LES NOTIONS DE LOI ET D'HYPOTHÈSE PROBABILISTES

PAR

Lucien FÉRAUD

(Avec 1 fig.)

---

1. Introduction.

Lorsqu'on se propose de passer de la théorie mathématique des probabilités — ou, en termes plus élémentaires, du calcul des distributions — à l'expérience ou à l'observation dirigée, on aperçoit rapidement que ce passage de la branche pure à la branche appliquée est essentiellement fondé sur les notions de loi et d'hypothèse probabilistes. Ce sont les seules notions vraiment fondamentales dans toute théorie probabiliste: ce qui est en complet parallélisme avec la place que tiennent ces notions en dehors des probabilités.

Il s'agit, dans ce qui suit, d'indiquer une voie qui donne accès à ces deux notions fondamentales, de montrer que cette voie peut rester élémentaire et qu'il suffit de prendre à son point de départ des expériences extrêmement simples et même, si on le désire, quelques expériences de cours, parmi les plus communes.

Loi et expérience. — Dire que l'on connaît « une loi qui régit un phénomène » équivaut à dire que l'on est en mesure d'annoncer le résultat que donnerait une expérience, si elle venait à être réalisée. Quelques commentaires écarteront tout malentendu. Dans le langage courant et même dans le langage scientifique, on désigne par « expérience », au singulier, tantôt une réalisation entièrement précisée et tantôt toutes les réalisations qui se sont produites, qui se produiront et même que l'on imagine pouvoir se produire dans certaines conditions (dites les « conditions de l'expérience »): pour le premier sens, nous emploierons « réalisation effective de l'expérience » ou simplement « réalisation de l'expérience » et pour le second « classe d'expériences ». Ainsi, en revenant sur la signification d'une loi, nous remarquons que la loi n'est pas énoncée pour une réalisation mais pour une classe d'expériences et nous pouvons dire d'une manière plus précise: la connaissance d'une loi permet de passer des conditions de l'expérience à son résultat sans recourir à aucune réalisation effective [1].

Par exemple, dire que la circulation d'un courant électrique est régie par la loi d'Ohm équivaut à dire que, lorsque sont données les mesures de deux des trois grandeurs, différence de potentiel U, intensité I, résistance R, on peut affirmer, sans aucune réalisation expérimentale, que la troisième a la mesure qu'impose la relation $U = IR$. La loi d'Ohm permet donc d'« économiser » l'opération expérimentale qui donnerait la mesure de la troisième grandeur: au lieu d'effectuer cette opération, on calcule la valeur d'une variable en résolvant une équation. Ceci est valable quelles que soient les valeurs de U, I, R, entre certaines limites, c'est-à-dire dans un certain domaine.

On aperçoit très vite, dans les sciences expérimentales, qu'il ne s'agit presque jamais de mesures exactes mais seulement de mesures approchées et qu'en réalité, la loi remplace une opération expérimentale, dont le résultat pourrait être représenté par la position d'un point R sur un axe (pour fixer les idées), par le calcul d'un intervalle E de telle sorte que l'on puisse, non pas désigner la position de R, mais seulement affirmer que R est compris dans E. Il y a naturellement intérêt à ce que E soit

[1] Il ne s'agit pas ici, bien entendu, de décrire le rôle, important et complexe, de la notion de loi au sein d'une théorie mais seulement de mettre en évidence un processus caractéristique, par lequel on passe nécessairement toutes les fois que l'on applique une loi à une classe d'expériences.

aussi petit que possible; la loi exacte est le cas particulier où E se réduit à un point. En définitive, on peut ramener à un seul énoncé (R compris dans E) les conclusions auxquelles on arrive lorsque la loi est formulée par une équation ou un système d'équations (loi exacte) et lorsqu'elle est formulée par un système d'inéquations (loi approchée).

Hypothèse et critère. — L'hypothèse ne diffère de la loi que par le doute dont elle reste chargée. L'élimination de ce doute, c'est-à-dire la transformation de l'hypothèse en loi, l'admission de l'hypothèse à la « dignité de loi » est un processus fort complexe. Toute réalisation d'une expérience de la classe considérée infirme l'hypothèse ou, au contraire, elle la confirme. Lorsqu'elle la confirme, c'est une « vérification de l'hypothèse ». La confrontation de l'hypothèse au résultat d'une réalisation effective est un « critère pour la vérification de l'hypothèse ».

