Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 28 (1946)

Artikel: Quelques observations et expériences nouvelles et leurs conséquences pour les théories de la physique

Autor: Prunier, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742866

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QUELQUES OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES NOUVELLES

et leurs conséquences pour les théories de la physique

PAR

F. PRUNIER

(Avec 4 fig.)

NEUCHATEL

Chapitre premier.

Sur l'introduction d'une onde en mécanique céleste et sur son interprétation

I. — La comparaison de la structure des atomes et de l'organisation du système solaire a constitué depuis longtemps, et peut-être surtout au moment des théories de Rutherford et de Bohr, une sorte de lieu commun. *Il faut se défier de telles analogies, souvent forcées.* Mais il n'en reste pas moins qu'il y a, en effet, des points de ressemblance entre les deux organismes atomique et cosmique. Dans le passé, les progrès réalisés en astronomie ont eu souvent leur répercussion sur la physique, et l'*image* planétaire de l'atome en est sans doute une preuve.

Actuellement, la physique de l'atome est sur plusieurs points en avance par rapport à l'Astronomie. L'introduction d'une onde, parfois postulée en mécanique céleste pour être substituée à l'action à distance de la gravitation, s'est heurtée à de sérieuses

objections; mais elle a pu être réalisée en mécanique atomique, à la vérité dans des conditions bien différentes de celles qu'on aurait pu concevoir en mécanique céleste. Les fréquences, les énergies et par suite les distances des électrons planétaires au noyau de l'atome font maintenant, en théorie de Bohr, l'objet de lois précises, tandis que l'astronomie ne peut donner pour les distances des planètes au Soleil qu'une loi sans grande valeur, la loi de Bode: quelques autres lois qu'on a tenté de donner de la distribution des planètes ne paraissent pas beaucoup plus fondées.

Ces remarques nous ont conduit, d'une part, à rechercher si les critères qui servent à déceler l'existence des ondes intra-atomiques et les lois de distribution des électrons satellites n'existeraient pas aussi en mécanique cosmique. Une autre idée se joignait, d'autre part, à celle-ci. On sait à quelles conceptions a conduit en mécanique atomique l'interprétation des ondes qu'on y rencontre. La doctrine probabiliste, issue de ces conceptions, n'est possible toutefois qu'en raison de la petitesse extrême des objets que considère la mécanique des corpuscules. Mais supposons qu'une onde soit révélée exister en mécanique cosmique par les critères dont on vient de parler. A coup sûr, son interprétation devra être d'ordre *physique*. Alors on pourra se demander si une interprétation identique de l'onde atomique ne serait pas possible, et si elle ne ferait pas disparaître certaines conceptions, d'ailleurs *parfaitement logiques et cohérentes*, mais dont on n'est pas toujours dispensé pour autant d'avoir quelque mal à prendre définitivement son parti.

Tel est le programme que nous avons voulu poursuivre dans la brève étude qui suit.

II. — L'*Annuaire du Bureau des longitudes* donne comme rapports (a) entre les distances moyennes au Soleil des huit premières grosses planètes d'une part, et de la Terre d'autre part, les nombres:

0,387 ; 0,7233 ; 1 ; 1,5236 ; 5,2025 ; 9,5547 ;

19,218 ; 30,109 .

Pour les rapports (m) des masses des planètes à celle de la Terre, il donne:

0,056 ; 0,817 ; 1 ; 0,108 ; 318,36 ; 95,22 ;
14,58 ; 17,26 .

Nous reviendrons sur le cas de la dernière, Pluton.

L'*Annuaire* donne aussi les excentricités des orbites, et l'inclinaison i' du plan de chaque orbite sur l'écliptique. De cette inclinaison, on peut déduire celle i que chaque plan d'orbite présente avec un plan dit plan invariable du système, très voisin du plan de l'écliptique puisqu'il passe entre ce plan et celui de l'orbite de Saturne, à 0° 30′ du plan de l'écliptique: c'est le plan du maximum des aires.

On peut donc calculer les expressions $e/e_1 \cos^2 i$, e désignant l'excentricité de l'orbite d'une planète quelconque et e_1 celle de l'orbite terrestre. Ces nombres ont pour valeurs:

12,473 ; 0,408 ; 1 ; 5,571 ; 2,885 ; 3,339 ;
2,768 ; 0,5376 .

Considérons d'abord les quatre planètes les plus rapprochées du Soleil, et définissons pour chacune d'elles un nombre n tel que:

$$m a = n^2 \frac{e}{e_1 \cos^2 i} ,$$

en prenant d'ailleurs comme unités les éléments distance et masse de Mercure, pour éviter de trop nombreuses décimales. Autrement dit, si nous appelons a' et m' les éléments demi-grand axe et masse de chacune des quatre planètes en question, en prenant comme unités les éléments de Mercure, définissons n par la condition:

$$m' a' = n^2 \frac{e}{e_1 \cos^2 i} \frac{1}{12,423} .$$

Nous trouvons pour n^2 respectivement les valeurs:

1 ; 835 ; 575,5 ; 16,9 .

Faisons les mêmes opérations avec la Terre d'une part, et les trois planètes Jupiter, Uranus et Neptune, en gardant comme unités les éléments de la Terre, plus commodes cette fois. Nous trouvons pour n^2:

$$1 \; ; \quad 575 \; ; \quad 101{,}2 \; ; \quad 966 \; .$$

Ces nombres ont quelque chose d'assez remarquable: ils sont très près d'être des carrés de nombres entiers. Les carrés parfaits les plus proches de leur valeur sont en effet:

$$1 \; ; \quad 16 = 4^2 \; ; \quad 100 = 10^2 \; ; \quad 576 = 24^2 \; ;$$
$$841 = 29^2 \; ; \quad 961 = 31^2 \; .$$

Si les orbites étaient d'égale excentricité, en particulier si elles étaient circulaires et situées dans un même plan qui serait alors le plan invariable du système, la loi ainsi vérifiée donnerait, de façon très approchée, $m\,a = n^2$, n étant un nombre entier. Or, l'étude des trajectoires possibles de l'électron dans l'atome conduit à admettre que seules sont stables les trajectoires pour lesquelles l'énergie de l'électron de masse m est de la forme $\frac{\mathrm{A}\,m}{n^2}$, n étant un eniter quelconque, et A une certaine constante ne dépendant pas de m. L'énergie étant, sur ces trajectoires, supposées circulaires pour simplifier, inversement proportionnelle à la distance a au centre, les rayons ont pour valeurs $a = \frac{\mathrm{B}\,n^2}{m}$, B étant une autre constante ne dépendant pas de m. Si l'on extrapole cette relation pour deux corpuscules de masses m_1 et m_2 *différentes*, suivant des trajectoires de rayons a_1 et a_2, on voit que:

$$\frac{m_2\,a_2}{m_1\,a_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

et si l'on a pris comme unités m_1 et a_1 caractérisant le corpuscule qui décrit la trajectoire $n_1 = 1$, on voit que:

$$m_2\,a_2 = n_2^2 \; .$$

On aboutit donc à la même relation que plus haut. Or, l'approximation avec laquelle est vérifiée la relation trouvée

pour les planètes n'est pas très inférieure, relativement parlant, à celle qui est réalisée dans les mesures ayant trait à l'atome. Tout se passe donc comme s'il existait pour *chacune* des huit planètes étudiées une série de *niveaux* dont la planète, en fait, occuperait l'un, caractérisé, à peu de chose près, par une valeur entière de n. On peut voir là un rapprochement de deux ordres différents de faits d'expérience et d'observation.

Le cas de Saturne est plus particulier. Le même calcul fait pour les autres planètes donnerait pour Saturne, par rapport à la Terre, 272,4. Or c'est là presque exactement $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, avec $n = 16$: autre point de contact possible entre des domaines paraissant d'abord bien éloignés l'un de l'autre.

Les nombres n correspondant aux valeurs trouvées pour n^2 sont respectivement:

28,9 ; 23,99 ; 4,11 ; 23,98 ; 10,06 ;
31,08 et 16,503 .

Les systèmes de satellites des planètes donnent des résultats analogues, quoique sensiblement moins nets; insuffisants pour permettre à eux seuls d'établir la loi en question; ils la corroborent en se groupant aussi, quoique d'un peu plus loin, autour de valeurs entières ou fractionnaires simples de n; leurs éléments, et notamment leurs masses peuvent donner lieu d'ailleurs à des écarts plus grands que pour les planètes, car ils sont moins bien connus.

Enfin, si l'on répartit les petites planètes en cinq anneaux d'astéroïdes, comme cela se fait souvent, et si l'on admet que les masses de ces anneaux sont grossièrement proportionnelles aux volumes totaux des astéroïdes qui les composent, on obtient les distances suivantes au Soleil:

2,18 ; 2,37 ; 2,75 ; 3,18 ; 3,37 ,

la distance de la Terre étant prise comme unité, et les masses:

1 ; 3,7 ; 29 ; 6 ; 0,7 ,

la masse de l'anneau le plus proche du Soleil étant prise pour unité.

On trouve alors les valeurs de ma ci-après:

$$2{,}18\ ;\quad 8{,}77\ ;\quad 79{,}75\ ;\quad 19{,}1\ ;\quad 2{,}36\ .$$

Les rapports de ces valeurs à la première d'entre elles sont:

$$1\ ;\quad 4\ ;\quad 36{,}5\ ;\quad 8{,}8\ ;\quad 1{,}08\ ,$$

très proches également de carrés parfaits. Sans doute, il ne faut pas perdre de vue que la répartition des astéroïdes en cinq anneaux est assez arbitraire; mais il ne faut pas quand même négliger le résultat obtenu.

On avait déjà remarqué que les lacunes du système des petites planètes, c'est-à-dire les zones vides ou peu peuplées qui séparent les anneaux, étaient situées à des distances du Soleil qui sont dans des rapports simples avec la distance moyenne de Jupiter au Soleil. Sans doute cela s'explique-t-il aussi par nos considérations de niveaux; les lacunes seraient en somme des niveaux prohibés.

La comparaison ainsi faite des petites planètes entre elles, fait penser aussi à une ressemblance avec les couches électroniques et évoque une sorte de structure fine. Les orbites des deux noyaux de la comète de Biéla, dont les éléments sont extrêmement voisins, donnent la même idée. Mais il faut se garder de s'appesantir trop sur des *ressemblances qui peuvent, pour une part, n'être qu'apparentes.* Si l'on compare entre elles individuellement les plus importantes des petites planètes, on peut encore obtenir plusieurs résultats analogues. Considérons Laetitia, Vesta, Junon, Cérès. Comme elles sont dans des orbites voisines, il paraît possible d'admettre que leurs masses sont approximativement proportionnelles à leurs volumes, calculables puisqu'on connaît leurs diamètres. L'*Annuaire* de 1912 donne pour ces quatre astéroïdes les diamètres suivants, en kilomètres: 260, 652, 326, 652. Aujourd'hui, on donne plutôt, respectivement, les valeurs suivantes qui sont celles que nous admettrons:

$$152\ ;\quad 390\ ;\quad 195\ ;\quad 780\ .$$

Les demi-grands axes sont respectivement:

2,770 ; 2,362 ; 2,669 ; 2,767

et les excentricités:

0,111 ; 0,089 ; 0,257 ; 0,077 .

Quant aux inclinaisons i, celles que nous considérons ici, sont celles de chaque plan d'orbite avec le plan du maximum des aires de l'ensemble des petites planètes; leurs valeurs sont à peu près:

2° ; 4° ; 2° ; 2° .

Les nombres n^2 définis par $\frac{m}{m_1} \cdot \frac{a}{a_1} = n^2 \cdot \frac{e}{e_1} \cdot \frac{\cos^2 i_1}{\cos^2 i}$, l'indice 1 étant relatif à Laetitia, sont : 17,2; 0,89; 194 dont les racines carrées sont: 4,15; 0,94; 13,95, voisines de nombres entiers. Les résultats sont un peu moins bons que pour les grosses planètes, mais cela ne doit pas étonner, en raison notamment de l'incertitude sur les masses, et de l'erreur que comporte certainement notre hypothèse à ce sujet.

D'autres coïncidences ne peuvent pas être retenues pour la même raison.

En ce qui concerne Pluton, sa masse est très mal connue; la loi, pour s'y appliquer, nécessiterait que cette masse fût 0,43 de celle de la Terre, avec $n = 1$, ou 0,96 avec $n = 1,5$. Or, il semble résulter des travaux les plus récents qu'une masse voisine de 1 serait vraisemblable.

III. — Nous allons montrer maintenant que les valeurs des $\frac{m}{a}$ des planètes, proportionnelles, comme on sait, à leurs énergies, ne sont pas quelconques, mais que leurs rapports jouissent de propriétés assez remarquables, et se prêtent eux aussi à une sorte de quantification.

Calculons les $\frac{m}{a}$ pour les planètes de Mercure à Neptune. Nous trouvons les nombres: 0,144; 1,13; 1; 0,0708; 61,2; 9,96; 0,758; 0,573. Nous nous attendons un peu désormais à trouver entre eux des rapports égaux à des rapports de carrés de nombres

entiers à peu de chose près, et, peut-être même à des carrés parfaits dans quelques cas. Réfléchissons d'ailleurs qu'il nous suffit, pour exprimer tous les rapports des $\frac{m}{a}$ entre eux, d'en connaître sept, bien choisis, que nous appellerons *rapports principaux*. Or, nous distinguons assez facilement que le rapport de 0,573 (Neptune) à 0,144 (Mercure) est quasi exactement égal à $4 = 2^2$.

De même nous voyons assez facilement que:

$$\frac{1{,}13\ (\text{Vénus})}{0{,}0708\ (\text{Mars})} = 4^2 \text{ presque exactement ;}$$

$$\frac{61{,}2\ (\text{Jupiter})}{0{,}758\ (\text{Uranus})} = 9^2 \text{ presque exactement ;}$$

$$\frac{9{,}96\ (\text{Saturne})}{1{,}13\ (\text{Vénus})} = 3^2, \text{ avec une erreur très petite ;}$$

$$\frac{61{,}2\ (\text{Jupiter})}{9{,}96\ (\text{Saturne})} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ avec une erreur très petite aussi.}$$

Nous avons ainsi déjà cinq rapports *indépendants*, et particulièrement suggestifs. Il nous faut encore deux autres rapports *indépendants*. Nous les prendrons parmi ceux qui restent possibles et qui donnent la différence la moins grande avec les rapports de carrés les plus voisins.

Ce seront:

$$\frac{1{,}13\ (\text{Vénus})}{1\ (\text{Terre})} = \left(\frac{17}{16}\right)^2$$

et

$$\frac{61{,}2\ (\text{Jupiter})}{0{,}573\ (\text{Neptune})} = \left(\frac{31}{3}\right)^2$$

avec une erreur extrêmement faible dans les deux cas.

Nous sommes alors en mesure de montrer que tous les autres rapports des $\frac{m}{a}$ des planètes deux à deux, s'expriment par des carrés parfaits, ou des rapports de carrés parfaits, ou encore des produits de quelques-uns des rapports principaux de carrés de nombres entiers donnés ci-dessus.

