Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 2 (1949)

Artikel: Le groupe des transformations de la logique des propositions bivalentes
Autor: Piaget, Jean
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739732

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ment précurseur de l'époque würmienne; aucun reste de l'activité humaine n'a été découvert jusqu'à présent dans cette couche profonde. Après le retrait glaciaire würmien, l'activité de la grotte reprend. Les sédiments superposés à la terre à ours se sont déposés de l'extrême fin du Pléistocène aux temps actuels.

Mon travail a été grandement facilité par l'aide de MM. M. Blanchet, E. Dottrens, Ch. Jeannet, E. Renaud, qu'ils en soient remerciés.

Jean Piaget. — *Le groupe des transformations de la logique des propositions bivalentes.*

On sait que, au moyen de deux propositions quelconques, p ou q, il est possible de construire seize liaisons distinctes, telles que l'implication $p \supset q = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; la disjonction $p \vee q = (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$; la conjonction $p \cdot q$; l'incompatibilité $p/q = (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; la négation conjointe $\bar{p} \cdot \bar{q}$; etc. Chacune de ces liaisons comporte alors:

1° Une *inverse*, définie par sa négation (= sa complémentaire par rapport à $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot q$). Par exemple l'inverse de $p \vee q$ est $(\overline{p \vee q}) = \bar{p} \cdot \bar{q}$;

2° Une *réciproque*, définie par la même opération entre propositions niées. Par exemple, la réciproque de $p \vee q$ est $\bar{p} \vee \bar{q}$ $(= p/q)$. Dans le cas de l'implication $(p \supset q)$, la réciproque équivaut à l'implication entre propositions permutées: $\bar{p} \supset \bar{q} = q \supset p$.

3° Une *corrélative*, définie par la substitution réciproque des $(\vee)$ er des $(.)$ au sein de l'expression normale de la liaison considérée, mais sans changements de signe. Par exemple la corrélative de $p \vee q$ est $p \cdot q$; celle de $p \supset q$ est $\bar{p} \cdot q$, etc. On constate alors que la corrélative est la réciproque de l'inverse.

L'inversion, la réciprocité et la corrélativité constituent donc trois transformations qui, jointes à la transformation nulle

(ou identique), forment un groupe commutatif. Pour le montrer, nous mettrons d'abord une liaison quelconque entre deux propositions p et q, et leurs contraires $\bar{p}$ et $\bar{q}$, sous la forme d'un fonction $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) = 1$ ou plus simplement $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$. A toute liaison α on peut en faire correspondre d'autres au moyen d'opérateurs de transformation. On peut ainsi passer:

de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à sa réciproque $\alpha(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$,
de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à son inverse $\bar{\alpha}(p, q, \bar{p}, \bar{q})$,
de $\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ à sa corrélative $\bar{\alpha}(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$.

Nous désignerons respectivement la réciproque, l'inverse et la corrélative de α par les symboles:

$$R\alpha \; ; \qquad N\alpha \; ; \qquad C\alpha$$

Avant d'étudier les lois de combinaison de ces opérateurs, on peut d'abord remarquer qu'ils sont tous involutifs. Ils vérifient donc les relations:

$$R^2 = 1 \; ; \qquad N^2 = 1 \; ; \qquad C^2 = 1$$

où 1 représente maintenant la transformation identique.

Les produits deux à deux des opérations R, N, C s'obtiennent immédiatement et sont les suivants:

la réciproque de l'inverse (RN) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \bar{\alpha}(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$$

(de même pour l'inverse de la réciproque: NR);

la réciproque de la corrélative (RC) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \bar{\alpha}(p, q, \bar{p}, \bar{q})$$

(de même pour la corrélative de la réciproque: CR);

l'inverse de la corrélative (NC) est l'opération

$$\alpha(p, q, \bar{p}, \bar{q}) \rightarrow \alpha(\bar{p}, \bar{q}, p, q)$$

(de même pour la corrélative de l'inverse: CN).