Dans l'exemple ci-dessus, le critère consiste dans la confrontation de la mesure de R obtenue par une opération expérimentale (U et I étant donnés) à la valeur calculée par $R = \frac{U}{I}$: le critère résulte immédiatement de l'énoncé de l'hypothèse.

Loi certaine et loi probabiliste. — Rien de ce qui concerne les probabilités n'est intervenu jusqu'ici: les lois dont nous avons parlé sont des lois *certaines* ou encore *non probabilistes*. Il est dans l'usage d'omettre toute épithète tant qu'il ne s'agit pas de marquer la différence avec l'autre type de loi qui va être caractérisé. Nous aurons donc à distinguer deux types de lois que nous appellerons respectivement les lois non probabilistes et les lois probabilistes. Nous ne nous proposons pas, ici, d'analyser, d'un point de vue épistémologique [1] la distinction entre les deux types; nous nous contenterons de montrer, sur des exemples, ce qu'est une loi probabiliste. A la notion de loi probabiliste se rattachent celles d'hypothèse et de critère probabilistes que nous envisagerons aussi.

[1] Cette analyse épistémologique est l'objet d'un article en cours d'impression: « Expérimentation et déduction probabiliste ».

2. Une seule variable.

Nous considérons, dans ce paragraphe, des classes d'expériences dont le résultat ne dépend que d'une variable, c'est-à-dire, nous supposons que le résultat auquel conduit une réalisation effective peut être indiqué (repéré) par un seul nombre, en d'autres termes, la connaissance du résultat équivaut à celle de la valeur d'une seule variable x.

Lorsque l'on dit que le phénomène (la classe d'expériences) admet une loi probabiliste, le plus souvent, on ne veut affirmer rien d'autre que l'opportunité d'associer aux résultats des réalisations une « distribution [1] à une variable » bien déterminée. Il arrive même que l'on confonde la loi probabiliste avec la distribution et que l'on dise, par exemple, qu'« un phénomène admet la loi de Laplace ».

En étudiant de plus près la loi probabiliste, on y distingue:

A. Une distribution dont on associe la variable aux résultats de la classe d'expériences, soit $X = \begin{Bmatrix} x \\ f(x) \end{Bmatrix}$ cette distribution.

B. Une première règle imposant un « degré de probabilité » α.

C. Une seconde règle déterminant, pour X et α donnés, une seule position de l'intervalle V (ou de l'ensemble d'intervalles) qui sera déclaré vide de points représentatifs des résultats, ou simplement, vide de résultats, ou même, intervalle vide.

C'est ce que vont mettre en évidence quelques exemples.

Exemple 1. — La classe d'expériences est l'opération qui consiste à mesurer une grandeur. On sait que cette opération

[1] La définition d'une distribution est purement mathématique. On pourra se contenter ici de la définition restreinte suivante: une distribution à une variable est la réunion d'une variable x et d'une fonction $f(x)$, jamais négative, continue, qui est dite « fonction de fréquence ». Au lieu de « distribution » on emploie aussi « variable aléatoire ».

donnerait, à chaque réalisation, le nombre a s'il n'y avait pas d'erreurs accidentelles — ce qui n'est qu'une manière (intuitive) d'affirmer l'opportunité d'associer aux résultats de la classe d'expériences, la distribution (de Laplace):

$$X = \left\{ \begin{array}{c} x \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right\}$$

On suppose connue, en plus de a, la « dispersion de l'erreur », c'est-à-dire le paramètre σ: pour fixer les idées, nous prendrons $\sigma = 1$. La distribution X est alors bien déterminée. Jusqu'ici n'a été formulée que la proposition A, il reste à énoncer les deux propositions ci-dessus désignées B et C. Nous prenons

pour B un degré de probabilité $\alpha = 0{,}01$

et pour C nous convenons de « placer » V de telle sorte qu'il soit complémentaire (sur la droite indéfinie) d'un intervalle $\overline{V}$ symétrique par rapport à a.

La loi probabiliste ainsi complétée aboutit à une conclusion unique bien déterminée: « l'intervalle V est vide de résultats ».

Cet intervalle V est défini par les limites $a - l$, $a + l$ de $\overline{V}$ et par la valeur de l que l'on tire de

$$\int_{a-l}^{a+l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\, dx = 1 - 0{,}01 \; .$$

La valeur de l se lit immédiatement dans une table:

$$l = 2{,}575829 \;\ldots\ldots \; .$$

Formulée comme nous venons de le faire, la loi probabiliste aboutit donc à la conclusion suivante: l'opération donne un résultat compris entre $a - 2{,}57583$ et $a + 2{,}57583$.