Citons par exemple:

$$\frac{9{,}96\ (\text{Saturne})}{0{,}0708\ (\text{Mars})} = 12^2 \text{ sensiblement},$$

$$\frac{9{,}96\ (\text{Saturne})}{0{,}758\ (\text{Uranus})} = \left(\frac{18}{5}\right)^2 \text{ sensiblement aussi}.$$

Ce sont là des conséquences *arithmétiques pures* des rapports principaux indépendants.

Mais ces rapports conséquences, surtout ceux qui dérivent des rapports $\frac{\text{Vénus}}{\text{Terre}}$ et $\frac{\text{Jupiter}}{\text{Neptune}}$, ne sont déjà plus très simples; et alors que le réseau constitué par les carrés de nombres entiers, ou par des rapports très simples de carrés petits, est peu dense, les rapports qui ne sont plus très simples de carrés, surtout de carrés de nombres entiers successifs aux numérateurs et aux dénominateurs, forment un réseau assez dense; et, dans ce réseau, on pourrait toujours arriver à faire figurer les rapports tirés des éléments des planètes, à cause de la légère incertitude qui frappe quelques-uns de ces éléments.

Ces questions se sont déjà posées en physique à propos de la mise en formules à carrés entiers des énergies correspondant aux fréquences électroniques. Elles ne sont pas ici plus aiguës, la précision sur a étant énorme, et celle sur m étant encore très bonne. Nous reviendrons d'ailleurs au paragraphe XX sur cette question. Disons ici cependant que l'argument jouerait très peu pour $\frac{\text{Vénus}}{\text{Terre}}$ et pour $\frac{\text{Jupiter}}{\text{Neptune}}$ pris pour rapports principaux, en raison de l'erreur extrêmement petite qu'ils présentent avec $\left(\frac{17}{16}\right)^2$ et $\left(\frac{31}{3}\right)^2$.

Néanmoins, pour ces raisons, la méthode que nous avons suivie au paragraphe II paraît préférable, car elle donne des résultats plus simples et plus certains.

Par contre, s'il s'agit de renforcer les conclusions à tirer du paragraphe II, les résultats numériques du présent paragraphe nous apportent un argument *important et indépendant.*

On a des résultats plus systématiques en rapportant à Mars les quatre planètes inférieures, et à Jupiter les quatre planètes

supérieures de Jupiter à Neptune. On trouve dans le premier groupe:

$$\left(\frac{10}{7}\right)^2 ; \quad 4^2 ; \quad \left(\frac{15}{4}\right)^2 ; \quad 1 ;$$

et dans le second:

$$1 ; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2 ; \quad \left(\frac{1}{9}\right)^2 ; \quad \left(\frac{3}{31}\right)^2 .$$

Les rapports de carrés que donneraient les rapports des énergies des électrons dans l'atome ne seraient pas sensiblement plus simples.

L'examen des quatre gros satellites de Jupiter qu'on désigne par I, II, III, IV renforce encore nos résultats. La méthode du présent paragraphe se trouve convenir mieux aux satellites de Jupiter que celle du paragraphe II. Les valeurs de leurs demi-grands axes sont, en prenant pour unité le rayon de la planète:

$$5{,}91 ; \quad 9{,}40 ; \quad 14{,}99 ; \quad 26{,}36 ;$$

les masses correspondantes sont, en prenant pour unité la masse de la planète:

$$45.10^{-6} ; \quad 25.10^{-6} ; \quad 80.10^{-6} ; \quad 15.10^{-6} .$$

Les valeurs de $\frac{m}{a}$ sont alors respectivement, au facteur 10^{-6} près:

$$7{,}614 ; \quad 2{,}66 ; \quad 5{,}33 ; \quad 1{,}707 .$$

Le rapport de 7,614 à 5,33, c'est-à-dire celui de $\frac{m}{a}$ pour I à $\frac{m}{a}$ pour III, donne presque exactement le rapport simple $\left(\frac{6}{5}\right)^2$; celui de 2,66 à 1,707, c'est-à-dire celui de $\frac{m}{a}$ pour II à $\frac{m}{a}$ pour IV donne de façon encore plus approchée (à moins de 0,004), $\left(\frac{5}{4}\right)^2$; celui de III à II, celui de I à II, moins approchés, sont voisins respectivement de $\left(\frac{10}{7}\right)^2$ et de $\left(\frac{12}{7}\right)^2$. Les autres rapports s'en déduisent bien entendu.

Le système des satellites I à VI de Saturne, dont l'*Annuaire* donne des valeurs approchées pour les masses, conduit à des résultats analogues, quoiqu'un peu moins bons et d'ailleurs un peu moins sûrs, en raison des erreurs possibles sur les masses.

On peut dire que l'on a, de façon suffisamment précise, les rapports suivants entre les diverses valeurs des $\frac{m}{a}$ pour ces satellites:

$$\frac{m_2}{a_2} \Big/ \frac{m_1}{a_1} = 3{,}22 \text{ ou sensiblement } \left(\frac{9}{5}\right)^2 ;$$

$$\frac{m_3}{a_3} \Big/ \frac{m_2}{a_2} = 3{,}47 \text{ ou sensiblement } \left(\frac{13}{7}\right)^2 :$$

$$\frac{m_4}{a_4} \Big/ \frac{m_3}{a_3} = 1{,}35 \text{ ou sensiblement } \left(\frac{7}{6}\right)^2 ;$$

$$\frac{m_5}{a_5} \Big/ \frac{m_0}{a_4} = 1{,}55 \text{ ou sensiblement } \left(\frac{5}{4}\right)^2 ;$$

$$\frac{m_6}{a_6} \Big/ \frac{m_4}{a_4} = 35{,}3, \text{ c'est-à-dire } (5{,}94)^2 \text{ ou sensiblement } 6^2 .$$

Bien entendu, ces résultats du système de Saturne ne sont pas très probants par eux-mêmes. Ils ne prennent un sens que parce qu'ils se prêtent à être incorporés dans nos résultats d'ensemble.

De bons résultats sont également obtenus avec les anneaux des petites planètes, et individuellement avec Vesta, Junon, Cérès, en utilisant les mêmes hypothèses que plus haut.

Pour se borner à Vesta, Junon, Cérès, en prenant comme diamètres respectivement 390 km, 195 km, 780 km, et en admettant l'égalité des densités, on trouve, pour les rapports des m/a:

$$\frac{m}{a} \text{ Vesta} \Big/ \frac{m}{a} \text{ Junon} = 9{,}03 , \quad \text{soit} \quad 3^2 ;$$

$$\frac{m}{a} \text{ Cérès} \Big/ \frac{m}{a} \text{ Vesta} = 6{,}81 , \quad \text{soit} \quad \left(\frac{13}{5}\right)^2 .$$

Pour la récapitulation des valeurs du nombre n que nous faisons à la fin de la première partie du présent mémoire,

notons ici les valeurs exactes des racines carrées des nombres trouvés, pour $\frac{m}{a}$ des planètes, en nous bornant d'ailleurs à ceux que nous considérons comme carrés parfaits, et en excluant les rapports de carrés:

$$1{,}99\ ;\quad 3{,}994\ ;\quad 8{,}984\ ;\quad 2{,}97\ ;\quad 11{,}85\ .$$

IV. — En raison de l'importance de ces résultats, nous allons nous y attarder un peu, et montrer notamment comment ceux du paragraphe II se relient à ceux du paragraph III.

Si on se borne à l'étude des trajectoires des planètes considérées comme dans un plan, le coefficient $\frac{1}{\cos^2 i}$ de notre formule initiale disparaît; en fait, la formule réduite: $ma = n^2\varepsilon$, avec $\varepsilon = \frac{e}{e_1}$, convient encore très bien pour toutes les planètes, et même pour Mercure, avec toutefois une erreur sensible pour cette dernière, dont le plan d'orbite est le plus incliné sur le plan invariable; la masse de Mercure est d'ailleurs quelque peu incertaine.

Considérons donc deux planètes que nous numéroterons 1 et 2.

Leurs énergies totales sont respectivement, si l'on ne tient compte que de l'action du Soleil:

$$E_1 = -\frac{K\,M\,m_1}{2\,a_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 = -\frac{K\,M\,m_2}{2\,a_2}\ .$$

Par suite:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{m_2\,a_1}{m_1\,a_1} = \frac{m_2\,a_2\,a_1^2}{m_1\,a_1\,a_3^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}\cdot\frac{n_2^2}{n_1^2}\cdot\frac{e_2}{e_1}\ ;$$

e_1 et e_2 sont ici les excentricités des orbites des deux planètes.

On peut encore écrire:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{m_2\,a_1}{m_1\,a_2} = \frac{m_2^2\,m_1\,a_1}{m_1^3\,m_2\,a_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}\cdot\frac{n_1^2}{n_2^2}\cdot\frac{e_1}{e_2}\ .$$

Si ces énergies sont entre elles comme des inverses de carrés de nombres entiers N_1 et N_2, ainsi que cela a lieu pour les

orbites électroniques, structure fine mise à part, on doit avoir:

$$\frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot \frac{e_2}{e_1} \cdot$$

d'où

$$\frac{a_1^2}{e_1} \Big/ \frac{a_2^2}{e_2} = \frac{N_1^2\, n_1^2}{N_2^2\, n_2^2} \cdot$$

On doit avoir aussi:

$$\frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} \cdot \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \frac{e_1}{e_2}$$

d'où

$$\frac{m_2^2}{e_2} \Big/ \frac{m_1^2}{e_1} = \left(\frac{N_1}{n_1}\right)^2 \Big/ \left(\frac{N_2}{n_2}\right)^2 \cdot$$

Et inversement l'une ou l'autre des conditions suffit pour que les énergies soient dans des rapports de carrés de nombres entiers.

Or, les valeurs de $\frac{a^2}{e}$ sont, pour les diverses planètes, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, respectivement:

0,732 ; 76,9 ; 59,87 ; 24,84 ; 560,2 ;
1633 ; 8028 ; 101,859 .

Les valeurs de $\frac{m^2}{e}$ sont les suivantes pour les mêmes planètes respectivement:

0,0152 ; 98,01 ; 59,87 ; 0,125 ; 2.098.407 ;
162.734 ; 4591 ; 33.473 .

Les valeurs de ces rapports $\frac{a^2}{e}$ et $\frac{m^2}{e}$ nous conduisent à des résultats qui nous paraissent probants. Voici les plus intéressants de ces résultats. Les comparaisons entre les diverses planètes ont été faites, pour ceux des résultats que nous donnons ci-après, de façon à éviter les nombres trop grands.

Pour le rapport de $\frac{a^2}{e}$ Terre à $\frac{a^2}{e}$ Mercure, on trouve 81,6 dont la racine carrée est trèsv oisine de 9; pour celui de Saturne à Mars, on trouve 65,6 dont la racine carrée est 8,1; pour celui d'Uranus à Mars, on trouve 323,2, dont la racine carrée est 17,98; pour celui de Neptune à Saturne, on trouve 62,4 dont la racine carrée est 7,9.

Pour le rapport de $\frac{m^2}{e}$ Vénus à $\frac{m^2}{e}$ Mars, on trouve 784, dont la racine carrée est exactement 28; pour celui de la Terre à Mars, on trouve 478, alors que le carré de 22 est 484; pour celui d'Uranus à Vénus, on trouve 47,1 dont la racine carrée est voisine de 7; pour celui de Saturne à Uranus 35,45 dont la racine carrée est très voisine de 6; pour celui de Jupiter à Neptune, on trouve 62,8 dont la racine est 7,93.

Nous nous sommes ainsi bornés à donner ceux des rapports $\left(\frac{N_1 n_1}{N_2 n_2}\right)^2$ et $\left(\frac{N_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{N_2}{n_2}\right)^2$ qui peuvent être considérés comme très voisins de carrés de nombres entiers, savoir 784; 478; 47,1; 35,45; 62,4; 62,8; 81,6; 65,6; 323,2. Les autres se prêtent à peu près aussi bien à être considérés comme des rapports de carrés.

Nous pensons ainsi augmenter *un peu* la force probante du paragraphe précédent.

V. — Dans la théorie de l'atome, il est équivalent de dire que les énergies des électrons sont entre elles comme des carrés parfaits, ou de dire que les moments des quantités de mouvement de ces électrons, en trajectoires circulaires, sont entre eux comme des nombres entiers. Bien que les trajectoires des planètes ne soient pas tout à fait circulaires, admettons que l'on puisse représenter les moments des quantités de mouvement par

$$m \times \sqrt{\frac{KM}{a}} \times a = m\sqrt{KMa} \ .$$

Cela n'entraîne d'erreur sensible que pour Mercure et à la rigueur pour Mars, dont les excentricités ne sont pas très petites. Cherchons si les $m\sqrt{a}$ ne seraient pas entre eux dans

des rapports simples. Nous avons *a priori* une autre raison de soupçonner qu'il puisse en être ainsi, même pour Mercure et Mars. Ce que nous venons de voir précédemment et ce que nous dirons au paragraphe X nous amènent à penser que la charge électrique e de l'électron *joue un rôle* analogue à celui de $\sqrt{\mathrm{KM}m}$ pour les planètes. Or, de la valeur de a en théorie de l'atome:

$$a = \frac{n^2 h^2}{4 \pi^2 m e^2},$$

on tire: $e\sqrt{ma} = \frac{n h}{2 \pi}$, d'où l'on aurait pour les planètes, sous réserve de vérification: rapports des $m\sqrt{a}$ entre eux = rapports simples de nombres entiers.

Les valeurs de $\sqrt{a}$ sont respectivement, pour les planètes de Mercure à Neptune:

0,622 ; 0,850 ; 1 ; 1,235 ; 2,281 ; 3,091 ;
4,396 ; 5,494 .

On en déduit les valeurs $m\sqrt{a}$ ci-après:

0,0348 ; 0,695 ; 1 ; 0,1334 ; 726,180 ; 294,325 ;
64,093 ; 94,820 .

