

Granulométrie réelle et granulométrie apparente

Autor(en): **Vuagnat, Marc**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **2 (1949)**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739763>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

GRANULOMÉTRIE RÉELLE

ET

GRANULOMÉTRIE APPARENTE

PAR

Marc VUAGNAT

(Avec 9 fig.)

1. INTRODUCTION.

Au cours des vingt dernières années la granulométrie des roches détritiques s'est considérablement développée. A quelques exceptions près cependant, ces progrès ne concernent que les roches meubles: des raisons techniques permettent d'expliquer cet état de choses. En effet, dans le cas de roches meubles, on dispose de divers moyens (pied à coulisse, tamis, appareils de lévigation, etc.) pour mesurer rapidement la taille réelle d'un grand nombre d'éléments; dans le cas de roches consolidées, par contre, l'étude n'est généralement possible que par l'intermédiaire de *plaques minces* ou de *sections polies*, condition impliquant un double désavantage: mesures plus longues et surtout connaissance directe d'une granulométrie non plus réelle, mais seulement *apparente* puisque chaque grain est connu par une section. Ainsi se pose le problème des relations existant entre la granulométrie apparente et la granulométrie réelle et du passage de la première à la seconde.

Cette question n'est qu'un aspect d'un problème beaucoup plus général qui se présente toutes les fois que nous faisons passer un plan dans un ensemble d'éléments distribués dans l'espace et que nous désirons trouver la distribution de la taille

des éléments telle qu'elle est dans l'espace, en partant de la distribution de la taille des sections de ces éléments telle qu'elle apparaît dans ce plan. Cette situation est commune à toutes les sciences qui doivent étudier certaines structures en plaques minces, en sections polies ou en projection et on en connaît des exemples en pétrographie, en métallurgie, en biologie et même en astronomie.

Au cours des quelques pages qui vont suivre nous désirons d'abord faire le point en ce qui concerne l'état de nos connaissances sur ce problème qui n'a encore été l'objet d'aucune publication en langue française, puis suggérer deux artifices destinés à rendre plus commode l'application de ces connaissances.

2. HISTORIQUE.

Nous n'avons pas l'intention de faire l'historique des recherches granulométriques, ni même de rappeler les quelques publications traitant de la granulométrie étudiée en plaques minces; nous mentionnerons seulement les travaux sur les relations entre la granulométrie apparente et la granulométrie réelle. Notre tâche sera rapide, car ces travaux sont très peu nombreux.

En 1924 T. H. Hagerman et F. Odqvist [3] traitent la question en partant du problème pétrographique et posent déjà les fondements de la méthode mathématique qui sera développée ultérieurement; leur article malheureusement écrit en suédois est inaccessible à beaucoup de lecteurs et de fait il semble être tombé dans l'oubli.

En 1924 aussi, S. D. Wicksell s'attaque à la même question [6]. En 1925, il développe son premier article dans *Biometrika* [7] et propose diverses solutions pratiques qu'il tente d'adapter à un problème spécial: la détermination de la distribution dans la rate de la taille des follicules secondaires en partant d'observations en plaques minces. Dans un troisième article [8] il étend sa méthode au cas de corpuscules non plus sphériques mais ellipsoïdaux, cas déjà abordé par Hagermann.

En 1935 W. C. Krumbein [3], spécialiste de la pétrographie des roches sédimentaires, tente de résoudre le même problème en se fondant sur l'expérience et sur la théorie, mais en ignorant les travaux de ses prédécesseurs. Il redécouvre la méthode statistique à employer, sa solution est toutefois incomplète du fait qu'il ne tient pas compte d'un facteur de probabilité dû aux différences de taille des grains (v. plus bas p. 425).

Dans un manuel récent consacré aux techniques de la pétrographie sédimentaire [5] W. C. Krumbein, reproduit l'essentiel de son premier article en le complétant grâce aux travaux de Wicksell, qu'il mentionne dans sa liste bibliographique.