Cette conclusion est unique lorsque les règles B et C ont été explicitement formulées. Elle dépend naturellement de ces deux règles. La règle C apparaît dans la conclusion elle-même. Il n'en est pas de même de la règle B et c'est pourquoi on la rappelle en ajoutant « au degré de probabilité 0,01 » (on dit souvent « avec la probabilité 1 — 0,01 = 0,99 »).

Exemple 2. — Il a pour but de rappeler que le choix d'un intervalle $\overline{V}(a - l,\ a + l)$, admettant la même symétrie que la distribution, s'il est habituel, n'est nullement nécessaire. On peut, en effet, reprendre l'exemple 1 en ne modifiant que la proposition C à l'énoncé de laquelle on substitue le suivant: l'intervalle V sera le complémentaire d'un intervalle $\overline{V}$ défini par $a - \frac{l}{2}$, $a + l$.

Par l'équation

$$\int_{a-\frac{l}{2}}^{a+l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\, dx = 1 - 0{,}01$$

on obtient $\frac{l}{2} = 2{,}32...$ On arrive ainsi à la conclusion suivante: l'opération donne un résultat compris entre $a - 2{,}33$ et $a + 4{,}66$.

Exemple 3. — On peut encore inverser les positions de V et de $\overline{V}$: stipulons par la règle C que V lui-même est un intervalle $a - l$, $a + l$.

Par l'équation

$$\int_{a-l}^{a+l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\, dx = 1 - 0{,}01$$

on obtient $l = 0{,}012533...$ d'où l'on tire la conclusion: l'opération ne donne aucun résultat compris entre $a - 0{,}01253$ et $a + 0{,}01253$.

On pourrait envisager bien d'autres exemples puisque rien ne limite le choix de V déterminé par la règle C si ce n'est la possibilité de calculer ses limites — on pourrait notamment admettre pour V un ensemble d'intervalles séparés. Mais les exemples qui précèdent suffisent à mettre en évidence le jeu des trois propositions que nous avons désignées A, B, C, et nous permettent de faire sur la signification et le rôle de la loi probabiliste les constatations suivantes.

Le plus souvent, on dit qu'« une loi probabiliste est énoncée » dès que l'on a formulé une proposition A. A un deuxième point de vue, l'énoncé d'une loi probabiliste comprend une proposition A et une proposition C. En fait, il arrive fréquemment que, sans être formulée, la proposition C est sous-entendue, impliquée par la nature de la question, dans son titre, par exemple. Enfin, on peut s'astreindre à énoncer les trois propositions A, B, C: dans ce dernier cas nous dirons que la loi probabiliste est *complètement formulée.*

En résumé, les lois probabilistes se présentent sous trois formes que distingue le contenu de leur énoncé: une proposition A seule, une proposition A et une proposition C, les trois propositions A, B, C. En d'autres termes, on peut considérer une loi énoncée par A et C comme une famille à un paramètre (le degré de probabilité α) de lois complètement formulées et une loi énoncée par A seule comme une famille plus générale de lois complètement formulées qui dépendent non seulement du paramètre α mais encore de la position de l'intervalle V.

Sur les exemples qui précèdent, nous constatons qu'une loi probabiliste complètement formulée aboutit à une conclusion unique (un intervalle déterminé V ne contient aucun résultat). La loi probabiliste complètement formulée conserve donc une propriété essentielle de la loi non probabiliste. De même que celle-ci, elle dispense de recourir à la réalisation de l'expérience, elle remplace cette réalisation. Il n'en est plus du tout de même lorsque la loi probabiliste n'est pas complètement formulée: elle ne peut alors aboutir à une conclusion univoquement déterminée.

Ainsi, pour qu'une loi probabiliste joue le même rôle qu'une loi non probabiliste, il faut et il suffit qu'elle soit complètement formulée. Pour qu'une véritable analogie puisse être établie, c'est la loi probabiliste complètement formulée (et elle seule) qui doit être mise en regard de la loi non probabiliste.