Et de là certains rapports intéressants:

$$\frac{0{,}695 \text{ (Vénus)}}{0{,}0348 \text{ (Mercure)}} = 20, \text{ presque exactement ;}$$

$$\frac{0{,}695 \text{ (Vénus)}}{1 \text{ (Terre)}} = \frac{7}{10}, \text{ au lieu de } 0{,}695 \text{ ;}$$

$$\frac{0{,}1334 \text{ (Mars)}}{1 \text{ (Terre)}} = \frac{2}{15}, \text{ exactement ;}$$

puis:

$$\frac{726{,}18 \text{ (Jupiter)}}{64{,}093 \text{ (Uranus)}} = \frac{34}{3}, \text{ exactement ;}$$

$$\frac{726{,}18 \text{ (Jupiter)}}{94{,}82 \text{ (Neptune)}} = \frac{23}{3}, \text{ soit } 7{,}666 \text{ au lieu de } 7{,}658, \text{ valeur exacte ;}$$

$$\frac{294{,}325 \text{ (Saturne)}}{64{,}093 \text{ (Uranus)}} = \frac{23}{5}, \text{ soit } 4{,}6 \text{ au lieu de } 4{,}592 \text{ valeur exacte .}$$

Ces rapports peuvent d'ailleurs se présenter sous une forme plus simple, si l'on se contente de valeurs un peu moins approchées, mais plus suggestives. On a notamment:

$$\frac{726{,}18\ \text{(Jupiter)}}{294{,}32\ \text{(Saturne)}} = 2{,}47,\ \text{voisin de}\ \frac{5}{2}\ ;$$

$$\frac{94{,}82\ \text{(Neptune)}}{64{,}09\ \text{(Uranus)}} = 1{,}48,\ \text{voisin de}\ \frac{3}{2}\ .$$

On aboutit ainsi à ranger les planètes, de ce point de vue, en deux groupes, planètes inférieures, relativement petites, et planètes supérieures, les plus grosses; dans chacun des groupes, les rapports des $m\sqrt{a}$ (ne disons pas tout à fait ceux des moments des quantités de mouvement) sont des fractions relativement simples, quoique moins simples qu'on aurait pu le penser d'après les rapports, plus suggestifs, des énergies. Nous reviendrons un peu sur ce point au paragraphe XI.

Pour le moment, il nous suffira de noter que les constatations que nous venons de faire sont bien, en principe, dans la ligne des propriétés de discontinuité trouvées aux paragraphes précédents.

Bien que les nombres trouvés pour les rapports soient très près d'être des fractions assez simples encore nous n'en ferons pas état dans notre récapitulation des résultats à la fin de notre première partie.

Pour les quatre gros satellites de Jupiter, désignés par I, II, III, IV, nous avons:

$$\sqrt{a_1} = 2{,}43\ ;\quad \sqrt{a_1} = 3{,}07\ ;\quad \sqrt{a_3} = 3{,}87\ ;$$

$$\sqrt{a_4} = 5{,}135\ .$$

Avec les masses données au paragraphe précédent, on calcule les $m\sqrt{a_1}$ et l'on trouve:

$$m_2\sqrt{a_1} = 109{,}35\ ;\quad m_2\sqrt{a_2} = 76{,}75\ ;\quad m_3\sqrt{a_3} = 302{,}60\ ;$$

$$m_4\sqrt{a_4} = 231{,}05\ .$$

Les rapports des valeurs trouvées pour I, III, IV par rapport à celle trouvée pour II sont respectivement:

$$\frac{10}{7}, \quad \text{à } 0{,}003 \text{ près}, \quad 4{,}03 \quad \text{et} \quad 3{,}01 \ .$$

Ces résultats sont ici meilleurs que ceux qu'on obtient pour les planètes elles-mêmes.

On a aussi des résultats intéressants avec les six satellites I à VI de Saturne, et des résultats acceptables avec les petites planètes.

Pour les satellites de Saturne, par exemple, on a:

$$\frac{m_2\sqrt{a_2}}{m_1\sqrt{a_1}} = \frac{14}{3} \ ; \quad \frac{m_3\sqrt{a_3}}{m_2\sqrt{a_1}} = \frac{29}{6} \ ; \quad \frac{m_4\sqrt{a_4}}{m_3\sqrt{a_3}} = 2 \ ;$$

$$\frac{m_5\sqrt{a_5}}{m_5\sqrt{a_4}} = \frac{5}{2} \ .$$

Le sixième satellite donne des nombres beaucoup trop grands pour être probants dans un sens ou dans l'autre.

Mais les $m\sqrt{\mathrm{KM}\,a}$ ne sont pas les moments cinétiques eux-mêmes [1]. Bien que ceux-ci en soient peu différents, examinons leurs valeurs. Ces moments sont les produits par m des constantes des aires. Leurs expressions sont $m\sqrt{\mathrm{KM}\,a\,(1-e^2)}$, e étant ici l'excentricité de chaque orbite. Les valeurs en sont, pour les diverses planètes, égales aux produits du facteur commun $\sqrt{\mathrm{KM}}$ respectivement par:

$$0{,}0341 \ ; \quad 0{,}695 \ ; \quad 1 \ ; \quad 0{,}1329 \ ; \quad 725{,}6 \ ; \quad 293{,}7 \ ;$$
$$64 \ ; \quad 94{,}8 \ .$$

Ces derniers moments sont normaux aux plans d'orbite. Ils ont un moment résultant perpendiculaire à un plan invariable dit plan du maximum des aires. Prenons pour axe ce moment résultant. Les moments cinétiques par rapport à cet axe seront les mêmes pratiquement que ci-dessus, sauf pour Mercure, dont

[1] L'essentiel des résultats exposés aux paragraphes II, III et V a fait l'objet de deux brèves communications à l'Académie des sciences (*C. R.*, t. 214, 1942, p. 534; t. 217, 1943, p. 527).

le plan d'orbite est incliné sur le plan invariable d'environ 7° 30′; leurs valeurs seront les produits de $\sqrt{KM}$ respectivement par:

0,03383 ; 0,6936 ; 1 ; 0,1329 ; 725,5 ; 293,6 ;
64 ; 94,8 .

Les rapports considérés plus haut pour les $m\sqrt{a}$ gardent à très peu près la même valeur pour les $m\sqrt{a(1-e^2)}\cos i$ que nous considérons maintenant, sauf celui qui intéresse Vénus et Mercure, lequel devient égal à $20{,}50 = \frac{41}{2}$. Si l'on veut se contenter d'une approximation un peu moindre, mais qui donne des résultats suggestifs, on peut ajouter aux rapports donnés précédemment les deux suivants, comme plus haut:

$$\frac{725{,}5\ \text{(Jupiter)}}{293{,}6\ \text{(Saturne)}} = 2{,}47,\ \text{voisin de}\ \frac{5}{2}\ ;$$

$$\frac{94{,}8\ \text{(Neptune)}}{63{,}6\ \text{(Uranus)}} = 1{,}49,\ \text{voisin de}\ \frac{3}{2}\ .$$

VI. — Les propriétés des expressions $\frac{m}{a}$ et $m\sqrt{a}$ pour les planètes, leurs satellites, et les astéroïdes conduisent pour les $a^{\frac{3}{2}}$ et, par suite, d'après la troisième loi de Kepler, pour les durées de révolution, à la propriété suivante. Les durées de révolution ont entre elles des rapports de la forme $\frac{k}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^2$, k, n, p, q étant des nombres entiers.

Le cas des trois premiers satellites de Jupiter est particulièrement probant à ce sujet. Leurs durées de révolution tropique sont respectivement:

$T_1 = 1$ j. 18 h. 28 min.
$T_2 = 3$ j. 13 h. 14 min.
$T_3 = 7$ j. 3 h. 42 min.

On voit que l'on est tout près d'avoir:

$$T_3 = 2T_2$$
$$T_2 = 2T_1\ .$$

On peut ajouter les deux relations: $T_6 = 15\ T_4$ et $T_2 = 7\ T_5$ convenablement vérifiées aussi.

Les quatre premiers satellites de Saturne ont pour durées de révolution tropique:

$$T_1 = 22 \text{ h. } 37 \text{ min.}$$
$$T_2 = 1 \text{ j. } 8 \text{ h. } 57 \text{ min.}$$
$$T_3 = 1 \text{ j. } 21 \text{ h. } 18 \text{ min.}$$
$$T_4 = 2 \text{ j. } 17 \text{ h. } 41 \text{ min.}$$

On voit aussi que l'on est tout près d'avoir:

$$T_3 = 2T_1 \ ,$$
$$T_4 = 2T_2 \ .$$

On peut ajouter les deux relations:

$$T_2 = \frac{4}{3} T_6 \quad \text{et} \quad T_8 = 5\,T_6$$

convenablement vérifiées aussi.

Pour ceux de Mars, on n'est pas loin d'avoir: $T_2 = 4T_1$.

Parmi les planètes, on note les durées de révolution sidérale ci-après:

pour Jupiter 11 ans 315 jours;
pour Saturne, Uranus, Neptune, Pluton, respectivement:

29 ans 167 jours, 84 ans 8 jours, 164 ans 280 jours, 249 ans.

Les rapports de ces durées à celle de Jupiter sont respectivement voisins de $\frac{5}{2}$; 7 ; 14 ; 21.

Comme la masse n'intervient plus dans la propriété dont nous nous occupons, cela peut nous permettre d'aborder le cas des comètes, dont on ne connaît pas la masse. Nous avons bien constaté l'existence de cette propriété pour les 32 comètes périodiques dont le retour a été observé. Et même, pour les 23 numérotées de 2 à 24, on peut mettre le rapport de leur durée de révolution à celle de la comète d'Encke, qui a la plus courte période de révolution, sous la forme $2\left(\frac{p}{q}\right)^2$, l'expression $\frac{k}{n}$ étant alors égale à 2, et les nombres p et q encore assez simples.

On constate de plus de nombreux cas, parmi les 32 durées de révolution, où une telle durée est un multiple entier petit, à très peu près, d'une autre. Nous ne tiendrons pas compte cependant de ces résultats dans nos conclusions, car le réseau des rapports de carrés $\left(\frac{p}{q}\right)^2$, dont nous venons de parler est trop serré pour que les coïncidences ainsi remarquées soient absolument probantes; en raison de la complexité relative de l'expression $\frac{k}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^2$, on peut penser qu'on arrivera toujours à mettre les rapports des durées de révolution sous la forme en question. Il faut remarquer cependant que nos $\frac{k}{n}$ sont très simples, et dans la plupart des cas, égaux à 2. On peut donc dire que si, à eux seuls, ces résultats ne sont pas très probants, du moins ils n'ont rien de contraire aux autres constatations plus probantes, et que, dans une certaine mesure, ils les renforcent.

On dirait la même chose des résultats analogues qu'on a avec les petites planètes dont on ignore la masse.

Du fait que les $a^{\frac{3}{2}}$ sont entre eux dans des rapports de la forme $\frac{n}{k}\left(\frac{p}{q}\right)^2$, on peut supposer que beaucoup de rapports des a entre eux sont aussi de forme assez simple. Nous n'avons cependant pas trouvé à ce sujet de résultats assez nets pour que nous puissions nous y arrêter. On peut rapprocher d'une autre façon les lois concernant $\frac{m}{a}$ et $m\sqrt{a}$, et en conclure que les rapports des cubes des masses sont de la forme: $\frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{q^2}{p^2}$; c'est ce qu'on vérifie en effet directement.

Enfin il nous reste, concernant les durées de révolution, à signaler une propriété assez importante. On sait que Laplace a établi entre les moyens mouvements, autrement dit les vitesses angulaires ω_1, ω_2, ω_3, des satellites I, II, III de Jupiter la relation presque rigoureuse:

$$\omega_1 + 2\,\omega_3 - 3\,\omega_2 = 0 \ .$$

Le fait que tous les coefficients de cette relation sont des nombres entiers petits doit attirer notre attention, en raison du but que nous poursuivons.

Voyons d'abord si cette relation est isolée dans le système solaire ou si elle est vérifiée par d'autres satellites. Nous trouvons d'abord dans le même système de Jupiter les relations:

$$2\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_5 = 0$$
$$2\omega_6 - \omega_7 - 3\omega_8 = 0 \ ,$$

le satellite V étant, comme on sait, le plus proche de la planète. Ces relations sont bien vérifiées, mais sensiblement moins cependant que celle de Laplace. Considérons ensuite le système d'Uranus. Les quatre satellites de cette planète ont des durées de révolution respectivement égales à:

$$T_1 = 2 \text{ j. } 12 \text{ h. } 29 \text{ min. } 21 \text{ s. } 08 = 217.761 \text{ s. } 08 \ ,$$
$$T_2 = 4 \text{ j. } 3 \text{ h. } 27 \text{ min. } 37 \text{ s. } 22 = 318.057 \text{ s. } 22 \ ,$$
$$T_3 = 8 \text{ j. } 16 \text{ h. } 56 \text{ min. } 30 \text{ s. } 37 = 752.190 \text{ s. } 37 \ ,$$
$$T_4 = 13 \text{ j. } 11 \text{ h. } 7 \text{ min. } 7 \text{ s. } 14 = 1.163.227 \text{ s. } 14 \ .$$

On calcule à partir de là:

$$\omega_1 = 2\pi \times 45\ 9\,218.10^{-11}$$
$$\omega_2 = 2\pi \times 27\ 9\,285.10^{-11}$$
$$\omega_3 = 2\pi \times 13\ 2\,944{,}5.10^{-11}$$
$$\omega_4 = 2\pi \times 8\ 5\,967.10^{-11} \ .$$

D'où:

$$\omega_1 + \omega_4 = 2\pi \times 54\ 518\ 5.10^{-11}$$

et

$$\omega_2 + 2\omega_3 = 2\pi \times 54\ 517\ 4.10^{-11} \ .$$

On peut donc écrire, sensiblement avec la même précision que celle de Laplace, la relation :

$$\omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3 + \omega_4 = 0 \ .$$

Pour les quatre premiers satellites de Saturne, on a, avec à peine un peu moins de précision

$$\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3 - 2\omega_4 = 0 \ ,$$

ou même, avec moins de précision encore,

$$\omega_1 - 2\omega_3 = 0 \ ,$$
$$\omega_2 - 2\omega_4 = 0 \ .$$

On peut ajouter les trois relations suivantes entre les ω des satellites consécutifs IV, V, VI d'une part, V, VI, X d'autre part, et VII, VIII, IX enfin:

$$2\omega_4 - 3\omega_5 - \omega_6 = 0$$
$$\omega_5 - 2\omega_6 - 2\omega_{10} = 0$$
$$\omega_7 - 4\omega_8 + 2\omega_9 = 0$$

dont les deux dernières notamment sont très bien vérifiées.

Ceci nous amène alors à examiner le cas des planètes elles-mêmes. L'*Annuaire du Bureau des longitudes* nous donne leurs moyens mouvements diurnes, que nous appellerons ω avec indice de 1 (Mercure) à 9 (Pluton). Ce sont respectivement:

14.723″ 42 ; 5767″ 67 ; 3548″ 19 ; 1886″ 52 ; 299″ 13 ;
120″ 45 ; 42″ 23 ; 21″ 53 ; 14″ 23 .

On constate alors l'existence de la relation:

$$\omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3 - \omega_4 - \omega_5 + 2\omega_6 - \omega_7 - \omega_8 + \omega_9 = 0 \ .$$

Le premier membre a en effet une valeur de l'ordre de grandeur de 1″ par jour.

D'autres relations simples sont les suivantes:

$2\omega_2 + \omega_3 - 8\omega_4 = 0$, à 5″ près par jour ;
$4\omega_3 - 8\omega_4 + 3\omega_5 = 0$, à 2″ près par jour ;
$2\omega_4 - 9\omega_5 - 9\omega_6 = 0$, à 3″ près par jour ;

$\omega_5 - 3\omega_6 + 3\omega_7 - 3\omega_8 = 0$, à 0″ 1 près par jour ;
$\omega_7 - 2\omega_8 = 0$, à 0″ 8 près par jour ;
$\omega_7 - 3\omega_9 = 0$, à 0″ 5 près par jour .

