

Sur l'équation de Mathieu

Autor(en): **Wavre, Rolin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **27 (1945)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742504>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Rolin Wavre. — *Sur l'équation de Mathieu.*

Différents physiciens ont rencontré dans des recherches récentes l'équation de Mathieu :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (c + a \cos x + b \sin x) u = 0 . \quad (1)$$

Je voudrais montrer ici combien sa solution est simple par les déterminants infinis, en lui appliquant la méthode de Hill et de von Koch. Il n'est même pas nécessaire de connaître la théorie de ces déterminants et nous indiquerons à la fin la solution par des développements en séries très rapidement convergentes.

L'équation (1) s'écrit sous deux formes simples en posant $z = e^{ix}$:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + (c + 2\lambda \cos y) u = 0 \quad (2)$$

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} - (c + \lambda z + \lambda z^{-1}) u = 0 . \quad (3)$$

Cette équation est invariante par la substitution $z' = z^{-1}$, de sorte qu'à la solution $u(z)$ correspond la solution $u\left(\frac{1}{z}\right)$.

Le théorème de Fuchs ne s'applique pas à (3) et la solution est de la forme

$$u(z) = z^\rho \sum_n D_n z^n , \quad -\infty < n < +\infty \quad (4)$$

la série convergeant pour toute valeur $z \neq 0$.

La substitution de (4) dans (3) donne le système d'équations

$$b_n D_{n-1} + D_n + a_n D_{n+1} = 0 \quad -\infty < n < +\infty \quad (5)$$

et les coefficients a_n et b_n sont de l'ordre de $|n|^{-2}$. Le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & \\ & b_{-1} & 1 & a_{-1} & & \\ & & b_0 & 1 & a_0 & \\ & & & b_1 & 1 & a_1 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{équation en } \rho , \quad (6)$$

est convergent et doit être nul. La solution de l'équation (4) est donnée par

$$u(z) = z^\rho \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & b_{-1} & 1 & a_{-1} & & \\ & z^{-2} & z^{-1} & z^0 & z^1 & z^2 \\ & & & b_1 & 1 & a_1 \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

où l'on a remplacé dans le déterminant de (6) une ligne par les puissances de z . Voilà la solution de von Koch. Pour le calcul des coefficients D_n il y aura avantage à poser:

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & a_n & \cdot \\ b_{n+1} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad E_{-n} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & a_{-n-1} \\ \cdot & b_{-n} & 1 \end{vmatrix}$$

et l'on aura l'équation suivante pour exprimer $\rho = \rho(\lambda, c)$

$$\delta = b_0 a_{-1} E_{-2} E_1 - E_{-1} E_{+1} + a_0 b_1 E_{-1} E_2 = 0$$

et ensuite pour les inconnues:

$$D_n = (-1)^n b_1 \dots b_n E_{-1} E_{n+1}$$

$$D_{-n} = (-1)^n a_{-1} \dots a_{-n} E_1 E_{-n-1}.$$

Tout revient donc au calcul de déterminants de la forme:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & e_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1 & 1 & e_2 & \cdot & \cdot \\ & \varepsilon_3 & 1 & e_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{qui, avec } x_i = -e_i \varepsilon_{i+1}, \text{ s'écrit}$$

$$E = 1 + \sum x_i + \sum x_i x_j + \sum x_i x_j x_k + \dots$$

avec $1 \leq i, i+1 < j, j+1 < k$, etc. La rapidité de la convergence est assurée puisque les x_i sont de l'ordre de i^{-4} .

Cette méthode s'étend aux équations considérées par M. J. Patry dans le cas où elles n'ont que deux points singuliers dans tout le plan complexe.