Étude de la statistique attachée à l'opérateur i/q à l'aide de sa fonction caractéristique

Edmond Arnous. — *Etude de la statistique attachée à l'opérateur* $i\partial/\partial q$ *à l'aide de sa fonction caractéristique.* — Note transmise par R. Wavre.

En nous inspirant de la Mécanique ondulatoire, nous pouvons, pour un élément donné X de l'espace de Hilbert E, attacher une statistique à tout opérateur linéaire et hermitien A. La donnée d'une statistique étant équivalente à celle d'une répartition de masses le long d'un axe Ox, nous pouvons, ou bien nous donner la fonction de répartition $F(x)$ (poids de l'intervalle $-\infty, x$), ou bien la fonction caractéristique $\varphi(t)$ (transformée de Laplace-Stieltjes de $F(x)$). La Mécanique ondulatoire nous invite, ainsi que nous l'avons montré ailleurs[1], à choisir la fonction caractéristique et à poser:

$$\varphi(t) = (X, e^{itA} X) \qquad \text{avec} \quad \| X \| = 1 . \tag{1}$$

Deux cas vont se présenter dans la suite: Celui d'une répartition absolument continue. La densité de répartition $f(x)$ est alors reliée à $\varphi(t)$ par la formule de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi(t)\, dt . \tag{2}$$

Celui d'une répartition totalement discontinue, distribuée entre les points d'abscisses entières n. Le poids p_n au point d'abscisse n est alors relié à $\varphi(t)$ par la formule:

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t)\, dt . \tag{3}$$

Nous allons montrer, en nous plaçant dans la représentation fonctionnelle E_f de E, comment la fonction caractéristique (1) permet d'étudier la statistique attachée à l'opérateur « quan-

[1] C. R. Acad. des Sc. Paris, 1944, t. 218, p. 108. Voir aussi les notes des 19 juin, 16 août 1944, 12 et 19 mars 1945.

tité de mouvement » $i\partial/\partial q$ et de retrouver de façon rapide les résultats connus. X est maintenant une fonction de carré sommable d'une variable q (ou de plusieurs); nous la supposerons analytique. Il faut distinguer deux cas: q varie de $-\infty$ à $+\infty$ et q varie de a à b (mettons de $-\pi$ à π). Etudions le premier. Calculons la fonction caractéristique.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{X}} e^{-t\partial/\partial q} \mathrm{X}\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{X}}(q)\, \mathrm{X}(q-t)\, dq \quad . \qquad (4)$$

Désignons par LX la transformée de Fourier-Laplace de X

$$\mathrm{LX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixq}\, \mathrm{X}(q)\, dq \quad .$$

Calculons enfin $\overline{\mathrm{LX}} \,.\, \mathrm{LX}$ et comparons à (2), il vient:

$$\overline{\mathrm{LX}} \,.\, \mathrm{LX} = 2\pi f(x) \quad . \qquad (5)$$

Comme la densité de répartition de la variable q est $\overline{\mathrm{X}}\mathrm{X}$, nous pouvons énoncer ce résultat en disant: *la statistique de* $i\partial/\partial q$ *au point* X *est la même que celle de* q *au point* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{LX}$.

Mais alors, pour comparer les deux statistiques, il suffit de comparer les modules de X et LX, et ceci nous mène facilement à la relation d'Heisenberg qui relie les écarts-types $\sigma_1 \,.\, \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Passons au deuxième cas. L'intégrale (4) est maintenant prise entre $-\pi$ et π et nous devons poser:

$$\mathrm{L}_n \mathrm{X} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inq}\, \mathrm{X}(q)\, dq \quad . \qquad (6)$$

Calculons $\overline{\mathrm{L}_n \mathrm{X}} \,.\, \mathrm{L}_n \mathrm{X}$ et comparons à (3), il vient:

$$\overline{\mathrm{L}_n \mathrm{X}} \,.\, \mathrm{L}_n \mathrm{X} = 2\pi p_n \quad .$$

Bien d'autres questions de ce genre peuvent être étudiées à l'aide de la fonction caractéristique. C'est le cas de celles qui, en Mécanique ondulatoire, correspondent à la *théorie du centre* *de gravité* d'un système de points $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ [1]. Ainsi étudions l'opérateur $P = \Sigma_k\, i\,\partial/\partial x_k$. Introduisons les coordonnées x_g, y_g, z_g du centre de gravité et les coordonnées ξ_k, η_k, ζ_k autour du centre de gravité et calculons la fonction caractéristique de P

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, x_k - t, \ldots)\, dv = \\ &= \int \overline{X}(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, X(\ldots, \xi_k + x_g - t, \ldots)\, dv = \\ &= \int \overline{X}(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, e^{-t\partial/\partial x_g}\, X(\ldots, \xi_k + x_g, \ldots)\, dv \,.\end{aligned}$$

Par suite, la statistique de P est la même que celle de $i\,\partial/\partial x_g$, ou, dans le langage de la Mécanique ondulatoire, la quantité de mouvement totale du système est égale à la quantité de mouvement du centre de gravité. Etudions de même l'opérateur « moment cinétique » $M_z = \Sigma_k\, i(x_k\,\partial/\partial y_k - y_k\,\partial/\partial x_k)$ dont la fonction caractéristique est:

$$\begin{aligned}\int \overline{X}\, e^{itM_z}\, X\, dv &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, e^{itM_z} x_k, e^{itM_z} y_k, e^{itM_z} z_k, \ldots)\, dv \\ &= \int \overline{X} \,.\, X(\ldots, x_k \cos . t + y_k \sin . t, -x_k \\ &\qquad \sin . t + y_k \cos . t, z_k, \ldots)\, dv \,.\end{aligned}$$

Un calcul analogue au précédent montre alors que la statistique de M_z est la même que celle de

$$i(x_g\,\partial/\partial y_g - y_g\,\partial/\partial x_g) + i\,\Sigma_k(\xi_k\,\partial/\partial \eta_k + \eta_k\,\partial/\partial \xi_k) \,.$$

Ceci traduit le deuxième théorème de Koenig. On voit combien la méthode de la fonction caractéristique se révèle souple dans les applications.

(Cette note fait suite à cinq notes communiquées par M. L. de Broglie jusqu'en mars 1945 à l'Académie des Sciences de Paris et parues aux *Comptes rendus* de cette académie.)

[1] Voir L. DE BROGLIE, *Méc. ond. des syst. de corpusc.* Paris, 1939, pp. 75 et 85.