Nous ne pouvons plus dès lors penser que la présence de coefficients *uniquement entiers* et petits dans les relations très simples ci-dessus soit l'effet du hasard, ou même de causes

particulières pour chacune. Nous sommes amené à y voir l'effet d'une cause générale et cela renforce encore l'explication que nous avons suggérée tout à l'heure et que nous développerons bientôt.

En théorie de l'atome, on aurait des relations analogues entre les vitesses angulaires des électrons. Montrons par exemple, en utilisant seulement l'ancienne théorie des quanta, comment on obtiendrait une relation analogue à celle d'Uranus.

Considérons quatre électrons occupant sur des trajectoires circulaires des niveaux n_1, n_2, n_3, n_4. Leurs vitesses angulaires sont de la forme:

$$\omega_1 = \frac{A}{n_1^3} ; \quad \omega_2 = \frac{A}{n_2^3} ; \quad \omega_3 = \frac{A}{n_3^3} ; \quad \omega_4 = \frac{A}{n_4^3} ,$$

A étant une certaine constante faisant intervenir la masse et la charge de l'électron. On en tire:

$$\omega_1 = \frac{\omega_4 n_4^3}{n_1^3} ; \quad \omega_2 = \frac{\omega_4 n_4^3}{n_2^3} ; \quad \omega_3 = \frac{\omega_4 n_4^3}{n_3^3} .$$

Supposons que

$$\frac{n_4}{n_1} = 7 ; \quad \frac{n_4}{n_2} = 6 ; \quad \frac{n_4}{n_3} = 4 .$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\frac{\omega_1}{7^3} = \frac{\omega_2}{6^3} = \frac{2\,\omega_3}{2 \times 4^3} = \omega_4 = \frac{\omega_1 - \omega_2 - 2\,\omega_3 + \omega_4}{7_3 - 6^3 - 2 \times 4^3 + 1} .$$

Or, on vérifie que $7^3 - 6^3 - 2 \times 4^3 + 1 = 0$.

Donc on a aussi: $\omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3 + \omega_4 = 0$ entre les vitesses angulaires des électrons occupant des niveaux dont les numéros sont n_1, n_2, n_3, n_4. Le nombre entier n_4 doit être à la fois multiple de 7, de 6 et de 4. Il est donc égal à 84, ou à un multiple de 84; les autres sont respectivement égaux à 12, 14, 21 ou multiples de ces nombres du même ordre que celui de 84. En fait, il n'en est peut être pas ainsi pour les satellites d'Uranus, à cause de l'inégalité de leurs masses. Mais l'existence de la relation prouve tout aussi bien que pour les électrons, que ces satellites

ne sont pas placés au hasard. Nous reviendrons un peu sur ce sujet au paragraphe XI. Il ne faut voir là pour le moment qu'un moyen d'obtenir dans l'atome la relation constatée dans Uranus.

VII. — La relation $ma = n^2 \frac{e}{e_1 \cos^2 i}$ présente, par rapport aux relations concernant $\frac{m}{a}$, $m\sqrt{a}$, et les durées de révolution, le caractère de comporter les éléments e et i, qui subissent des variations séculaires, alors que m et a n'en subissent pas. On pourrait voir là une certaine difficulté, car n ne pourrait pas, en raison de ces variations, demeurer un entier dans la suite des siècles.

Mais, d'abord, rien n'autorise à extrapoler les variations de e et de i pour un trop long laps de temps, ni à croire qu'elles peuvent se cumuler au-delà d'une certaine limite.

Puis, il faut tenir compte de ce que, contrairement aux électrons de l'atome, la plupart des planètes, pour lesquelles m représente un rapport de masses, ont des satellites, dont les positions différentes par rapport à la planète produisent, du point de vue qui nous occupe, quelque chose d'équivalent à ce que seraient des variations de m et de a, variations séculaires ou, du moins, à très longues périodes. Pour celles des planètes qui n'ont pas de satellites, et pour les satellites eux-mêmes, nous ne pouvons même pas garantir que m demeure absolument constant.

Comme les variations de $\frac{e}{e_1 \cos^2 i}$ sont très lentes, il ne semble pas que l'argument qu'on pourrait donner de l'impossibilité de la constance de n doive être considéré comme autre chose qu'un argument de principe, dont l'importance doit, pour le moment, être tenue pour très relative. On peut d'ailleurs, donner de la loi considérée une variante qui permet d'atténuer beaucoup, au point de le supprimer presque, en fait, l'argument que nous venons d'indiquer.

La relation peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{m\, e_1}{p^2} = \frac{e}{a \cos^2 i},$$

en prenant cette fois pour planète de comparaison, celle dont l'excentricité e_1 est de beaucoup la moins affectée d'un terme séculaire, c'est-à-dire Neptune. Le second membre subit des variations séculaires qui sont à très peu près les valeurs de:

$$\frac{\delta e}{a \cos^2 i},$$

δe désignant les variations séculaires des excentricités.

Ces variations δe pour les diverses planètes sont respectivement, de Mercure à Neptune, en un siècle, de:

$$+ 203.10^{-9} ; \quad - 538.10^{-9} ; \quad - 426.10^{-9} ; \quad + 953.10^{-9} ;$$
$$+ 1642.10^{-9} ; \quad - 3455.10^{-9} ; \quad - 266.10^{-9} ; \quad + 63.10^{-9} .$$

Les variations $\frac{\delta e}{a \cos^2 i}$ ont des valeurs proportionnelles à:

$$+ 534.10^{-9} ; \quad - 744.10^{-9} ; \quad - 426.10^{-9} ; \quad + 626.10^{-9} ;$$
$$+ 316.10^{-9} ; \quad - 359.10^{-9} ; \quad - 14.10^{-9} ; \quad + 2.10^{-9} .$$

On remarque que, pour les quatre premières, on a:

$$\sum_{1 \text{ à } 4} \frac{\delta e}{a \cos^2 i} = - 10.10^{-9}$$

et pour les deux suivantes:

$$\sum_{5 \text{ et } 6} \frac{\delta e}{a \cos^2 i} = - 43.10^{-9} .$$

De sorte que les huit lois élémentaires pourraient s'écrire:

$$\sum_{1 \text{ à } 4} \frac{m}{p^2} = \frac{e}{a e_1 \cos^2 i}$$

$$\sum_{5 \text{ et } 6} \frac{m}{p^2} = \frac{e}{a e_1 \cos^2 i}$$

$$\frac{m}{p^2} = \frac{e}{a e_1 \cos^2 i} \text{ pour 7 et pour 8 .}$$

On aurait donc encore ainsi pour les planètes des lois (4 au lieu de 8), comportant l'intervention de rapports de carrés parfaits, mais cette fois avec la quasi-suppression de l'argument des variations séculaires.

VIII. — S'il s'agit là, comme on est en droit de le croire, d'autre chose que d'*une série de coïncidences fortuites*, nous avons à nous demander à quoi peut tenir une telle propriété. Sans doute faut-il rattacher l'idée de niveau à une raison assez générale pour trouver son application dans le domaine cosmique comme dans le domaine atomique. Puisqu'en mécanique de l'atome on est conduit à présenter la suite discrète des valeurs du rayon de l'orbite comme la conséquence d'une sorte d'effet de résonance entre une onde et le chemin décrit par le mobile, il est naturel de penser que l'introduction, en mécanique céleste, d'une onde de formule mathématique analogue conduira au même résultat.

Soit donc une onde ψ satisfaisant à une équation du type de Schrödinger, mais avec d'autres constantes, évidemment:

$$\Delta\psi + \alpha(E - F)\psi = 0$$

α étant une certaine constante, E l'énergie du mobile, F la fonction potentielle du champ. Moyennant les mêmes considérations que pour le système de l'atome, elle conduira, en s'en tenant même si l'on veut à la propagation géométrique, à des résultats analogues touchant des niveaux d'énergie. De même encore les valeurs propres discrètes de E détermineront les trajectoires stables qui, dans le cas d'un centre unique, comme le Soleil, seront caractérisées par les valeurs entières d'un nombre n, ou par des valeurs demi-entières dans certains cas. Il semble cependant qu'il pourra y avoir une grosse différence, l'interprétation probabiliste qui a prévalu en mécanique ondulatoire ne paraît pas possible ici. Nous reviendrons sur le sens de l'onde ainsi introduite en mécanique céleste.

IX — Il convient auparavant de nous demander dans quelle mesure nous avons répondu à la première question de notre programme. En fait, nous n'avons pas trouvé une loi de distri-

bution des planètes et des satellites en distances ou en durées de révolution. Nous avons simplement trouvé une loi qui fait intervenir, avec le demi-grand axe a et la masse m, un nombre n qui demeure dans chaque cas particulier impossible à justifier de façon exacte: chaque planète occupe une place, assignée par une certaine valeur de n, prise dans la série des niveaux possibles pour elle. Il faut peut-être remonter aux origines du système, et faire de la cosmogonie, pour rendre compte du niveau n occupé en fait par chaque astre du système. C'est ce qu'a fait M. Sevin [1] qui explique par un cataclysme vibratoire cosmogonique la fixation des positions réellement occupées.

Une tentative, à la vérité très différente, avait été faite en ce sens, vers 1910, par M. Belot. On voit que l'idée qui nous conduit est autre, car l'onde que nous postulons est un phénomène actuel et permanent, dont il reste à chercher le sens.

X. — Voyons d'abord quelle fréquence devrait être attribuée à cette ondulation. Nous avons seulement pour nous guider l'analogie mise tout à l'heure en évidence de la loi des niveaux des planètes, avec les résultats de la dynamique atomique. Si l'on désigne maintenant par m la masse d'un électron, par e sa charge, par a le rayon de sa trajectoire supposée circulaire, bien que ce ne soit pas indispensable, son énergie $-\frac{1}{2}\frac{e^2}{a}$ a pour valeurs possibles les valeurs de la forme:

$$-\frac{1}{2}\frac{e^2}{a} = \frac{-2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2},$$

n étant un nombre entier et h la constante d'action.

On en tire:

$$m a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2}.$$

Dans la relation que nous cherchons, ne devront figurer ni e, ni la grandeur quantique h. Au lieu de e^2, il est naturel de penser que devra figurer KMm, K étant le coefficient de la loi

[1] M. Sevin, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 214, 1942, p. 347.

de gravitation, M la masse de l'astre central, m cette fois de nouveau la masse de la planète. En effet $\frac{\mathrm{K\,M}\,m}{a^2}$ est la grandeur qui joue le même rôle que la grandeur atomique $\frac{e^2}{a^2}$ qui mesure l'intensité du champ de forces.

On sait que, si v est la vitesse de l'électron et λ la longueur d'onde qui intervient en dynamique atomique, on a: $h = mv\lambda$. Il est naturel de penser, puisqu'en outre, si V est la vitesse de l'onde de mécanique ondulatoire, on a $v = \frac{c^2}{\mathrm{V}}$, qu'au lieu de $h = mv\lambda$, on devra introduire la grandeur:

$$m \cdot \frac{c^2}{\mathrm{V}'}\lambda = m\frac{c^2}{\nu}$$

V′ désignant la vitesse de l'onde de mécanique céleste et ν sa fréquence. Certes, cela paraît un peu fragile, mais nous jugerons ultérieurement selon les résultats obtenus en nous laissant ainsi guider par une analogie justifiée par des *résultats d'observation.*

La relation cherchée pourrait donc être, k étant un entier:

$$m\,a = k^2 \cdot \frac{m^2\,c^4}{\nu^2} \cdot \frac{1}{4\,\pi^2\,\mathrm{K\,M}\,m}$$

d'où:

$$\nu^2 = k^2 \cdot \frac{c^4}{4\,\pi^2\,\mathrm{K\,M}\,a}\,,$$

et:

$$\nu = k \cdot \frac{c^2}{2\,\pi\,\sqrt{\mathrm{K\,M}\,a}}\,.$$

Cette valeur de ν entraîne tout de suite une première remarque. C'est qu'elle est liée à la masse de l'astre central et non à celle du mobile. C'est donc une onde de champ.

Une autre remarque est que cette fréquence dépend de la distance au centre, et par conséquent varie le long d'un même rayon de l'onde. Tout se passerait comme si un volume quelconque du champ ne restituait pas toute la fréquence qu'il reçoit, c'est-à-dire emmagasinait de l'énergie, sans doute pour la rayonner ensuite à son tour.

XI. — Nous venons de remplacer h par $\frac{m c^2}{\nu}$. Or $m c^2$ étant l'énergie potentielle interne de la matière de masse m, on peut se demander s'il ne conviendrait pas plutôt de remplacer mc^2 par l'énergie potentielle totale, compte tenu de la présence du champ de gravitation. La force agissant sur la masse m étant $\frac{\mathrm{K\,M}\,m}{r^2}$, la réaction exercée par la masse m sur le champ est $-\frac{\mathrm{K\,M}\,m}{r^2}$, à laquelle correspond un potentiel $\frac{\mathrm{K\,M}\,m}{r}$. C'est donc $mc^2 + \frac{\mathrm{K\,M}\,m}{a}$ qu'il faudrait substituer à $m c^2$, ce qui conduirait à remplacer h par $\frac{1}{\nu}\left(m c^2 + \frac{\mathrm{K\,M}\,m}{a}\right)$. Le calcul du paragraphe précédent amènerait alors à écrire:

$$m\,a = k^2 \cdot \frac{m^2\,c'^4}{\nu^2} \cdot \frac{1}{4\,\pi^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{K\,M}\,m}$$

en posant $c'^2 = c^2 + \frac{\mathrm{K\,M}}{a}$; d'où :

$$\nu = k\frac{c'^2}{2\,\pi\sqrt{\mathrm{K\,M}\,a}} = k\frac{c^2}{2\,\pi\sqrt{\mathrm{K\,M}\,a}} + \frac{k}{2\,\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a^3}}\,.$$

Si maintenant, par analogie encore avec l'emploi qu'on fait souvent en mécanique ondulatoire d'une fonction d'onde « réduite », c'est-à-dire dont la fréquence ν_r est égale à la fréquence diminuée de $\frac{m\,c^2}{h}$, on emploie ici une telle fréquence réduite, on trouve:

$$\nu_r = \frac{k}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a^3}}\,.$$

A la surface de l'astre central, de rayon R, ce serait

$$\nu_r = \frac{k}{2\,\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{\mathrm{R}^3}}\,.$$

Un point intéressant à noter, c'est qu'on arrive ainsi à un résultat donné pour la première fois par M. Sevin [1] pour une pulsation des astres signalée d'abord par Shapley. Il est difficile,

[1] *Loc. cit.*

une fois de plus, de voir là une simple coïncidence due au hasard. Ce fait peut au contraire servir de justification au lien un peu fragile établi plus haut entre la fréquence de l'onde atomique et celle de l'onde cosmique.