Etant donné la généralité du sujet, il est fort possible que certaines publications nous aient échappé; nous nous excusons d'avance auprès des auteurs éventuels de toute omission involontaire.

3. CAS DES ÉLÉMENTS DE MÊME TAILLE.

Notre but n'est pas de reprendre le traitement mathématique du problème que l'on trouvera exposé en toute rigueur dans Wicksell [7], mais de le résumer en le mettant à la portée de géologues en possession d'un minimum de connaissances mathématiques.

Un examen rapide du problème permet déjà de faire quelques observations d'ordre général. Il est évident que si l'on coupe une sphère par un plan quelconque on obtient une section circulaire dont le diamètre pourra varier entre 0 et le diamètre du grand cercle de la sphère. Il est ensuite très net qu'il est impossible de savoir si telle section observée en plaque mince est précisément la plus grande section d'un grain et nous donne son diamètre réel (cf. fig. 4 *a*), ou s'il s'agit d'une section quelconque d'un grain plus gros dont nous n'observons qu'un « diamètre » apparent (cf. fig. 4 *b*). Le problème n'a donc pas de solution dans le domaine individuel; c'est seulement dans le domaine statistique que l'on peut espérer en trouver une. Enfin on ne peut rechercher cette solution sans simplifier auparavant les données naturelles; nous admettrons notamment que les grains

sont suffisamment isométriques pour qu'on puisse les assimiler à des sphères et qu'ils sont distribués dans l'espace au hasard.

Dans une première étape nous poserons encore une troisième condition, à savoir que tous les grains sphériques possèdent la même taille exprimée par leur diamètre d . De ce fait un plan coupant cet ensemble de sphères au hasard montrera des sections circulaires dont le diamètre s'échelonnera entre 0 et d .

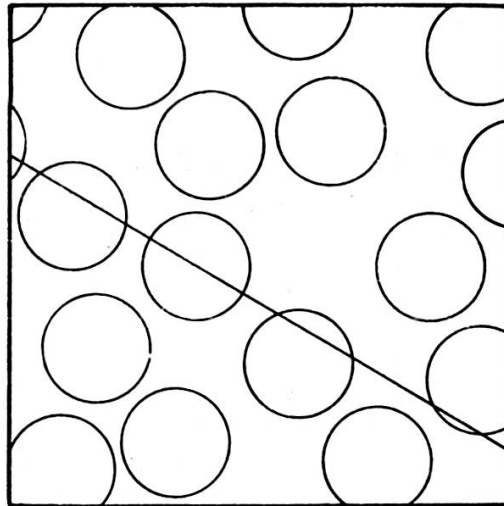


Fig. 1.

Ensemble de cercles de même diamètre coupé par une droite quelconque.

Etant donné la symétrie des éléments nous pouvons, sans changer en quoi que ce soit sa nature, transposer ce problème de l'espace dans le plan, c'est-à-dire étudier la distribution de la longueur des cordes interceptées par une droite coupant un ensemble de cercles (fig. 1); nous pouvons donc raisonner sur ce cas plus simple et même, de nouveau pour des raisons de symétrie, ne considérer qu'un quadrant du cercle. En nous référant à la figure 2 nous faisons les constatations suivantes: si nous supposons la droite sécante parallèle au rayon OQ, elle a une égale probabilité de couper le cercle en n'importe quel point du rayon OP, c'est dire que cette probabilité est constante et proportionnelle à la longueur du segment Δy considéré. Envisageons maintenant une différence Δx entre deux demi-cordes voisines, nous voyons que si la droite passe près du

centre cette différence correspond à un Δy assez grand, tandis que si la droite passe loin du centre à un même Δx correspond un Δy relativement petit : cela signifie qu'on observera beaucoup de cordes dont la longueur se rapprochera du diamètre et au contraire peu de cordes de petite longueur ; dans le problème granulométrique (sphères distribuées dans l'espace) la *fréquence*

