpha = 0, \quad \eta'_{ik\ldots} = \xi'_{ik\ldots} = \zeta'_{ik\ldots} = 0,$$

$$\pi^\alpha = m \sinh (e^{\lambda/\lambda_0} + \text{const.})$$

la particule s'accélérant d'une manière continuelle jusqu'à atteindre la vitesse de lumière (qte. de mouv. infinie) sans aucune cause. Pour pouvoir éliminer ce mouvement paradoxal, il a été obligé d'introduire une *condition finale:*

$$\dot{\pi}^\alpha(+\mathrm{T}) = 0\ ; \qquad \lim (+\mathrm{T}) = \lim z^4 (+\Lambda) \longrightarrow +\infty \qquad (1.2)$$

en plus des conditions initiales habituelles:

$$\left.\begin{aligned}\pi^\alpha (-\mathrm{T}) &= \text{qte. de mouv. donné} \\ z^\alpha (-\mathrm{T}) &= \text{endroit donné}\end{aligned}\right\} \lim (-\mathrm{T}) \longrightarrow -\infty \qquad (1.3)$$

Seule du reste la condition $+\mathrm{T} \longrightarrow +\infty$ donnait le résultat cherché. Pour l'époque initiale, une condition asymptotique analogue ($-\mathrm{T} \longrightarrow -\infty$) s'impose pour ne pas être amené à des états du passé ($t < -\mathrm{T}$) très singuliers.

En toute généralité les lois de la physique microscopique ont ainsi la forme:

$$\dot{\mathrm{F}} = f_0 (\mathrm{F}, \mathrm{G}, \ldots) + \lambda_0 f_1 (\mathrm{F}, \dot{\mathrm{F}}, \ddot{\mathrm{F}}, \ldots \mathrm{G}, \dot{\mathrm{G}}, \ldots) + \lambda_0^2 f_2 + \ldots \qquad (1.4)$$

où $\dot{F} = dF/d\lambda$ (ou $= dF/dt$) est la dérivée d'une grandeur physique F par rapport au temps propre λ (ou au temps ordinaire x^4 ($x^4 = ct$; $[\lambda] = [x^4] = cm$) et où f_n est de l'ordre $n + 1$ en $(d/d\lambda)$. La *mécanique rationnelle* est le cas-limite $\lambda_0/c = t_0 \longrightarrow 0$ où l'« atome du temps » t_0 tend vers zéro. Elle permet, entre autres, d'exprimer l'état final $F(+T)$ en termes de l'état initial, soit:

$$\lim_{\lambda_0 \to 0} F(+T) = F(-T) + \int_{-T}^{+T} dt\, f_0(F, G, \ldots)(t) \quad . \tag{1.5}$$

Explicitement, ce résultat s'exprime par les parenthèses de Poisson:

$$F(+T) = \Big(\frac{1}{0!} F + \frac{2T}{1!}\{H, F\} + \\ + \frac{(2T)^2}{2!}\{H, \{H, F\}\} + \ldots\Big)(-T) \tag{1.6}$$

$F = F(p_1 \ldots q_n)$ et $H(p_1 \ldots q_n)$ sont la grandeur physique F et l'hamiltonienne H exprimée en termes de la valeur des $2n$ *variables canoniques* $p_1(-T) \ldots q_n(-T)$ prises à l'époque initiale $t = -T$.

La *mécanique asymptotique* que nous proposons est une théorie qui exprime une grandeur physique $F(+T)$ à l'époque finale directement en termes de la valeur initiale $F(-T)$, $G(-T)$, ... des variables F, G, ..., soit:

$$F(+T) = F(-T) + g(F, G, \ldots)(-T) \tag{1.7}$$

De telles grandeurs physiques sont par exemple la trajectoire d'une particule sans spin:

$$y^\alpha = m^{-1} p^\alpha \lambda + q^\alpha \; ; \quad (p, p) = -m^2 \; ; \quad p^4 \geqslant 0 \tag{1.8}$$

et l'onde scalaire («*champ électro-magnétique*» $\varphi = \ldots(c, c^*)$)

$$\big((\mu, \mu) = -\varkappa^2 \; ; \quad \mu^4 \geqslant 0\big)$$

$$\sqrt{2}\,\varphi(x) = \Sigma (V\mu^4)^{-1/2} \Big(c(\vec{\mu}) \exp\big(i(\mu, x)\big) + c^*(\vec{\mu}) \exp\big(-i(\mu, x)\big)\Big) \tag{1.9}$$

caractérisés par les $2(4+\infty)$ *paramètres canoniques* $p^1(\pm\Lambda)\ldots, \ldots, c(\vec{\mu})(\pm \mathrm{T}) = 2^{-\frac{1}{2}}\big(p(\vec{\mu}) - iq(\vec{\mu})\big)$ (= « constantes » d'intégration), qui ont des valeurs différentes pour l'époque initiale ($-\Lambda$ et $-\mathrm{T}$) et pour l'époque finale ($+\Lambda$ et $+\mathrm{T}$) dès qu'une interaction a pris place entre $-\mathrm{T}$ et $+\mathrm{T}$. En termes des parenthèses de Poisson, (1.7) s'écrit :

$$\mathrm{F}(+\mathrm{T}) = \left(\frac{1}{0!}\mathrm{F} + \frac{1}{1!}\{\alpha, \mathrm{F}\} + \frac{1}{2!}\Big\{\alpha, \{\alpha, \mathrm{F}\}\Big\} + \ldots\right)(-\mathrm{T}) \tag{1.10}$$

$\alpha(p^1, \ldots c(\vec{\mu}) \ldots)$ doit être une invariante de Lorentz, fonction des paramètres canoniques. Les lois de conservation résultent en vertu de

$$\{\mathrm{P}^{\alpha'}, \alpha\} = \{\mathrm{M}^{\alpha''\alpha'}, \alpha\} = 0 \tag{1.11}$$

$\mathrm{P}^{\alpha'}$ et $\mathrm{M}^{\alpha''\alpha'}$ sont un quadrivecteur (= énergie-impulsion) et un tenseur antisymétrique (moment d'énergie-impulsion) définis par

$$\varphi(x+\delta x) - \varphi(x) = \Big\{\mathrm{P}^{\alpha'}\delta\tau_{\alpha'} - \frac{1}{2}\mathrm{M}^{\alpha''\alpha'}\delta\psi_{\alpha''\alpha'}, \varphi(x)\Big\}$$

$$(y+\delta y)^{\alpha} - y^{\alpha} = \Big\{\mathrm{P}^{\alpha'}\delta\tau_{\alpha'} - \frac{1}{2}\mathrm{M}^{\alpha''\alpha'}\delta\psi_{\alpha''\alpha'}, y^{\alpha}\Big\} \tag{1.12}$$

si l'espace-temps subit la transformation infinitésimale

$$x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta\tau^{\alpha} - \delta\psi^{\alpha''\alpha'}x_{\alpha'} . \tag{1.13}$$

Le principe de correspondance « mécanique asymptotique $\longrightarrow$ mécanique rationnelle » s'exprime alors par la formule (voir (5) et (7)) :

$$\lim_{\lambda_0\to 0} g(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \ldots)(-\mathrm{T}) \longrightarrow \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} dt\, f_0(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \ldots)(t) . \tag{1.14}$$

Il nous assure que, dans la limite $t_0 = \lambda_0/c \longrightarrow 0$, la mécanique rationnelle résulte. Un $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \ldots$ (série en ε) peut être donné afin que (1.1) résulte [11].