Enfin, on remarque que la période $\theta = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{a^3}{KM}}$ est, quel que soit a, pour une planète dont a serait le demi-grand axe, de la même forme, au coefficient $\frac{1}{k}$ près, que la durée de révolution de la planète d'après la troisième loi de Képler $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{KM}}$; ceci entraîne que la durée de la révolution contient un nombre entier de fois la période de l'onde, condition de résonance qui précise celle déjà entrevue au paragraphe VIII ci-dessus, et qui explique la stabilité de la trajectoire. On aurait alors à la fois, p et k étant des entiers:

$$2\pi a = p\lambda$$
$$T = k\theta ,$$

d'où v (vitesse de la planète) $= \frac{p}{k}V$ (vitesse de l'onde évaluée avec ν_r). On peut aussi montrer que, de même que la troisième loi de Képler doit subir une légère correction et s'écrire $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{K(M+m)}}$, de même on peut corriger la fréquence réduite ν_r pour tenir compte, non seulement de l'astre central, mais aussi de la planète de masse m qui donne aussi une onde; la condition de résonance se maintient.

Nous sommes maintenant en état d'assigner une valeur au coefficient, jusqu'ici indéterminé, de l'équation que nous avons envisagée au paragraphe VIII comme devant remplacer ici celle de Schrödinger. Dans celle-ci le coefficient de $(E - F)\psi$ est $\frac{8\pi^2 m}{h^2}$. En remplaçant h par $\frac{m c'^2}{\nu}$ et ν par $\frac{k c'^2}{2\pi\sqrt{KMa}}$, ce coefficient devient $\frac{2k^2}{KMma}$. Ce n'est qu'en apparence que le coefficient de ψ dans l'équation dépend de m, masse de la planète, car m figure aussi en facteur dans E et dans F.

La constante h est alors remplacée par le produit par m de la constante $\sqrt{KMa}$ avec un facteur numérique $\frac{2\pi}{k}$.

On arrive aussi, naturellement, à la même valeur devant remplacer h quand on fait la transformation de l'énergie de l'électron:

$$E = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2},$$

avec $e^2 = KMm$. Pour trouver, comme on le doit, $E_i = -\frac{KMm_i}{2a_i}$ pour la planète i, il faut remplacer h par $h_i = \frac{2\pi}{k_i} \cdot m_i \sqrt{KMa_i}$ et même n par k_i. Et l'on pouvait aussi tirer tout de suite ce résultat de $ma = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2}$ en remplaçant toujours e^2 comme ci-dessus.

Déjà, au paragraphe II, nous avions, en raison du fait que les planètes ont des masses différentes, alors que les électrons ont mêmes masses propres et mêmes charges électriques, vu qu'il fallait admettre non pas une série de niveaux d'énergie, mais autant de séries que de planètes. Nous voyons ainsi la même nécessité rendue plus explicite. Dans l'atome, on a: $a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2}$, d'où: $h = \frac{2\pi e}{n}\sqrt{ma}$; donc une seule valeur de $\frac{nh}{\sqrt{a}}$ existe, et une seule série de niveaux d'électrons. On voit bien pourquoi il en est autrement ici.

La question peut alors se poser de comparer les niveaux entre eux dans des séries différentes. Il y a alors à considérer, non seulement les rapports des énergies ou les produits ma eux-mêmes, comme nous l'avons fait; mais aussi les rapports des h'. Malheureusement, nous ne pourrons pas faire ces rapports, parce qu'il semble bien que nous ne puissions pas, quant à présent, connaître les k_i, qui interviennent dans les h_i. Cependant, les $m\sqrt{a}$ semblant, d'après notre paragraphe V, être des rapports de nombres entiers, pas toujours très simples, il est vrai, il doit en être de même des h_i. Cela laisse supposer comme vraisemblable que par delà la série des h_i, il doit exister une valeur élémentaire h_0 dans chaque système de planètes ou de satellites: valeur dépendant sans doute de la masse de l'astre central du système, et telle que $h_i = N_i h_0$, les N étant des nombres entiers.

Dans le système de l'atome, l'expression de la vitesse angulaire ω sur une trajectoire circulaire est $\frac{8\pi^3 m e^4}{n^3 h^3}$. En remplaçant e^2 par $\mathrm{KM}\, m_i$, on transforme cette valeur en:

$$\omega_i = \frac{8\pi^3 m_i^3 \mathrm{K}^2 \mathrm{M}^2}{n^3 h_i^3} .$$

Or, il existe, avons-nous vu, des relations linéaires à coefficients numériques entiers très simples entre les ω_i d'un même système. Cela nécessite que les masses des astres du système, qui sont différentes, ne figurent pas dans les valeurs des ω_i; et cela ne se peut que si les $\frac{h_i^3}{m_i^3}$ sont entre eux dans des rapports très simples.

Peut-être a-t-on:

$$h_i = m_i h_0 ,$$

h_0 étant la valeur qui correspond à une certaine masse unité, sans doute très petite, avec laquelle sont évaluées les m_i. Les N_i pourraient être ainsi les nombres mesurant les masses des astres du système à l'aide d'une certaine même unité très petite.

Nous avons, au paragraphe V, traité empiriquement des moments des quantités de mouvement. En théorie de l'atome, si le rapport des moments pour deux électrons est $\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}_2} = \frac{n_1}{n_2}$, on en déduit par la relation

$$\mathrm{E}_1 = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n_1^2 h_1^2}$$

et par la relation analogue donnant E_2, que $\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$. Ici au lieu de cette relation, nous aurons pour l'énergie la relation transformée ($\mathrm{KM}\, m_1$ remplaçant e^2):

$$\mathrm{E}_1 = -\frac{2\pi^2 m_1^3 \mathrm{K}^2 \mathrm{M}^2}{n_1^2 h_1^2} = -\frac{k_1^2}{n_1^2} \cdot \frac{\mathrm{K\,M}\, m_1}{2 a_1} .$$

La première égalité montre que le rapport des énergies quantifiées serait égal au produit du carré du rapport inverse des quantités de mouvement quantifiées par le cube du rapport des masses. C'est ce qu'on peut vérifier sur nos chiffres des paragraphes III et V, et c'est d'ailleurs bien évident.

La seconde valeur de E_1 nécessite $k_1^2 = n_1^2$, mais ne permet pas de déduire, pour les énergies, le rapport des carrés de n_2 et n_1. Si h_0 existe bien, on aurait par contre pour les rapports des énergies des rapports de carrés faisant intervenir N_1, N_2, n_1, n_2, et toujours le cube des masses. L'inégalité des masses des astres est toujours la différence principale qui empêche de reproduire exactement les résultats atomiques; elle ne disparaît que si les N_1 et N_2 sont dans le rapport des masses.

Remarquons enfin que, si dans notre équation remplaçant celle de Schrödinger, nous remplaçons k_i par sa valeur en fonction de h_i, nous trouvons, comme coefficient de $(E - F)\,\psi$, la valeur $\frac{8\pi^2 m_i}{h_i^2}$, comme on devait bien s'y attendre.

XII. — Il est utile d'apporter un commencement de vérification plus directe de l'existence des niveaux. La formule que nous venons d'en donner lie le niveau n à la masse de l'astre central du système par la relation:

$$a = \frac{n^2 h_i^2}{4\pi^2 m_i^2 \mathrm{KM}},$$

avec sans doute $h_i = m_i h_0$, ou peut-être même $h_i = m_i \mathrm{M} h_0'$, ou encore $h_i = m_i f(\mathrm{M}) h_0''$, $f(\mathrm{M})$ étant alors une certaine fonction de la masse M de l'astre central.

Envisageons d'abord le cas de $h_i = m_i h_0$. Cette hypothèse a contre elle, semble-t-il, de conduire à admettre que, dans un même système, les a seraient entre eux dans des rapports de carrés entiers, alors que, comme nous l'avons dit au paragraphe VI, les résultats numériques à ce sujet ne sont pas assez nets. Il faudrait donc admettre que h_0 dépend encore quelque peu des m_i. Si, dès lors, on considère deux astres de même niveau n, et de même h_0, mais appartenant à des systèmes

différents, dont les masses centrales seront M_1 et M_2, la formule des niveaux nous donne:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} .$$

D'autre part, dans chacun des systèmes, on a, d'après la troisième loi de Képler, entre les demi-grands axes et les durées de révolution sidérales T la relation:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = K M .$$

En rapprochant cette relation de celle des niveaux des a, on trouve la relation des niveaux des T:

$$T = \frac{n^3 h_i^3}{4\pi^2 m_i^3 K^2 M^2} .$$

Nos astres de systèmes différents et de même niveau n et de même h_0 vérifieraient donc numériquement la relation:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 .$$

Si nos considérations de niveau ont un sens physique, si nos formules de niveau ont de la valeur, et si, en outre, notre hypothèse $h_i = m_i h_0$ est celle qui doit être retenue, il doit exister dans les deux systèmes, une correspondance entre les niveaux de même rang telle que les demi-grands axes soient entre eux dans le rapport inverse des masses centrales et que dès lors, les durées de révolution soient dans le rapport inverse du carré de ces masses. Reste à savoir si ces niveaux sont effectivement occupés. En comparant les éléments des satellites de Jupiter et de Saturne qui sont assez nombreux, on peut espérer avoir quelques chances de trouver un tel niveau effectivement occupé. C'est bien ce qui se produit.

L'*Annuaire du Bureau des longitudes* donne les demi-grands axes des satellites des planètes en rapportant dans chaque système ces distances au rayon équatorial de la planète centrale pris comme unité. Il nous faut donc d'abord corriger les nombres

donnés par l'*Annuaire*, en prenant comme unité pour les deux systèmes Jupiter et Saturne le rayon de Saturne par exemple, ce qui conduit à multiplier les demi-grands axes du système Jupiter par $\frac{11,14}{9,43}$.

Le satellite III de Jupiter a pour demi-grand axe $a_1 = 14,99$, et compte tenu de la correction ci-dessus, 17,70. Sa durée de révolution est 7 j. 3 h. 42 min. Le rapport de la masse de Jupiter à celle de Saturne est 3,34, dont le carré est 11,16. Transposé dans le système de Saturne par la formule des niveaux, ce satellite y aurait un demi-grand axe a_2 et une durée de révolution T_2 tels que:

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{M_1}{M_2}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

ce qui conduit aux valeurs numérique suivantes:

$$a_2 = 59,10$$

$$T_2 = 79 \text{ j. } 20 \text{ h. } 5 \text{ m.}$$

Or, le satellite VIII de Saturne a pour éléments correspondants:

$$a_8 = 58,91$$

$$T_8 = 79 \text{ j. } 7 \text{ h. } 55 \text{ m.},$$

C'est là un résultat qui nous paraît digne de remarque.

Nous pensons qu'il appuie dans une assez large mesure nos considérations théoriques, basées sur le remplacement de e^2 par KMm et qui sont évidemment assez fragiles. On peut d'ailleurs ajouter à ce résultat quelques autres faits numériques qui, pour n'avoir pas un caractère aussi probant, n'en sont pas moins de quelque appui. D'abord le satellite I de Jupiter, pour lequel $a_1 = 5,91$, transposé comme ci-dessus dans Saturne, y occuperait une orbite pour laquelle $a_2 = 23,52$, alors que le satellite X de Saturne a pour demi-grand axe de son orbite $a_{10} = 24,17$. De même l'unique satellite connu de Neptune, pour lequel $a_1 = 13,33$, transposé dans Uranus de la même

façon, y occuperait une orbite pour laquelle $a_2 = 16{,}94$, alors que le satellite III d'Uranus a pour demi-grand axe de son orbite $a_3 = 17{,}63$.

Enfin, on peut transposer les satellites d'un système à un autre d'une autre façon. Soit un satellite à distance moyenne a_1 de sa planète, et T_1 sa durée de révolution. Supposons-le transposé dans le système d'une autre planète à distance moyenne a'_2 de celle-ci telle que sa durée de révolution demeure T_1. En général il ne sera pas ainsi sur une orbite de niveau. Imaginons qu'il soit amené à une distance a_2 telle que $a_2 = a'_2 \frac{M_1}{M_2}$. La durée de révolution sera donnée par la troisième loi de Képler appliquée à l'intérieur du même système:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Considérons d'abord le satellite de Neptune. Sa durée de révolution est de 5 j. 21 h. 2 min., ou de $T_1 = 8462$ min. Un astre fictif défini comme ci-dessus aurait pour durée de révolution dans le système d'Uranus:

$$T_2 = 8462 \times \left(\frac{17{,}26}{14{,}58}\right)^{\frac{3}{2}} = 10 \cdot 986 \text{ m.}$$

Si nos considérations ont quelque valeur, on peut prévoir que les opérations faites feront apparaître elles aussi des rapports simples dans le système final; la seconde position de l'astre transposé jouirait donc de propriétés l'assimilant plus ou moins à un niveau stable. C'est bien ce qui a lieu. En effet la durée de révolution du premier satellite d'Uranus est de 2 j. 12 h. 29 min 21 s. Le triple de cette durée, soit 10 888 min. est égal, à quelques minutes près, à celle de notre astre fictif.

Le même satellite de Neptune, transposé de la même façon dans le système de Saturne, aurait pour durée de révolution 10 h. 55 m. Il se situerait très bien dans la série des satellites II et IV de Saturne, dont les durées de révolution, 1 j. 8 h. 53 min. et 2 j. 17 h. 41 min. sont respectivement, à quelques minutes près, le triple et le sextuple de celle de notre astre fictif.

On citerait d'autres cas analogues, quoique moins frappants, établis tantôt avec les T, tantôt directement avec les a. Il nous paraît difficile aussi de n'y voir que des coïncidences.

Les autres hypothèses qu'on pourrait faire sur h_i ne conduisent pas à des résultats intéressants.

XIII. — Abordons maintenant la question délicate de l'interprétation de l'onde. Il ne peut pas s'agir en l'espèce d'une interprétation probabiliste comme celle qui a prévalu en mécanique ondulatoire. L'onde à l'existence de laquelle nous avons conclu au paragraphe VIII est certainement un véritable phénomène physique. On ne voit pas, en particulier, que son *amplitude puisse avoir le sens de la probabilité de présence d'un mobile.* On ne voit pas non plus (même si l'on ne tient pas compte des résultats des paragraphes X et XI, d'après lesquels la fréquence, et par suite la phase, dépendent surtout de la masse M de l'astre central), que l'onde doive être associée seulement à la planète. Il s'agirait donc d'une onde ayant une existence physique réelle, liée au champ dont elle serait le moyen d'action. Sa phase φ devrait, avec cette interprétation, qui nous paraît la seule possible, rendre compte du mouvement de la planète. Comme nous l'a appris la mécanique ondulatoire, nous pourrons chercher à l'identifier avec la fonction de Jacobi du mouvement. Cela sera réalisé simplement si l'on admet que cette phase φ est telle que la force mise en jeu sur un mobile de masse unité par l'action de l'onde ait pour composantes suivant trois axes rectangulaires:

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Les résultats principaux de la mécanique ondulatoire subsistent ainsi dans la mécanique de l'onde cosmique; par exemple le principe de Maupertuis appliqué au mobile coïncidera avec le principe de Fermat appliqué à l'onde. Le champ de gravitation devra être envisagé comme agissant par le moyen des ondes en question auxquelles doit être imputée l'existence de la force du champ.