On voit que tous ces produits sont commutables et tiennent à la symétrie logique de α.

L'ensemble de ces transformations, y compris l'opération identique 1 constitue donc bien un groupe commutatif où

$$N = RC (= CR) \; ; \; R = NC (= CN) \; ; \; C = NR (= RN) \qquad (1)$$

$$1 = RCN \, (\text{donc} = NRC = CRN = \text{etc.}) \qquad (2)$$

Un tel groupe comporte la table de multiplication suivante:

1	R	N	C
R	1	C	N
N	C	1	R
C	N	R	1

Nous devons à l'obligeance de notre collègue Ammann de nous avoir montré que ce système est isomorphe au groupe dit « Vierergruppe » (groupe des quatre transformations).

Exemple. — Si nous partons de $\alpha = (p \vee q)$, nous avons $N\alpha = \bar{p} \cdot \bar{q}$; $R\alpha = p/q$ et $C\alpha = p \cdot q$. Or l'inverse de p/q est $p \cdot r$ et sa corrélative $\bar{p} \cdot \bar{q}$. On a donc bien $NR = C$ ou $RN = C$; $RC = N$; etc.

Remarque I. — Dans le cas des liaisons dites équivalence $p = q$, exclusion réciproque $(\overline{p = q})$, tautologie $(p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$ et contradiction (0), on a $R\alpha = \alpha$ mais $C\alpha = N\alpha$.

Dans le cas des liaisons dites d'affirmation ou de négation de p ou de q (par exemple $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$), on a $R\alpha = N\alpha$ mais $C\alpha = \alpha$.

Les égalités (1) et (2) sont donc encore vérifiées.

Remarque II. — L'inversion N constitue l'opération inverse des « groupements » additifs de classes que nous avons jadis décrits ici-même, et la réciprocité R constitue l'opération inverse des « groupements » additifs de relations [1]. En ne rete-

[1] *C. R. Soc. Phys. Hist. nat. Genève*, *58*, 102, 107, 121, 125, 149, 154 et 192, 1941.

nant que ces deux sortes d'inversions et leur produit (NR = C) à titre d'opérateurs de transformation, on fait alors abstraction des « identiques spéciales » propres aux « groupements », puisque celles-ci interviennent exclusivement dans les compositions entre éléments emboîtés de mêmes signes. Il en résulte l'unicité de l'opération identique et c'est pourquoi le système des transformations décrit dans la présente note constitue un groupe proprement dit. On constate donc, une fois de plus, que le « groupement » est une structure intermédiaire entre le « groupe » et le « réseau » (ou « lattice ») [1], puisque le « groupement » est un cas particulier du « réseau » (rendu entièrement réversible grâce à certaines limitations) et qu'il englobe lui-même un groupe de transformations si l'on se borne à composer entre eux les opérateurs d'inversion et l'identité.

Séance du 17 mars 1949.

Hermann Gisin. — *Symphyles de la Suisse.*

Les Symphyles constituent le plus petit et le plus primitif des quatre ordres d'Arthropodes qu'on réunit communément sous le nom de Myriapodes. Ils ont la forme de minuscules Scolopendres de 2 à 6 mm, portant douze paires de pattes et deux appendices fusiformes caudaux, qui sont des filières capables de rejeter des fils de soie défensifs. Blancs, aveugles, mais très agiles, ces animaux se tiennent dans les anfractuosités du sol; on les récolte sous les pierres ou les feuilles mortes ou, automatiquement, par la méthode des entonnoirs du type Berlese-Tullgren.

Pour l'Europe, on n'a décrit que douze espèces bien reconnaissables. Voici comment, au microscope, on peut les déterminer assez facilement.

[1] La logique des propositions bivalentes constitue, comme l'a montré Heyting, un réseau dont la borne supérieure est $(p \vee q)$ et dont la borne inférieure est $(p \,.\, q)$. La relation entre ces deux bornes constitue donc une corrélativité.