Si, au lieu de lois, on considère des hypothèses, ce sera l'hypothèse probabiliste complètement formulée, c'est-à-dire l'admission d'une loi probabiliste complètement formulée qu'il faudra mettre en parallèle avec l'hypothèse non probabiliste. Nous avons vu, au premier paragraphe, que le critère qui permettait de vérifier une hypothèse non probabiliste, résultait immédiatement de l'énoncé de celle-ci. Il en est nécessairement ainsi toutes les fois que l'hypothèse qu'il s'agit d'admettre (ou de rejeter) aboutit à une conclusion unique: elle est à rejeter si la réalisation infirme cette conclusion et à accepter (sous réserve de ce que donneront les vérifications ultérieures) dans le cas contraire. Il en sera donc de même pour l'hypothèse probabiliste complètement formulée et pour la même raison, parce qu'elle conduit — si elle est admise — à une conclusion unique.

L'hypothèse est à rejeter si la réalisation effective de l'expérience donne un résultat

non compris entre $a - 2{,}57583$ et $a + 2{,}57583$ dans l'exemple 1,
non compris entre $a - 2{,}33$ et $a + 4{,}66$ dans l'exemple 2,
compris entre $a - 0{,}01253$ et $a + 0{,}01253$ dans l'exemple 3.

Ainsi, il existe un critère évident et un seul pour la vérification d'une hypothèse probabiliste complètement formulée, de même que pour la vérification d'une hypothèse non probabiliste. Au contraire, pour une hypothèse probabiliste non complètement formulée, on devra choisir, en général, parmi une infinité de critères. Le choix du critère est alors l'objet d'une discussion, il pose un nouveau problème: c'est ce qui a donné naissance à une théorie des critères connue sous le nom de « théorie des critères statistiques ».

Nous terminerons ce paragraphe en remarquant qu'une loi probabiliste complète n'admet pas qu'un seul énoncé: en modifiant la distribution introduite par la proposition A et en même temps, s'il y a lieu, la règle imposée par la proposition C on peut conserver la signification de la loi tout en altérant sa forme.

Exemple 4. — Pour le montrer, reprenons l'exemple 1 en posant $\xi = \frac{(x-a)^2}{2}$. Un simple changement de variable établit que ξ admet la distribution « semi-normale »

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \xi^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\xi} \end{matrix} \right\}.$$

Par la règle C, convenons de définir l'intervalle V par une inégalité telle que $\xi > \xi_0$.
Par l'équation

$$\int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi} d\xi = 1 - 0{,}01 ,$$

on détermine $\xi_0 = 3{,}318$ et l'on arrive donc à la conclusion suivante: aucune opération ne donnera pour $\frac{(x-a)^2}{2}$ un résultat supérieur à 3,318. On arrive à une conclusion équivalente à celle de l'exemple 1 $\left(3{,}318 \sim \frac{(2{,}57583)^2}{2}\right)$ bien que l'on soit parti d'un énoncé différent.

3. Plusieurs variables.

Dans toutes les expériences considérées jusqu'ici, le résultat de chaque réalisation effective pouvait être indiqué (repéré) par un seul nombre. Dans d'autres expériences, il est nécessaire, pour indiquer le résultat d'une (seule) réalisation effective, de donner une suite de nombres, c'est-à-dire un point d'un espace à plusieurs dimensions. En d'autres termes, la connaissance du résultat équivaut à celle des valeurs d'une suite de variables x_1, x_2, ... x_n.

Tout ce qui a été dit au paragraphe 2 s'étend sans difficulté: dans la proposition A, il s'agit maintenant de distributions à plusieurs variables (de variables aléatoires à plusieurs dimensions), dans la proposition C, on substitue « région » à « intervalle ». Il suffit donc de donner quelques exemples. Auparavant, nous ferons une remarque simple mais importante.

Pour les expériences du paragraphe 2, il arrive que l'on ait à considérer non une seule réalisation de l'expérience mais toute une suite de réalisations (c'est même ce que l'on est habitué à rencontrer en statistique). Lorsque les diverses réalisations sont indépendantes (les conditions de l'expérience sont invariantes) ou même lorsqu'elles sont dépendantes mais que leur dépendance est connue (les conditions de l'expérience varient mais leur variation est connue) on peut considérer toute suite de n réalisations effectives comme une seule réalisation effective de l'expérience que constitue la répétition (n fois) de l'expérience initiale: son résultat se représente par un point d'un espace à n dimensions. Ainsi, une expérience du paragraphe 2, répétée n fois, peut être regardée comme un cas particulier d'une expérience du présent paragraphe 3.