Si d'ailleurs on envisage un corpuscule soumis à un tel champ agissant par ondes, comme ses dimensions pourront être petites par rapport à la longueur d'onde, la force instantanée du champ pourra différer considérablement de la force donnée par la formule newtonienne, qui n'apparaîtra que comme un effet de moyenne; la force élémentaire pourra même, à la limite, apparaître comme ondulatoire.

Il faut tenir compte, dans cette interprétation physique de l'onde cosmique, d'une objection classique. Laplace a indiqué que si l'on suppose finie la vitesse de propagation de la gravitation, ce qui serait le cas, on ne rendrait pas compte de la stabilité des grands axes. Mais Poincaré a fait remarquer qu'il existerait des compensations entre plusieurs effets, même si la vitesse de la gravitation était seulement de l'ordre de celle de la lumière. D'ailleurs si la phase de l'onde a la propriété ci-dessus, toute question disparaît à ce sujet.

XIV. — On peut se contenter de voir, entre l'onde physique de gravitation, liée au champ, et l'onde de probabilité atomique associée au mobile, une analogie purement mathématique. Mais il serait bien plus satisfaisant de maintenir un parallélisme physique entre elles. Voyons à quelles conditions cela serait possible. Puisque l'onde cosmique serait liée au champ, on est amené à rechercher si l'onde corpusculaire ne le serait pas aussi. Remarquons bien que l'onde liée au champ n'est pas l'onde pilote, envisagée au début de la mécanique ondulatoire, et qui n'a pas pu être maintenue; cela se distingue immédiatement puisqu'en théorie de l'onde pilote, dans le cas limite où il n'y a pas de corpuscule soumis au champ, il n'y a pas d'onde non plus, au lieu que l'onde de champ existerait même en l'absence de tout mobile matériel.

Or, s'il y a dans le système solaire une onde liée au Soleil, pourquoi n'y aurait-il pas dans le système de l'atome, une onde liée au noyau, moyen d'action du champ du noyau, et possédant, comme indiqué au paragraphe précédent, les propriétés mathématiques de l'onde de la mécanique ondulatoire ? Dans une expérience de diffraction des électrons par les cristaux métalliques, nous verrions alors, non pas une onde liée au

mouvement des électrons, mais une onde électrique, distincte évidemment de l'onde électromagnétique, et liée au champ de la différence de potentiel qui produit le mouvement; elle serait le moyen d'action de ce champ, sa phase φ donnerait naissance à la force f agissant sur les électrons, par une relation telle que:

$$f = -\frac{d}{dt} \text{grad.}\, \varphi \ .$$

Nous pouvons même indiquer que c'est l'idée de donner une telle interprétation de la mécanique ondulatoire qui nous a conduit initialement à entreprendre nos recherches dans le domaine de la mécanique céleste, de façon à y trouver trace des mêmes faits. Cela n'empêcherait d'ailleurs pas de conserver, au moins provisoirement, l'idée d'indiscernabilité des corpuscules en groupes, sur lesquels a insisté très judicieusement J.-L. Destouches.

Nous allons chercher si la formule de la fréquence trouvée plus haut peut conduire à retrouver par une marche inverse, dans cette interprétation de l'expérience de diffraction, la formule de la longueur d'onde vérifiée par cette expérience. La fréquence étant $\nu = \frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a^3}}$, on l'écrit quand il s'agit d'électrons décrivant des trajectoires circulaires dans un champ électrique central tel que le champ du noyau atomique:

$$\nu = \frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}\,m}{a} \cdot \frac{1}{m\,a^2}} = \frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{P}}{m\,a^2}} = \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{m\,e\,\mathrm{P}}}{m\,a}$$

P étant le potentiel du champ.

Or, ainsi que nous l'avons rappelé plus haut, on a sur une trajectoire circulaire: $m\,a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2}$. D'un autre côté, la vitesse v de l'électron sur cette trajectoire circulaire est telle que la force vive:

$$m\,v^2 = \frac{e^2}{a} = \frac{4\pi^2 m\,e^4}{n^2 h^2} \ ,$$

d'où: $v = \frac{2\pi e^2}{n\,h}$. Pour $n = 1$, $\frac{v}{c}$ est alors la constante de

structure fine. On trouve donc que:

$$\nu = \frac{k}{2\pi} \cdot \sqrt{m\,e\,\mathrm{P}} \cdot \frac{4\pi^2 e^2}{n^2 h^2}$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{\sqrt{m\,e\,\mathrm{P}}}{h} \cdot \frac{2\pi e^2}{n\,h} = \frac{k}{n} v \frac{\sqrt{m\,e\,\mathrm{P}}}{h} .$$

Comme la vitesse de l'onde $\mathrm{V} = \frac{k}{n} v$, on a finalement:

$$\lambda = \frac{\mathrm{V}}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{m\,e\,\mathrm{P}}} .$$

Mais, à la vérité, nous ne montrons pas que la formule soit générale quelle que soit la trajectoire des électrons. En fait, sur une trajectoire rectiligne, il y aurait un coefficient 2 sous le radical, comme on peut s'en rendre compte facilement, et cela est conforme à l'expérience.

Voici comment on peut montrer l'existence de ce facteur 2. Dans un mouvement circulaire l'électron circulant autour du noyau placé au centre de la trajectoire a une vitesse v telle que

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{2a} ; \qquad \text{d'où} \qquad v^2 = \frac{e^2}{m\,a} .$$

Au contraire, sur une droite passant par le centre, le mobile, supposé partant du repos à l'infini, a au point distant de a du centre une vitesse v' telle que $\frac{1}{2} m v'^2 = \frac{e^2}{a}$; d'où $v'^2 = \frac{2\,e^2}{m\,a}$ et $v' = v\sqrt{2}$. Comme $\mathrm{V}' v' = \mathrm{V} v$, on déduit : $\mathrm{V}' = \mathrm{V}/\sqrt{2}$, et, par suite:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2\,m\,e\,\mathrm{P}}} .$$

S'il est possible, comme nous le croyons, de soutenir cette interprétation, on arriverait à dissocier dans une certaine mesure l'onde et le corpuscule, que les théories de Bohr et Heisenberg allaient jusqu'à présenter comme deux aspects d'une réalité unique. Rien ne s'opposerait plus alors à la recherche d'un parallélisme très étroit entre l'onde cosmique et l'onde atomique. Il y aurait toujours liaison entre l'onde et le cor-

puscule, mais c'est à la manière où il y a liaison entre mobiles et champs de forces. Transposées dans le domaine astronomique, comme nous avons voulu le montrer possible, ces choses redeviennent claires et simples.

XV. — Nous avons recherché aussi s'il n'existait pas des traces d'une distribution des vitesses angulaires de rotation propre des planètes suivant une loi plus ou moins analogue à celle qu'on vient d'exposer. On peut se former l'idée que c'est en comparant, pour les diverses planètes, les rapports de la vitesse orbitale et de la vitesse angulaire de rotation propre ω, qu'on a chance de trouver trace de cette propriété, si elle existe. En effet, quand il s'agit de l'électron, cela donne un moyen de faire disparaître la constante h. Or, puisque nous venons de conclure à l'existence de plusieurs valeurs inconnues des h_i planétaires, une de nos préoccupations doit être de les faire disparaître en choisissant de comparer des valeurs numériques d'expressions où elles ne figurent plus.

Si a est encore le demi-grand axe, la vitesse orbitale est voisine de $\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a}}$, ou mieux encore de $\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a}(1-e^2)}$, e désignant l'excentricité; elle aurait exactement la valeur $\sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a}}$ sur une orbite circulaire. Nous allons considérer les expressions $\frac{2\pi}{\omega} d \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{K\,M}}{a}}$, d désignant le diamètre de chaque planète. Pour faire la comparaison, nous pourrons laisser de côté le facteur commun $\sqrt{\mathrm{K\,M}}$. Les seules planètes pour lesquelles on connaisse les durées de rotation sont, en dehors du cas de Mercure sur lequel nous reviendrons: la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune. Leurs durées de rotation $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ sont respectivement, en minutes, d'après l'*Annuaire du Bureau des longitudes:*

1436 ; 1477 ; 590 ; 614 ; 660 ; 908 ,

le nombre 660 étant un peu incertain pour Uranus.

Les valeurs de $\sqrt{a}$ sont, le demi-grand axe de l'écliptique étant pris pour unité:

1 ; 1,235 ; 2,281 ; 3,091 ; 4,396 ; 4,494 .

Les diamètres sont respectivement, celui de la Terre étant pris comme unité:

1 ; 0,54 ; 11,14 ; 9,4 ; 4 ; 4,3 .

Les expressions $\frac{Td}{\sqrt{a}}$ ont donc les valeurs:

1436 ; 644 ; 2879 ; 1868 ; 600 ; 712 .

On fait sur ces valeurs les remarques suivantes:

La valeur obtenue pour la Terre est égale à 2,01 de celle obtenue pour Neptune; et celle obtenue pour Jupiter à 2,004 de celle obtenue pour la Terre; celle obtenue pour Saturne est 2,92 de celle obtenue pour Mars; enfin celle obtenue pour Uranus est 0,93 de celle de Mars. La rotation d'Uranus étant un peu incertaine, on peut noter que la valeur obtenue pour Uranus serait à peu près égale à celle obtenue pour Mars, si la rotation d'Uranus était de 11 h. 30, ce qui ne paraît pas inadmissible.

Tous ces nombres s'améliorent si l'on prend pour valeur remplaçant la vitesse orbitale $\sqrt{\frac{KM}{a}(1-e^2)}$ au lieu de $\sqrt{\frac{KM}{a}}$. Cette nouvelle valeur, un peu plus approchée, représente le quotient par a de la constante des aires. Les nombres n qu'on trouve sont alors respectivement:

2,001 ; 2,001 ; 2,94 ; 0,94 .

En outre, la valeur obtenue pour Mars étant alors 641 au lieu de 644, car le coefficient $\sqrt{1-e^2}$ joue surtout pour Mars, les valeurs obtenues pour la Terre et pour Mars sont entre elles presque exactement comme 9 et 4.

Tout s'améliorerait encore si l'on remplaçait $\sqrt{1-e^2}$ par $1-e^2$, ce qui revient aussi à remplacer a par le demi-petit axe b. En particulier, la valeur obtenue pour Mars est alors 638, et le rapport ci-dessus devient exactement $\frac{9}{4}$. On a des résultats plus grossiers, mais plus immédiatement frappants, en prenant T en heures et fractions d'heures, et en arrondissant les

nombres trouvés à l'entier supérieur. On trouve respectivement pour Neptune, la Terre, Saturne, Jupiter:

$$12 \; ; \quad 24 \; ; \quad 32 \; ; \quad 48 \; .$$

Il semble donc qu'on puisse énoncer une loi telle que la suivante:

« Les expressions $\frac{2\pi}{\omega} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{KM}{a}}$, calculées pour les diverses planètes d'un même système, sont entre elles dans des rapports simples, et, souvent, dans des rapports entiers. »

La même loi paraît pouvoir être étendue à des astres appartenant à des systèmes différents, par exemple à la Terre et à la Lune. Le rapport des expressions $T \, . \, d \, . \sqrt{\frac{KM}{a}} \cdot \sqrt{1 - e^2}$ s'écrit en effet, T, d, M, a étant relatives au système Soleil-Terre, et τ, δ, u, α au système Terre-Lune:

$$\frac{T}{\tau} \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \sqrt{\frac{M}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1 - (0{,}016)^2}{1 - (0{,}055)^2}}$$

$$= \frac{1}{22{,}32} \cdot \frac{1}{0{,}272} \cdot \sqrt{333.400} \cdot \sqrt{\frac{384.400}{149.500.000}} \, (1{,}0015) = 3{,}95 \; .$$

Appliquée à des corpuscules sphériques, de même diamètre, de même masse, doués de la même vitesse angulaire, la loi ci-dessus exprime que le rapport des demi-grands axes des orbites est égal au carré de nombres entiers, ou au rapport de carrés de nombres entiers. C'est bien la loi connue pour les électrons.

La loi que nous venons d'énoncer pour les planètes serait donc une généralisation de celle qu'on connaît pour les électrons.

On aurait encore des rapports simples, moins simples toutefois, en appliquant la même méthode aux quatre gros satellites de Jupiter, et en admettant que leur durée de rotation est égale à leur durée de révolution, conformément à la théorie du freinage de la rotation par l'astre central, et conformément aux idées et aux observations de M. Antoniadi notamment. Mais nous pensons qu'il vaut mieux ici ne pas en tenir compte pour le moment.

Puisqu'il en est ainsi des rapports des expressions $\frac{d}{\omega\sqrt{a}}$ entre elles ou $\frac{v\,d}{\omega}$ entre elles, cela semble indiquer que chacune de ces dernières expressions peut se mettre sous la forme kA, k étant un nombre entier ou fractionnaire simple, et A une expression ayant les dimensions L^2. C'est cette propriété qui ressemblerait à celle que $\frac{v\,d}{\omega}$ possède pour les électrons en théorie de l'électron tournant, car alors $\frac{v\,d}{\omega}$ peut se mettre sous la forme $\frac{4\,\pi^2\,m\,e^2\,d^2}{5\,n\,h^2}$ ou sous la forme $\frac{1}{5}\,n\,\frac{d^3}{a}$, n étant un nombre entier.

Il n'est pas *a priori* nécessaire que A soit justement égal à $\frac{d^3}{a}$ pour les planètes. Mais il est possible qu'il en soit ainsi. On peut se proposer de le rechercher, et cela d'autant plus que les valeurs des densités des planètes par rapport à celle de la Terre, c'est-à-dire les rapports des valeurs des $\frac{m}{a}$ du paragraphe III à celles des $\frac{d^3}{a}$ montrent aussi l'existence entre ces densités de nombreux rapports simples. Les densités des planètes par rapport à la Terre sont respectivement: 1,1; 0,91; 1; 0,69; 0,25; 0,13; 0,23; 0,22; de nombreux rapports simples (3, 4, 5, 7 notamment) sont à relever entre ces nombres. Si telles sont bien les valeurs de A, les $\frac{d^3}{a}$ doivent, pour les diverses planètes, être dans des rapports de nombres entiers. Pour que ces rapports soient simples, et en raison de l'influence qu'auront les cubes des diamètres, ils sont à rechercher entre planètes qui ne soient pas trop différentes quant à ces diamètres. On est donc conduit à constituer les couples Mercure-Mars, Vénus-Terre, Jupiter-Saturne, Uranus-Neptune. On trouve pour les divers couples les rapports suivants des $\frac{d^3}{a}$, le numérateur correspondant à la première planète du couple :

1,263 ; 1,251 ; 3,059 ; 1,262 .