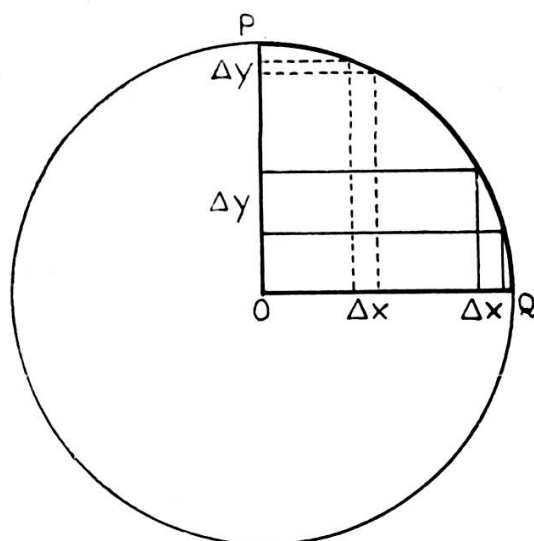


Fig. 2.

Cercle coupé par une droite. Axe des x = rayon OQ ;
 axe des y = rayon OP. Longueur du rayon = r ,

des « diamètres » apparents *croîtra* lorsqu'ils se rapprocheront du diamètre de la sphère.

La théorie permet d'exprimer cette loi quantitativement, on démontre en effet [5] que la probabilité élémentaire $f(x) dx$ pour qu'une demi-corde tombe dans l'intervalle infinitésimal de longueur $x - \frac{1}{2} dx$, $x + \frac{1}{2} dx$ est donnée par la relation suivante :

$$f(x) dx = \frac{dx}{r \sqrt{r^2 - x^2}} \quad (A)$$

Cette expression reste naturellement inchangée si on remplace la demi-corde par la corde et le rayon r par le diamètre $d = 2r$.

La courbe (fig. 3) représentant $f(x)$ (densité de fréquence relative) se rapproche asymptotiquement de la droite parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse $x = r$ ou $x = d$; cependant l'aire sous la courbe reste finie et doit être égale à l'unité, puisqu'elle mesure la probabilité totale.

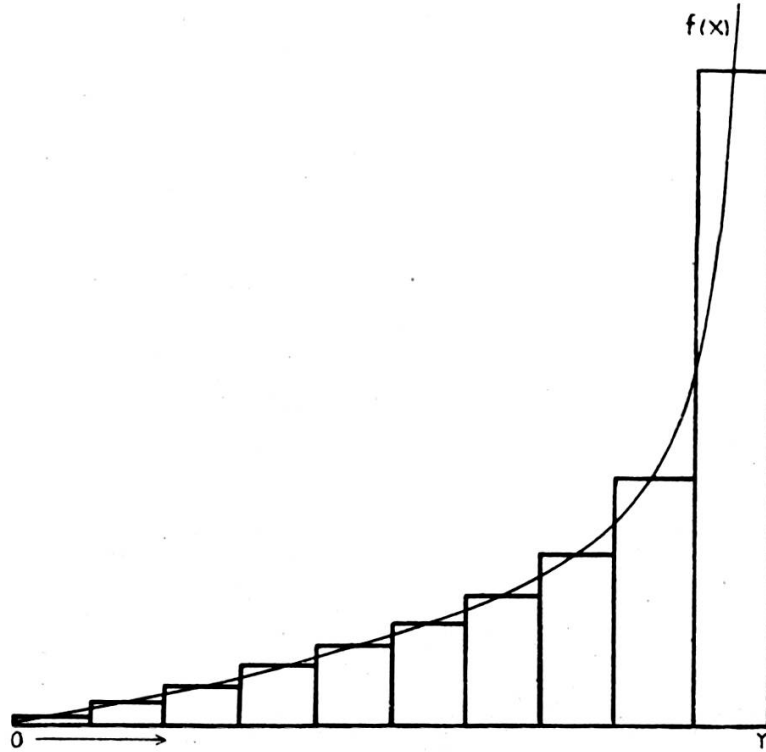


Fig. 3.