Exemple 5. — Reprenons l'exemple 1 mais en supposant maintenant qu'il s'agisse de répéter n fois l'expérience et que cette répétition ne modifie en rien ses conditions. La proposition C n'est pas changée. L'intervalle V, vide de résultats, reste le complémentaire d'un intervalle $a - l$, $a + l$. Pour simplifier l'écriture, nous prenons $a = 0$, à quoi un changement de variable peut toujours amener.

D'après la remarque qui précède, la loi probabiliste relative à n répétitions de l'expérience envisagée à l'exemple 1 s'énonce d'abord, en introduisant, par la proposition A, la distribution à n variables

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1, x_2, \dots x_n \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} \end{array} \right\}$$

et ensuite, en imposant, par la proposition C pour région vide de points représentatifs des résultats, l'extérieur de l'hypercube à n dimensions ayant pour centre de symétrie l'origine, ses arêtes parallèles aux axes et $2l$ pour longueur d'arête. Nous arrêterons encore, par la proposition B, à 0,01 le degré de probabilité α.

Pour fixer les idées, voici les conclusions auxquelles on arrive pour $n = 2$ et $n = 10$.

Pour $n = 2$

$$\int_{-l}^{+l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (1 - 0{,}01)^{\frac{1}{2}}$$

donne $l = 2{,}81\dots$

Conclusion [1]: Aucun résultat dans le carré de demi-côté $l = 2{,}82$.

Pour n = 10

$$\int_{-l}^{+l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (1 - 0{,}01)^{\frac{1}{10}}$$

donne $l = 3{,}28...$

Conclusion: Aucun résultat dans l'hypercube de demi-arête 3,29.

Exemple 6. — L'exemple 5, par son interprétation dans l'espace à n dimensions, conduit tout naturellement à concevoir d'autres formes de la région V vide de résultats.

L'exemple le plus simple est celui où l'on prend pour V l'extérieur d'une hypersphère de centre l'origine et de rayon ρ. Le problème est le même que dans l'exemple 5 mais on substitue une hypersphère à l'hypercube.

Encore avec $\alpha = 0{,}01$ et pour $n = 2$ et 10 respectivement, on obtient [2]:

Pour n = 2

$$\int_{0}^{\frac{\rho^2}{2}} e^{-x} dx = 1 - 0{,}01$$

donne $\rho = 3{,}0347...$

Conclusion [3]: Aucun résultat dans le cercle de rayon 3,035.

[1] Voir le graphique *in fine*.

[2] Le calcul est facile, mais en outre on sait que la forme

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

admet la distribution semi-normale $G\left(\varphi, 1, \frac{n}{2}\right)$.

[3] Voir le graphique *in fine*.

Pour n = 10

$$\int_0^{\frac{\rho^2}{2}} \frac{1}{24} x^4 e^{-x} dx = 1 - 0{,}01$$

donne $\rho = 4{,}82...$

Conclusion: Aucun résultat dans l'hypersphère de rayon 4,83.

Exemple 7. — Avec les deux premières propositions (A et B) introduites dans les exemples 5 et 6, on prend souvent une proposition C qui définit comme région $\overline{V}$ la portion d'espace comprise entre les deux hyperplans parallèles $\Sigma x_i = -M_1$, $\Sigma x_i = M_1$. Dans ce cas on emploie, en général, le langage suivant qui n'apporte rien de nouveau au raisonnement. La forme linéaire $m = \frac{\Sigma x_i}{n}$ (que l'on appelle la moyenne et qu'il ne faut pas confondre avec la moyenne a de la distribution que nous avons supposée nulle) admet la distribution de Laplace de moyenne nulle et d'écart quadratique moyen $\frac{1}{\sqrt{n}}$, soit

$$\left\{ \frac{m}{\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{m^2 n}{2}}} \right\}.$$

La forme linéaire

$$\mu = m\sqrt{n} = \frac{\Sigma x_i}{\sqrt{n}}$$

admet donc la distribution de Laplace réduite (de moyenne nulle et d'écart quadratique moyen égal à l'unité).

Il suit de là $-2{,}57583 < \mu < 2{,}57583$ et, en conséquence:

Pour n = 2

$$-3{,}643 < x_1 + x_2 < 3{,}643 .$$

Conclusion[1]: Tous les résultats sont représentés par des

[1] Voir le graphique *in fine*.

points de la bande comprise entre les deux parallèles à la deuxième bissectrice $x + y = \mp 3{,}643$.