Or, on a: $\left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1{,}265$ et $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3{,}062$.

On peut donc dire, avec une erreur notable pour le couple Vénus-Terre seulement, que trois de ces rapports sont égaux au rapport simple de carrés entiers $\left(\frac{9}{8}\right)^2$ et le quatrième au rapport simple $\left(\frac{7}{4}\right)^2$.

Les diamètres des planètes ont été pris dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*. En ce qui concerne les satellites, l'*Annuaire* ne les donne pas; si nous voulons étudier ce qu'il en est des I, II, III, IV de Jupiter relativement aux rapports des $\frac{d^3}{a}$, nous prendrons les valeurs ci-après de leurs diamètres respectivement, en kilomètres:

$$3800\ ;\quad 3070\ ;\quad 5600\ ;\quad 5150\ .$$

Les distances à la planète ont été données plus haut.

Les rapports des $\frac{d^3}{a}$ pour II, III, IV à celui de I sont:

$$0{,}33\ ;\quad 1{,}26\ ;\quad 0{,}56\ ,$$

c'est-à-dire à très peu près:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2\ ;\quad \left(\frac{9}{8}\right)^2\ ;\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2\ .$$

Pour des corpuscules de même diamètre, si la loi empirique ainsi trouvée s'y applique toujours, on retrouve la loi connue de distribution en distance des électrons. Il y a là encore un petit appoint à ajouter aux résultats précédents.

Indépendamment de cette loi des carrés, le fait d'avoir trouvé quatre fois des rapports très voisins de 1,26 est un fait digne de remarque et qui signifie peut-être quelque chose.

Si l'on tient compte de ce que les rapports $\sqrt{\frac{m}{a}}$ sont aussi entre eux dans des rapports numériques simples, d'après le paragraphe III, on voit que la loi en question signifie aussi que les diverses valeurs de l'expression $\frac{d}{\omega\sqrt{m}}$ sont des rapports simples, ou que les diverses valeurs de l'expression $\frac{m\,\omega^2\,d}{d^3}$ sont dans des rapports simples de carrés entiers. On voit facilement

que ceci s'interprète en disant que les densités volumétriques moyennes de force centrifuge sont dans des rapports de simples de carrés entiers.

De relations telles que:

$$\frac{v d}{\omega} = k \frac{d^3}{a} ,$$

on tirerait:

$$\frac{m v a}{m \omega d^2} = k ,$$

c'est-à-dire sensiblement:

$$\frac{\text{moment cinétique planétaire orbital}}{\text{moment de rotation planétaire propre}} = \frac{5}{2} k ,$$

ce qui nous rapproche d'une remarque faite par M. J. Barnóthy (*Nature*, 15 juin 1946) sur le même sujet. Plus exactement, au lieu de $\frac{5}{2}$ on aurait un certain coefficient α tenant compte de la densité variable de la matière de chaque planète.

XVI. — En ce qui concerne la recherche d'une propriété analogue pour les directions des axes de rotation des planètes, nous avons pu établir que les expressions $\frac{\omega v}{\cos \varphi}$ possèdent la propriété cherchée, ω étant la vitesse angulaire de rotation propre, v la vitesse orbitale et φ l'angle de l'axe de rotation avec la perpendiculaire, non pas à chaque plan d'orbite, mais à un plan d'orbite moyen qui serait encore celui du maximum des aires, très voisin de l'écliptique. Les rapports de ces expressions les unes aux autres sont les mêmes que ceux des expressions $\frac{1}{T \cdot \sqrt{a} \cdot \cos \varphi}$, T étant encore la durée de la rotation et a la longueur du demi-grand axe.

On a, pour les planètes Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, les valeurs ci-après de T en minutes:

1436 ; 1477 ; 590 ; 614 ; 660 ; 908 ;

le nombre 660 étant assez incertain pour Uranus.

Les valeurs de $\sqrt{a}$ sont respectivement:

1 ; 1,235 ; 2,281 ; 3,091 ; 4,396 ; 5,494 .

Les valeurs de φ, à quelques minutes d'arc près, sont:

23° ; 25° ; 2° ; 28° ; 82° ; 58° ;

les directions des axes de rotation sont mal connues pour Mercure et Vénus.

On calcule les valeurs suivantes des expressions $T . \sqrt{a} . \cos \varphi$:

1322 ; 1653 ; 1345 ; 1671 ; 404 ; 2642 .

On constate les propriétés suivantes. Par rapport à celui qui concerne la Terre, les nombres relatifs à Jupiter et à Neptune donnent les rapports n égaux à 1,019 et 1,998, très voisins de 1 et 2; par rapport à celui qui concerne Mars, celui de Saturne donne 1,0108; et d'autre part celui de Mars est égal à 4,09 fois celui, assez incertain, relatif à Uranus. Comme au paragraphe précédent, on verrait que si la rotation d'Uranus était de 11 h. 20′, ce qui ne paraît pas inadmissible, ce dernier résultat serait très amélioré et deviendrait très voisin de 4.

Sous une forme plus grossière, mais plus frappante, analogue à celle que nous avons donnée au paragraphe précédent, on a, pour la Terre, Jupiter, Mars, Saturne, Neptune, respectivement les nombres:

44 ; 44 ; 55 ; 55 ; 88 .

On voit se reproduire, pour l'établissement de cette loi, les deux mêmes séries de planètes que dans le précédent paragraphe. Enfin, le rapport $\frac{\text{Terre}}{\text{Mars}}$ qui donnait dans le précédent paragraphe la fraction simple $\frac{9}{4}$ (après correction par l'introduction du facteur $\sqrt{1 - e^2}$), donne ici la fraction simple aussi $\frac{4}{5}$. Nous pouvons donc énoncer la loi suivante : « Les expressions $T . \sqrt{a} . \cos \varphi$ ou $\frac{\omega \rho}{\cos \varphi}$ sont, pour les diverses planètes, dans des rapports simples, et souvent dans des rapports entiers. »

Nous pensons que cette loi s'étendrait aussi à la comparaison d'astres appartenant à des systèmes différents, ce qui ferait comme plus haut, intervenir les masses des astres centraux de ces systèmes. Toutefois, la vérification que nous avons voulu en faire pour la Terre et la Lune donne des rapports trop grands pour qu'on puisse les considérer comme probants dans un sens ou dans l'autre.

Si on applique la loi en question à des corpuscules de même vitesse angulaire de rotation et d'axes parallèles, on retrouve encore une fois la loi connue pour les électrons de la proportionnalité des grands axes aux carrés de nombres entiers n.

En rapprochant les lois données au paragraphe précédent et au présent paragraphe, on trouve que d'autres expressions présentent les mêmes propriétés. Les plus simples sont $\frac{d}{a \cos \varphi}$ et $T^2 d \cos \varphi$.

XVII. — L'expression $\frac{d}{a \cos \varphi}$ permet de comparer entre elles celles des petites planètes dont on connaît le diamètre, sans connaître la masse, en les choisissant à la même distance a sensiblement et en admettant que leurs axes sont à peu près parallèles. Si la loi est vraie, on doit prévoir que la comparaison donnera pour les rapports des diamètres des nombres entiers ou fractionnaires simples. C'est bien ce qui a lieu. D'après l'*Annuaire* de 1912, les diamètres des plus importantes des petites planètes sont en effet: pour Cérès et Vesta, 652 km; pour Pallas, 518 km; pour Junon, 326 km.; pour Laetitia et Dembowska, 260 km, ces quatre nombres étant tous multiples petits et entiers, à très peu près, d'un même nombre entier 65; pour Hygiée, Eumonia, Davida, 342 km; pour Patrocle et Psyché, 272 km, ces deux nombres étant également très voisins de multiples petits et entiers d'un même nombre entier 34; pour Hébé et Iris 284 km. Les diamètres que donne l'*Annuaire* de 1912 ne sont sans doute plus ceux qu'on doit considérer comme les mieux vérifiés actuellement, mais seuls leurs rapports nous importent. On donne actuellement comme diamètre de Cérès, Vesta, Junon, respectivement 780, 390 et 190 km. Mais les rapports demeurent simples.

On connaît aussi de façon convenable le diamètre des quatre gros satellites de Jupiter, soit pour I, en kilomètres, 3800; pour II, 3070; pour III, 5600; pour IV, 5150. Les distances a correspondantes sont, en milliers de kilomètres: 420, 670, 1065, 1880. Les directions d'axes sont moins bien connues, mais il semble que l'on puisse, sans grosse erreur, les considérer comme à peu près parallèles. La loi en question donnerait alors divers résultats à remarquer, notamment 1,96 pour le rapport de $\frac{d}{a}$ pour I avec $\frac{d}{a}$ pour II, et 1,91 pour le rapport analogue de III avec IV. Nous n'en tiendrons pas compte cependant dans notre récapitulation des résultats.

On peut donc énoncer une loi d'après laquelle:

« Les expressions $\frac{d}{a \cos \varphi}$ sont, pour les diverses planètes, dans des rapports simples. »

On peut même ajouter une précision, au moins pour celles des planètes dont la rotation propre n'a pas été freinée pour devenir d'une durée égale à celle de leur révolution autour de l'astre central. Si l'on fait le calcul des $\frac{d}{a \cos \varphi}$ pour les diverses planètes de la Terre à Neptune, on trouve comme rapports de leurs valeurs respectives à celle de cette même expression pour la Terre: 1; 0,36; 1,971; 1,022; 1,423; 0,249; c'est-à-dire: 1 ; $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{7}{5}\right)^2$; 1 ; $\left(\frac{6}{5}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Cette remarque montre qu'appliquée à des corpuscules de même diamètre et d'axes parallèles, cette propriété redonne elle aussi la loi de distribution en distance connue pour les électrons.

En ce qui concerne Mercure et Vénus, nous n'en avons pas fait état au sujet des rotations; celle de Mercure est désormais bien connue, grâce à M. Antoniadi; mais comme elle est grande, de 88 jours comme la révolution, elle donne un nombre n assez grand, de sorte qu'une faible erreur sur l'un des autres éléments de l'expression $\frac{T\,d}{\sqrt{a}}$, en particulier sur le diamètre, conduit à une erreur sérieuse sur le nombre n et empêche de conclure de façon certaine que celui-ci est ou non entier ou fractionnaire simple. Quant à la rotation de Vénus, elle est encore inconnue.

Par contre, on a, d'après les observations de M. Antoniadi et de M. Danjon, des renseignements meilleurs sur les directions des axes de rotation. L'axe de Mercure est peu incliné sur une perpendiculaire à son plan d'orbite et a, par suite, par rapport à la perpendiculaire à notre plan de comparaison, voisin de l'écliptique, une inclinaison que nous admettrons d'environ 10°. Celui de Vénus est également peu incliné sur une perpendiculaire à son plan d'orbite et semble avoir, par rapport à la perpendiculaire à notre plan de comparaison, une inclinaison de 10° environ lui aussi.

Cela nous permet de vérifier la loi que nous venons de donner pour $\frac{d}{a \cos \varphi}$. Pour Mercure, on a $d = 0{,}37$ et $a = 0{,}387$; pour Vénus $d = 0{,}966$ et $a = 0{,}723$. Les nombres qu'on trouve ainsi sont donc respectivement 0,95 et 1,33; leur rapport est de $\frac{7}{5}$. Ceci nous apporte un autre argument assez sérieux; nous ne le retiendrons cependant pas dans notre récapitulation des résultats.

On peut encore penser à utiliser la durée de rotation d'une petite planète, à condition qu'elle soit bien connue, ainsi que son diamètre. Tel paraît être le cas de Vesta, dont la durée de rotation est de 5 h. 58′; son diamètre est 390 km; sa distance au Soleil est 2,362, dont la racine carrée est 1,538; l'excentricité de son orbite est 0,09. En comparant la Terre à cette petite planète par la loi des rotations, c'est-à-dire en faisant le rapport des expressions $\frac{T\,d}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{1 - e^2}$, on trouve:

$$\frac{1436}{348} \cdot \frac{2 \times 6370}{390} \cdot \frac{1538}{1} \cdot \sqrt{\frac{1 - (0{,}016)^2}{1 - (0{,}09)^2}} = 200{,}02 \ .$$

Le résultat semblerait pouvoir servir à renforcer la loi donnée. Mais en raison de la grandeur du nombre trouvé, une petite variation dans les éléments utilisés conduit à une variation assez importante sur ce nombre et cela empêche de considérer le cas comme probant.

On connaît la durée de rotation d'Eunomia, 3 h. 2′; si l'on connaissait son diamètre de façon exacte, on aurait un autre critérium possible de la loi concernant $\frac{T\,d}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - e^2}$.

XVIII. — Poursuivant encore la recherche de parallélismes entre les propriétés des électrons atomiques et celles des planètes, nous allons aborder un sujet encore plus délicat en fixant notre attention sur l'existence pour les électrons d'un moment magnétique $\mathfrak{M}$ et d'un moment de rotation propre M, dont le rapport pour un même axe est égal à $\frac{e}{m\,c}$ en valeur absolue, e et m désignant toujours la charge ($u\,.\,e\,.\,s$) et la masse de l'électron. La Terre possède bien un moment magnétique $\mathfrak{M}$ dont l'Institut de physique du globe nous donne la grandeur et la direction. Sa grandeur est $8{,}04.10^{25}$ $u\,.\,e\,.\,m$; son axe perce l'hémisphère boréal au pôle de Gauss dont les coordonnées sont à peu près 78°32′ N. et 69°8′ W. Greenwich. La densité moyenne de la Terre, d'après l'*Annuaire du Bureau des longitudes* est 5,52. Si cette densité était uniforme, le moment de rotation de la Terre par rapport à l'axe des pôles géographiques serait $\frac{2}{5} m_0 \omega \mathrm{R}^2$, m_0 étant la masse de la Terre (598.10^{25} gr d'après l'*Annuaire*), ω la vitesse angulaire $\frac{2\pi}{86.400}$, et R le rayon de la sphère ayant même volume, soit $6{,}37.10^8$ cm.

Mais la densité n'est pas uniforme. La formule de M. Véronnet, qui rend le mieux compte des faits expérimentaux, donne pour la valeur de la densité à une distance r du centre de la Terre: $10{,}41 - 8{,}18 \frac{r^2}{\mathrm{R}^2}$. En refaisant avec cette valeur de la densité le calcul du moment d'inertie de la Terre supposée sphérique, on trouve pour le moment de rotation $0{,}30\ m_0\ \omega \mathrm{R}^2$. En tenant compte de l'aplatissement, on n'augmente cette valeur que de façon insensible; le moment de rotation suivant l'axe magnétique qui fait avec la ligne des pôles géographiques un angle de 11°28′, est trouvé égal à $0{,}295\ m_0\ \omega\ \mathrm{R}^2$. On obtient alors, en $u\,.\,e\,.\,m$:

$$\frac{\mathfrak{M}\,c}{\mathrm{M}} = \frac{8{,}04 \times 864.10^2 \times 3.10^{10}}{0{,}295 \times 2\pi \times 598 \times (6{,}37)^2 \,.\, 10^{16}} = 4{,}64.10^{-5}\ .$$

Le rapport $\frac{\mathfrak{M}\,c}{\mathrm{M}}$ a les mêmes dimensions que $\frac{e}{m}$.