Courbe et histogramme correspondant à la fonction $f(x)$ de l'équation (A). En abscisse: rayon apparent; en ordonnée: fréquence relative (unités arbitraires).

Nous pouvons remplacer cette courbe par un histogramme équivalent (fig. 3). Rappelons que cette représentation histogramme, utilisée en granulométrie, consiste à substituer le discontinu au continu en répartissant les valeurs en un certain nombre de classes de taille différente et en représentant chaque classe par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à sa fréquence.

4. CAS GÉNÉRAL.

Dans la réalité les sédiments sont rarement parfaitement calibrés aussi devons-nous envisager comme cas général celui

d'un ensemble de sphères dont la taille peut varier d'une manière continue ¹ entre deux limites, par exemple entre 0 et D . La distribution de ces tailles s'exprime alors par une fonction généralement empirique $F(d)$, qu'il s'agit justement de rechercher et qui est représentable par une courbe ou par un histogramme.

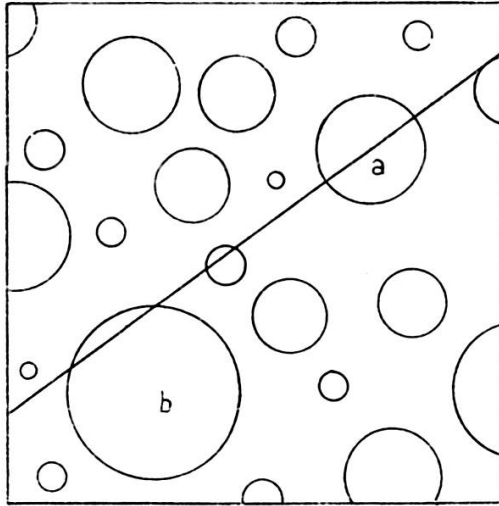


Fig. 4.

Ensemble de cercles de tailles différentes coupé par une droite quelconque.

Un plan coupant un ensemble de sphères inégales (cas tout à fait semblable à celui d'une droite coupant un ensemble de cercles inégaux) donnera des sections circulaires. La distribution totale de la taille de ces sections sera la somme d'un grand nombre de distributions partielles du type (A), une pour chaque taille réelle différente. Une section de diamètre apparent x pourra provenir de toute sphère dont le diamètre réel est compris entre $d = x$ et D ; il est évident qu'ici également le problème n'est susceptible que d'une solution statistique. Deux facteurs tendront à réduire la fréquence des petites sections:

¹ Est-il nécessaire de remarquer qu'une distribution d'éléments réels comme celle qui nous intéresse ne peut être vraiment continue puisque le nombre de ces éléments reste fini, mais elle tend vers une distribution continue lorsque le nombre des éléments croît indéfiniment.

le facteur mentionné au paragraphe précédent (faible probabilité de couper une sphère selon une section beaucoup plus petite qu'un grand cercle) et le fait que le plan sécant aura d'autant moins de chances de rencontrer une sphère que sa taille sera moins grande (un plan à deux fois plus de chance de passer à côté d'une sphère de diamètre d que d'une sphère de diamètre double $2d$).

Une analyse mathématique assez simple permet d'exprimer rigoureusement ces diverses observations au moyen de l'expression (7 p. 87):

$$\varphi(x) dx = \frac{x}{d^0} \int_x^D F(d) \frac{d d}{\sqrt{d^2 - x^2}} dx \quad (B)$$

Dans cette expression x désigne le diamètre apparent des sections, $\varphi(x) dx$ la probabilité élémentaire pour que le diamètre d'une section tombe dans l'intervalle $x + \frac{1}{2} dx$, $x - \frac{1}{2} dx$; le coefficient $\frac{x}{d^0}$ exprime le rôle joué dans l'expression de la probabilité par la taille réelle des grains, d^0 représente la moyenne arithmétique des tailles réelles, $F(d)$ est la distribution de ces tailles, $\frac{d d}{\sqrt{d^2 - x^2}}$ le facteur dont nous avons parlé au paragraphe 3; enfin l'intégrale définie portant sur d et à prendre entre les limites x et D (diamètre de la plus grande sphère de l'ensemble) signifie qu'une section de diamètre x peut provenir de n'importe quelle sphère dont le diamètre est égal ou supérieur à x .