Chacune de ces droites est à la distance 2,57583 de l'origine.

Pour n = 10

$$-8{,}146 < \Sigma x_i < 8{,}146 \; .$$

Conclusion: Tous les résultats sont représentés par des points de la région comprise entre les deux hyperplans parallèles $\Sigma x_i = \mp 8{,}146$. Chacun de ces deux hyperplans est à la distance 2,57583 de l'origine.

Dans tous ces exemples, la loi probabiliste est complètement formulée et elle aboutit à une conclusion unique. Si on la considérait comme une hypothèse, le critère pour sa vérification serait donc, de même qu'au paragraphe 2, bien déterminé et immédiatement en évidence.

4. Le cas d'un paramètre ignorable.

Il est curieux de remarquer que la propriété de la loi probabiliste complètement formulée, sur laquelle nous avons attiré l'attention, qui lui permet et lui impose d'aboutir à une conclusion unique, peut être conservée alors même que la distribution X introduite par la proposition A n'est pas entièrement déterminée.

Deux exemples classiques vont montrer que l'on obtient une conclusion unique dans deux cas où la distribution X renferme un paramètre indéterminé. L'unicité de la conclusion suffit, ainsi que nous l'avons dit plus haut, pour que le critère permettant de vérifier l'hypothèse résulte immédiatement de son énoncé. En conséquence, les deux cas que nous allons étudier seront assimilables à celui d'une hypothèse probabiliste complètement formulée et le paramètre qui, sans inconvénient, reste indéterminé, pourra être dit « ignorable ».

Exemple 8. — De même que dans l'exemple 5, considérons n répétitions (dans des conditions qui restent invariables) de l'opération expérimentale qui consiste à mesurer une grandeur, mais ne supposons plus connue la « vraie valeur » a.

Définissons comme suit la loi probabiliste:

A. Au résultat de n opérations de mesure on associe la distribution à n variables

$$\left\{ \begin{matrix} x_1, \ x_2, \ \dots & x_n \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i - a)^2} & \end{matrix} \right\}$$

où a représente la vraie valeur de la grandeur (qui n'est pas connue): c'est le paramètre ignorable.

On sait que la forme quadratique

$$\psi = \frac{1}{2} \Sigma \left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2$$

admet la distribution « semi-normale »

$$G\left(\psi, 1, \frac{n-1}{2}\right) = \left\{ \begin{matrix} \psi \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \psi^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\psi} \end{matrix} \right\}, \quad \psi > 0 ,$$

où Γ est la fonction eulérienne de deuxième espèce.

B. $\alpha = 0{,}01$.

C. En utilisant la distribution de la forme ψ qui vient d'être rappelée, on adopte, comme règle pour la détermination de V, une inégalité telle que $\psi > \psi_0$, c'est-à-dire on choisit pour V l'extérieur de l'hypercylindre d'équation

$$\frac{1}{2} \Sigma \left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2 = \psi_0 .$$

On obtient ainsi:

Pour n = 2

$$\psi_0 = 3{,}3175 \dots \quad \text{par} \quad \int_0^{\psi_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \, dx = 1 - 0{,}01 .$$

Conclusion [1]: Tous les résultats sont représentés par des points de la bande comprise entre les deux parallèles à la première bissectrice

$$x - y = \mp 3{,}643 \qquad (3{,}643 \sim 2\sqrt{3{,}3175} \sim 2{,}57583 \,.\, \sqrt{2}) \ .$$

Cette bande est symétrique de celle qui a été obtenue dans l'exemple 7.

Pour n = 10

$$\psi_0 = 10{,}833 \ldots \quad \text{par} \quad \int_0^{\psi_0} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} x^{\frac{7}{2}} e^{-x} \, dx = 1 - 0{,}01 \ .$$

Conclusion: Tous les résultats sont représentés par des points à l'intérieur de l'hypercylindre de révolution, d'axe la première bissectrice et de rayon 4,655 ($4{,}655 \sim \sqrt{2} \,.\, \sqrt{10{,}833}$).

Exemple 9. — L'expérience est la même que dans l'exemple 5: n répétitions de l'opération expérimentale qui consiste à mesurer une grandeur, supposée connue, dans des conditions qui restent les mêmes de la première à la dernière des répétitions. La loi probabiliste est analogue à celle de l'exemple 5 mais on ne suppose plus que l'écart quadratique moyen est égal à l'unité: soit σ sa valeur. Nous allons faire jouer à σ le rôle d'un paramètre ignorable.