Pour que nous puissions avoir le parallélisme cherché, il faudrait que ce rapport fût égal à ce qui devrait remplacer le

rapport $\frac{e}{m}$. Or nous avons eu précédemment à remplacer e^2 par le produit par la constante de gravitation du produit des masses du Soleil et d'une planète. Ici cela nous conduit à remplacer e^2 par Km_0^2, c'est-à-dire e par $m_0\sqrt{K}$ et $\frac{e}{m}$ par $\sqrt{K}$, qui est égal à $2{,}58.10^{-4}$. c. g. s. On trouve donc ainsi pour $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ une valeur qui serait bien du même ordre de grandeur que la première; celle-ci serait cependant six fois trop petite environ. Il ne fallait évidemment pas s'attendre à un résultat bien meilleur, et, tel que, il est déjà peut-être assez curieux.

Toutefois, on peut encore y regarder de plus près. La valeur *expérimentale*, donnée pour $\mathfrak{M}$, et obtenue par procédés statiques, conduit à admettre un certain nombre de moments magnétiques moléculaires dans la Terre, et il semble que ce doive être des magnétons de Weiss. Mais, en dynamique de l'électron, le moment magnétique moléculaire qui intervient est celui de Bohr, égal à un peu plus de cinq magnétons de Weiss. Jusqu'à quel point cela justifierait-il de multiplier le moment $\mathfrak{M}$ par 5 dans cette question ? On trouverait alors, pour $\frac{\mathfrak{M}c}{M}$ la valeur $2{,}32.10^{-4}$, assez proche de $2{,}58.10^{-4}$ qui représente $\sqrt{K}$. Sans doute cette opération est-elle d'une interprétation délicate et diminue-t-elle sensiblement la valeur de la coïncidence trouvée; le problème de la valeur du magnéton (statique et dynamique) se retrouve cependant dans d'autres questions. Sous cette réserve (et même jusqu'à un certain point sans elle, en raison de l'ordre de grandeur analogue des deux valeurs $\frac{\mathfrak{M}c}{M}$ et $\sqrt{K}$), on peut admettre qu'il n'y a pas là non plus une coïncidence due simplement au hasard. On est alors conduit à conclure à une relation entre le magnétisme d'une part, et la gravitation et la rotation des planètes d'autre part, de sorte que l'on aurait avec la gravitation des phénomènes magnétiques analogues à ceux que l'on a avec l'électricité, mais seulement beaucoup plus petits. Cela est étonnant dans l'état actuel des théories physiques, et nous ne devons pas y insister.

Une autre remarque est d'ailleurs susceptible de conduire au même résultat numérique. Dans les atomes des éléments alca-

lins, la valeur du rapport $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ des valeurs absolues des moments magnétiques et de rotation de l'électron n'est pas forcément $\frac{e}{m\,c}$, mais $g\frac{e}{2\,m\,c}$, g étant le facteur numérique de Landé, introduit pour l'explication de l'effet Zeeman anomal dans ces éléments. Ce facteur a pour valeur $\frac{2j+l}{2l+l}$, j et l désignant deux nombres dont le premier peut prendre les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc... et le second les valeurs 0, 2, 4, 6, etc.

On voit que pour $j = \frac{1}{2}$ et $l = 2$, on a $g = \frac{2}{5}$ et par suite $5\frac{\mathfrak{M}\,c}{M} = \frac{e}{m}$. En remplaçant $\frac{e}{m}$ par $\sqrt{K}$, on obtient la relation approximativement vérifiée numériquement par la Terre: $\frac{5\,\mathfrak{M}\,c}{M} = \sqrt{K}$.

En tout état de cause, retenons du moins la coïncidence de l'ordre de grandeur des valeurs trouvées.

XIX. — Jetons maintenant un coup d'œil rétrospectif sur les valeurs des nombres trouvés tant dans l'étude des orbites des planètes que dans celle de leurs rotations propres ou de leurs inclinaisons d'axe. Nous avons trouvé de nombreux rapports simples, d'autres moins simples, mais jamais compliqués cependant, les uns et les autres étant vérifiés à très peu près par les nombres exacts déduits de nos opérations. En outre, nous avons trouvé de nombreuses valeurs numériques entières, que nous avons généralement désignées par n aux paragraphes II, III, XV et XVI en vue de la récapitulation que nous voulons en faire ici. Nous constatons que, même en ne tenant pas compte des satellites, pour lesquels nous avons eu cependant des résultats très suggestifs, ces nombres se groupent de la façon suivante:

23 d'entre eux, sur 27, diffèrent de moins de 0,1 d'un nombre entier; les 4 autres en diffèrent de moins de 0,2.

Si on laisse encore de côté les nombres relatifs aux petites planètes, ne gardant que ceux relatifs aux orbites, aux rotations et inclinaisons d'axe des grosses planètes (sauf Pluton), on trouve que sur 20 nombres n, 10 diffèrent d'un nombre

entier de moins de 0,02; 2 autres en diffèrent de 0,05 au plus; et les 8 autres de quantités comprises entre 0,05 et 0,11.

XX. — Il nous reste maintenant à nous demander encore une fois si les propriétés numériques curieuses que nous avons signalées ne pourraient pas être simplement l'effet du hasard.

D'abord, pour en juger, il faut remarquer que ce n'est pas d'après une seule série de propriétés que nous voulons avancer nos conclusions, mais bien d'après huit séries de propriétés concernant respectivement ma, $\frac{m}{a}$, $m\sqrt{a}$, $m\sqrt{a(1-e^2)}$, $\frac{\mathrm{T}d}{\sqrt{a}}$, $\mathrm{T}\sqrt{a}\cos\varphi$, $\frac{d}{a\cos\varphi}$, $\Sigma n\omega$, sans parler de la propriété du rapport des durées de révolution, ni de la propriété magnétique, ni des coïncidences d'astrophysique et de mécanique céleste rencontrées: toutes choses cependant qui pèsent d'un poids sérieux sur le jugement qu'on doit faire.

De plus, dans chacune de ces séries, les résultats obtenus ne paraissent guère pouvoir être seulement l'effet du hasard. Considérons en particulier les résultats obtenus pour les rapports des $\frac{m}{a}$ pour les huit planètes de Mercure à Neptune. Ils comportent en particulier que, parmi tous les rapports que donnent ces huit nombres les uns par rapport aux autres, il en est quatre indépendants les uns des autres qui diffèrent extrêmement peu des carrés parfaits 2^2, 3^2, 4^2 et 9^2; les racines carrées de ces nombres diffèrent de nombres entiers respectivement de moins de 0,03; 0,02; 0,01; 0,006.

Si l'on cherche à évaluer la probabilité d'un tel résultat avec huit nombres pris au hasard, on a affaire à un problème assez compliqué d'analyse combinatoire. Nous avons dû nous borner à traiter le problème expérimentalement. Nous nous sommes fait donner vingt séries de huit nombres de l'ordre de grandeur de ceux que nous avions trouvés pour les valeurs des $\frac{m}{a}$, et nous avons cherché combien, parmi les rapports qu'on peut déduire entre ces huit nombres dans chaque série, il en est dont les racines carrées diffèrent de nombres entiers des quantités au plus égales à celles que nous venons d'indiquer.

Sur ces 20 séries de huit nombres, 10 ont comporté des rapports dont les racines carrées différaient de moins de 0,03 d'un nombre entier; parmi elles, 3 séries présentaient chacune deux fois cette propriété, et 2 la présentaient trois fois; aucune ne la présentait quatre fois !

Quatre de ces 10 séries présentaient, chacune une fois seulement, la même propriété avec la limite de 0,02 au lieu de 0,03: elles sont comprises dans la statistique ci-dessus relative à la limite 0,03. Une seule série la présentait, et une seule fois, avec 0,01.

Enfin, aucune série ne présentait la propriété avec limite supérieure 0,006. Sans doute ce n'est là que de la statistique. Encore ne porte-t-elle pas sur des nombres très grands, puisqu'il s'agit de 20 séries seulement. On connaît bien la différence de principe qu'il faut faire entre la statistique et la probabilité. Il n'en reste pas moins que ce sondage donne un argument important contre l'attribution au hasard de ce qui ne serait d'ailleurs qu'une partie de l'un des huit groupes de propriétés signalées.

On pourrait penser que le résultat sur les moyens mouvements ω, qui est peut-être le plus important et le plus précis de tous ceux que nous avons donnés, conduirait à un problème de probabilités plus abordable théoriquement. Il faudrait chercher la probabilité pour que, trois nombres au moins ω quelconques étant donnés, on puisse trouver trois nombres entiers p, q, r au plus égaux à 3 (comme dans la plupart de nos exemples ci-dessus paragraphe VI), et tels que l'on dit:

$$p\,\omega_1 + q\,\omega_2 + r\,\omega_3 = 0 \ ,$$

à moins de $2\pi.10^{-10}$ près, par exemple. En fait, le problème demeure très ardu. On peut le simplifier en réduisant les nombres ω à 2, entiers et inférieurs à 1000 par exemple et en admettant la relation $p\omega_1 + q\omega_2 = 0$ comme rigoureuse. On trouve bien alors une probabilité très faible. Mais on n'a aucune relation entre cette probabilité et l'ordre de grandeur de celle qu'on chercherait dans le problème véritable. Néanmoins, nous ne croyons pas nous hasarder beaucoup en estimant cette dernière très faible aussi.

XXI. — Ces constatations justifient la recherche d'une explication comme celle que nous venons d'exposer.

Il faudrait leur ajouter la coïncidence magnétique rencontrée en dernier lieu, si elle venait à être confirmée. Si l'on admet que ces faits justifient la conclusion de l'existence d'une onde cosmique, on voit que ce n'est pas seulement pour les phénomènes corpusculaires, dits quantiques, que peut être donnée une théorie ondulatoire des faits mécaniques. Il existerait seulement à ce point de vue une différence d'échelle, mais non de nature, entre les domaines atomique et cosmique. La constante h n'aurait, si grande que soit son importance, aucun rôle spécial, mais représenterait seulement la valeur que prend, pour les électrons, une grandeur figurant dans tous les phénomènes physiques où interviennent des ondes. Et, à toute échelle, *dans ce genre de phénomène*, les résultats à prévoir seraient différents suivant que l'on tiendrait compte ou nom de l'existence de ces ondes.

XXII. — *Résumé des principaux résultats obtenus :*

1. Les demi-grands axes « a » des orbites des planètes vérifient des relations de la forme :

$$a = n^2 \frac{A}{m} ,$$

A étant une expression dépendant de l'excentricité de l'orbite et un peu de l'inclinaison de son plan, m la masse de la planète, n un nombre entier ou « demi-entier ».
Les valeurs trouvées pour n sont très voisines de :

4 ; 10 ; 16,5 ; 24 ; 29 ; 31 .

Les unes sont relatives à Mercure, les autres à la Terre, prises respectivement pour termes de comparaison.

2. Les rapports des énergies des planètes, ou, ce qui revient au même, les rapports des quantités $\frac{m}{a}$ sont des carrés de nombres entiers ou des rapports simples de carrés de

nombres entiers; on trouve en particulier que quelques-uns de ces rapports sont:

$$2^2 \; ; \quad 3^2 \; ; \quad 4^2 \; ; \quad 9^2 \; ; \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 .$$

Si l'on rapporte les énergies des quatre planètes inférieures à celle de Mars, on trouve:

$$\left(\frac{10}{7}\right)^2 ; \quad 4^2 \; ; \quad \left(\frac{15}{4}\right)^2 ; \quad 1 \; ;$$

et si l'on rapporte les énergies des quatre planètes de Jupiter à Neptune à celle de Jupiter, on trouve:

$$1 \; ; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2 ; \quad \left(\frac{1}{9}\right)^2 ; \quad \left(\frac{3}{31}\right)^2 .$$

Mêmes résultats et parfois plus frappants avec les systèmes de satellites.

3. Les rapports des moments quantités de mouvement $m\sqrt{\mathrm{KM}\,a(1-e^2)}$ sont des rapports assez simples. Celui de Vénus rapporté à celui de Mercure est égal à 20; ceux de Vénus et de Mars rapportés à celui de la Terre sont $\frac{7}{10}$ et $\frac{2}{15}$; celui de Jupiter rapporté à ceux de Saturne, Uranus, Neptune donne:

$$\frac{5}{2} \; ; \quad \frac{34}{3} \; ; \quad \frac{23}{3} ,$$

le tout, avec des erreurs très faibles.
Mêmes résultats et souvent plus frappants pour les systèmes de satellites.

4. Il y a de nombreux rapports simples des durées de révolution. Il y a surtout de nombreuses relations de la forme:

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 = 0$$

entre les moyens mouvements ω et des nombres entiers p positifs ou négatifs, généralement très petits. Nous signalons 17 de ces relations, en nous bornant à celles qui sont

très bien vérifiées. Sur 56 coefficients p qu'elles contiennent, 50 sont égaux à 1, 2 ou 3; 6 seulement sont supérieurs à 3; parmi ces 6, il y en a 2 égaux à 4; 2 égaux à 8 et 2 égaux à 9.

Ces relations généralisent la relation de Laplace entre les moyens mouvements des trois premiers satellites de Jupiter.

5. Si T désigne la durée de rotation propre des planètes, et d leur diamètre, les valeurs des expressions $\frac{\mathrm{T}\,d}{\sqrt{a}}$ pour les diverses planètes sont dans des rapports simples et souvent dans des rapports entiers.

Pour Neptune, la Terre, Saturne, Jupiter, ces rapports sont particulièrement simples, les valeurs des $\frac{\mathrm{T}\,d}{\sqrt{a}}$ étant entre elles comme:

$$12\ ;\quad 24\ ;\quad 32\ ;\quad 48\ .$$

6. Si φ désigne l'angle de l'axe de rotation de chaque planète avec la perpendiculaire au plan de l'orbite, les expressions $\mathrm{T}\sqrt{a}\cos\varphi$ sont entre elles, pour la Terre, Jupiter, Mars, Saturne, Neptune, comme:

$$44\ ;\quad 44\ ;\quad 55\ ;\quad 55\ ;\quad 88\ .$$

Elles sont donc dans des rapports simples et souvent entiers.

7. Les expressions $\frac{d}{a\cos\varphi}$ sont dans des rapports simples. Pour les diverses planètes de la Terre à Neptune, rapportées à la Terre, on a les rapports très bien vérifiés:

$$1\ ;\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2;\quad \left(\frac{7}{5}\right)^2;\quad 1\ ;\quad \left(\frac{6}{5}\right)^2;\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

(à suivre)