Le groupe des transformations de la logique des propositions bivalentes

ment précurseur de l'époque würmienne; aucun reste de l'activité humaine n'a été découvert jusqu'à présent dans cette couche profonde. Après le retrait glaciaire würmien, l'activité de la grotte reprend. Les sédiments superposés à la terre à ours se sont déposés de l'extrême fin du Pléistocène aux temps actuels.

Mon travail a été grandement facilité par l'aide de MM. M. Blanchet, E. Dottrens, Ch. Jeannet, E. Renaud, qu'ils en soient remerciés.

Jean Piaget. — *Le groupe des transformations de la logique des propositions bivalentes.*

On sait que, au moyen de deux propositions quelconques, p ou q, il est possible de construire seize liaisons distinctes, telles que l'implication $p \supset q = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; la disjonction $p \vee q = (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$; la conjonction $p \cdot q$; l'incompatibilité $p/q = (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; la négation conjointe $\bar{p} \cdot \bar{q}$; etc. Chacune de ces liaisons comporte alors:

1° Une *inverse*, définie par sa négation (= sa complémentaire par rapport à $p \cdot q \vee \underline{p \cdot \bar{q}} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot q$). Par exemple l'inverse de $p \vee q$ est $\overline{(p \vee q)} = \bar{p} \cdot \bar{q}$;

2° Une *réciproque*, définie par la même opération entre propositions niées. Par exemple, la réciproque de $p \vee q$ est $\bar{p} \vee \bar{q}$ (= p/q). Dans le cas de l'implication ($p \supset q$), la réciproque équivaut à l'implication entre propositions permutées: $\bar{p} \supset \bar{q} = q \supset p$.

3° Une *corrélative*, définie par la substitution réciproque des ($\vee$) er des (.) au sein de l'expression normale de la liaison considérée, mais sans changements de signe. Par exemple la corrélative de $p \vee q$ est $p \cdot q$; celle de $p \supset q$ est $\bar{p} \cdot q$, etc. On constate alors que la corrélative est la réciproque de l'inverse.

L'inversion, la réciprocité et la corrélativité constituent donc trois transformations qui, jointes à la transformation nulle (ou identique), forment un groupe commutatif. Pour le montrer, nous mettrons d'abord une liaison quelconque entre deux propositions p et q, et leurs contraires $\bar{p}$ et $\bar{q}$, sous la forme d'un fonction $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) = 1$ ou plus simplement $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$. A toute liaison α on peut en faire correspondre d'autres au moyen d'opérateurs de transformation. On peut ainsi passer:

de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à sa réciproque $\alpha(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$,
de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à son inverse $\bar{\alpha}(p, q, \bar{p}, \bar{q})$,
de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à sa corrélative $\bar{\alpha}(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$.

Nous désignerons respectivement la réciproque, l'inverse et la corrélative de α par les symboles:

$$R\alpha \; ; \quad N\alpha \; ; \quad C\alpha$$

Avant d'étudier les lois de combinaison de ces opérateurs, on peut d'abord remarquer qu'ils sont tous involutifs. Ils vérifient donc les relations:

$$R^2 = 1 \; ; \quad N^2 = 1 \; ; \quad C^2 = 1$$

où 1 représente maintenant la transformation identique.

Les produits deux à deux des opérations R, N, C s'obtiennent immédiatement et sont les suivants:

la réciproque de l'inverse (RN) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \bar{\alpha}(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$$

(de même pour l'inverse de la réciproque: NR);

la réciproque de la corrélative (RC) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \bar{\alpha}(p, q, \bar{p}, \bar{q})$$

(de même pour la corrélative de la réciproque: CR);

l'inverse de la corrélative (NC) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \alpha(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$$

(de même pour la corrélative de l'inverse: CN).

On voit que tous ces produits sont commutables et tiennent à la symétrie logique de α.

L'ensemble de ces transformations, y compris l'opération identique 1 constitue donc bien un groupe commutatif où

$$N = RC (= CR) \ ; \quad R = NC (= CN) \ ; \quad C = NR (= RN) \qquad (1)$$

$$1 = RCN \, (\text{donc} = NRC = CRN = \text{etc.}) \qquad (2)$$

Un tel groupe comporte la table de multiplication suivante:

1	R	N	C
R	1	C	N
N	C	1	R
C	N	R	1

Nous devons à l'obligeance de notre collègue Ammann de nous avoir montré que ce système est isomorphe au groupe dit « Vierergruppe » (groupe des quatre transformations).

Exemple. — Si nous partons de $\alpha = (p \vee q)$, nous avons $N\alpha = \bar{p} \cdot \bar{q}$; $R\alpha = p/q$ et $C\alpha = p \, . \, q$. Or l'inverse de p/q est $p \, . \, r$ et sa corrélative $\bar{p} \, . \, \bar{q}$. On a donc bien $NR = C$ ou $RN = C$; $RC = N$; etc.

Remarque I. — Dans le cas des liaisons dites équivalence $p{=}q$, exclusion réciproque $(\overline{p = q})$, tautologie $(p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$ et contradiction (0), on a $R\alpha = \alpha$ mais $C\alpha = N\alpha$.

Dans le cas des liaisons dites d'affirmation ou de négation de p ou de q (par exemple $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$), on a $R\alpha = N\alpha$ mais $C\alpha = \alpha$.

Les égalités (1) et (2) sont donc encore vérifiées.

Remarque II. — L'inversion N constitue l'opération inverse des « groupements » additifs de classes que nous avons jadis décrits ici-même, et la réciprocité R constitue l'opération inverse des « groupements » additifs de relations [1]. En ne rete-

[1] *C. R. Soc. Phys. Hist. nat. Genève*, *58*, 102, 107, 121, 125, 149, 154 et 192, 1941.

nant que ces deux sortes d'inversions et leur produit (NR = C) à titre d'opérateurs de transformation, on fait alors abstraction des « identiques spéciales » propres aux « groupements », puisque celles-ci interviennent exclusivement dans les compositions entre éléments emboîtés de mêmes signes. Il en résulte l'unicité de l'opération identique et c'est pourquoi le système des transformations décrit dans la présente note constitue un groupe proprement dit. On constate donc, une fois de plus, que le « groupement » est une structure intermédiaire entre le « groupe » et le « réseau » (ou « lattice ») [1], puisque le « groupement » est un cas particulier du « réseau » (rendu entièrement réversible grâce à certaines limitations) et qu'il englobe lui-même un groupe de transformations si l'on se borne à composer entre eux les opérateurs d'inversion et l'identité.

Séance du 17 mars 1949.

Hermann Gisin. — *Symphyles de la Suisse.*

Les Symphyles constituent le plus petit et le plus primitif des quatre ordres d'Arthropodes qu'on réunit communément sous le nom de Myriapodes. Ils ont la forme de minuscules Scolopendres de 2 à 6 mm, portant douze paires de pattes et deux appendices fusiformes caudaux, qui sont des filières capables de rejeter des fils de soie défensifs. Blancs, aveugles, mais très agiles, ces animaux se tiennent dans les anfractuosités du sol; on les récolte sous les pierres ou les feuilles mortes ou, automatiquement, par la méthode des entonnoirs du type Berlese-Tullgren.

Pour l'Europe, on n'a décrit que douze espèces bien reconnaissables. Voici comment, au microscope, on peut les déterminer assez facilement.

[1] La logique des propositions bivalentes constitue, comme l'a montré Heyting, un réseau dont la borne supérieure est $(p \vee q)$ et dont la borne inférieure est $(p \, . \, q)$. La relation entre ces deux bornes constitue donc une corrélativité.