Enonçons les trois propositions de la loi probabiliste.

A. En prenant $a = 0$, de même qu'à l'exemple 5 (pour abréger l'écriture), introduisons la distribution

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \, , \, x_2 \, , \, \ldots & & x_n \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \, \sigma^{-n} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma x_i^2} \end{matrix} \right\} .$$

On sait que le rapport

$$t = \sqrt{n(n-1)} \, . \, \frac{\Sigma x_i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Sigma \left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n} \right)^2}}$$

[1] Voir le graphique *in fine*.

(dit de Student) admet la « distribution de Student » que nous noterons

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \right\}_t .$$

B. $\alpha = 0{,}01$.

C. En utilisant la distribution du rapport de Student, qui vient d'être rappelée, on adopte, comme règle pour la détermination de V, une double inégalité de la forme $|t| > t_0$, c'est-à-dire on choisit pour V l'*intérieur* de l'hypercône d'équation

$$\frac{n-1}{n} (\Sigma x_i)^2 = t_0^2 \,.\, \Sigma \left(x_i - \frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 .$$

On obtient ainsi:

Pour n $= 2$

$$t_0 = 63{,}657 \ldots \text{ par } \int_{-t_0}^{+t_0} \frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+t^2} = 1 - 0{,}01 \;.$$

Conclusion[1]: Aucun résultat entre les deux droites issues de l'origine, symétriques par rapport à la première bissectrice, comprenant un angle θ égal à un deux-centième de la circonférence: $\theta = 2$ grades $\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{63{,}657}\right)$.

Pour n $= 10$

$$t_0 = 3{,}250 \ldots \text{ par } \int_{-t_0}^{+t_0} \frac{1}{\sqrt{9\pi}} \cdot \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{9}\right)^{-5} dt = 1 - 0{,}01 \;.$$

Conclusion: Aucun résultat à l'intérieur de l'hypercône de révolution à deux nappes, de sommet l'origine, d'axe la pre-

[1] Voir le graphique *in fine*.

mière bissectrice, d'angle solide $\frac{1}{200}$ (en prenant pour unité la totalité de l'espace) et dont le demi-angle au sommet $\frac{\theta}{2}$ est défini par $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{3}{3{,}250}$.

Sur ces deux exemples, on constate qu'il existe, bien qu'un paramètre reste indéterminé dans la distribution X, des régions qui sont indépendantes du dit paramètre et qui « contiennent une probabilité » qui est aussi indépendante du paramètre: celui-ci pourrait alors être appelé « paramètre ignorable ». Tout ce qui a été dit sur la loi ou l'hypothèse probabiliste complètement formulée subsiste donc dans le cas d'un paramètre ignorable.

Remarque. — Dans chaque cas c'est la détermination des limites d'intégration d'une intégrale, à partir de la valeur de l'intégrale, qui constitue la partie importante du calcul numérique: elle est grandement facilitée si l'on dispose des tables qui ont été établies pour chacune des intégrales usuelles en statistique.

Appendice.

Dans le cas $n = 2$, toutes les régions V sont planes, par suite, faciles à représenter. Dans le graphique ci-après, les frontières des régions V que nous avons déterminées sont figurées comme suit:

Exemple 5:	....	carré de demi-côté 2,82.	
Exemple 6:	——————	cercle de rayon 3,035.	
Exemple 7:	—·—·—·—	bande parallèle à la deuxième bissectrice,	dont les frontières sont à la distance 2,57583 de l'origine.
Exemple 8:	—···—···—	bande parallèle à la première bissectrice.	
Exemple 9:	— — — —	angle à l'origine d'ouverture 2 grades.	

Chacune des régions V « contient » une probabilité 0,01. On voit immédiatement, sur le graphique, qu'aucune des régions complémentaires $\overline{V}$ n'est entièrement intérieure à une autre; il en est évidemment de même pour les régions V elles-mêmes [1].

[1] Dans le cas $n = 10$, la même constatation résulte immédiatement des inégalités

$$2{,}57583 < 3{,}29 < 4{,}655 < 4{,}83 \quad \text{et} \quad 4{,}655 < 3{,}29 \,.\, \sqrt{10}\,.$$