Dans cette expression, $\varphi(x)$ est connu par les mesures en plaques minces; on peut facilement trouver d^0 et D ; la véritable inconnue est donc la fonction $F(d)$ (densité de fréquence relative de la distribution réelle), comme cette valeur est sous le signe de l'intégrale, le problème consiste à résoudre une *équation intégrale* [1].

5. SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION (B).

On aurait pu éprouver quelques difficultés à résoudre cette équation. Fort heureusement l'astronome H. von Zeipel en

avait déjà proposé une solution en 1906 [9]. L'astronome désirant connaître la variation radiale de la densité d'étoiles d'un amas stellaire globulaire se trouve en effet dans une situation analogue à celle du pétrographe désirant connaître la granulométrie réelle en partant d'observations en plaques minces. Sur son cliché, il n'observe pas directement l'amas mais bien une projection de ce dernier sur un plan normal à l'axe de la lunette; il ne connaîtra donc pas les distances réelles des étoiles au centre de l'amas, mais des projections de ces distances, c'est-à-dire des valeurs apparentes jouant le rôle des rayons $\frac{1}{2}x$ des sections de nos grains.

Prenant comme point de départ l'amas globulaire Messier 3, H. von Zeipel arrive à l'expression suivante, qui, à part quelques détails, est analogue à l'équation (B):

$$\psi(x) dx = 2 \int_x^R \chi(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (C)$$

où x est la distance apparente entre une étoile et le centre de l'amas, r la distance réelle et R le rayon de l'amas.

Appliquant alors à l'équation (B) la solution proposée par H. v. Zeipel pour l'équation (C), Wicksell trouve:

$$\begin{aligned} F(d) &= -\frac{2dd^0}{\pi} \int_d^D \frac{d\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - d^2}} = \\ &= \frac{2dd^0}{\pi} \int_0^{\sqrt{D^2 - d^2}} P(\sqrt{P^2 + d^2}) dl \quad (D) \end{aligned}$$

ou

$$P(x) = -\frac{1}{x} \frac{d\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)}{dx}$$

Cette solution permet, par des calculs il est vrai assez longs, de trouver $F(d)$, même quand nous ne possédons pour $\varphi(x)$ qu'une série de valeurs données par l'expérience; nous renvoyons

à Wiksell pour tout ce qui concerne la technique exacte à suivre [7].

Il est intéressant de remarquer ici que si la distribution réelle est donnée par une fonction du type :

$$F(d) = \frac{d}{\sigma^2} e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{E})$$

où σ^2 est la variance, la distribution apparente prend alors la même forme :

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{E}')$$

La réciproque de cette proposition est également vraie. On notera que ce type de distribution n'est pas normal (courbe en cloche) mais qu'il s'en rapproche; en effet l'équation de la distribution normale est :

$$f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{F})$$

6. SOLUTION PAR LA MÉTHODE DES MOMENTS.

Cette solution proposée par Wiksell et reprise par Krumbein est élégante et rapide, mais demande un certain entraînement aux calculs statistiques. Rappelons que l'on peut caractériser une distribution par certains paramètres, les *moments*, définis ainsi: le moment d'ordre n rapporté à l'origine d'une distribution $\varphi(x)$ de N éléments est la somme des N produits $x^n \varphi(x)$; si la distribution est continue la somme est remplacée par une intégrale définie. Par exemple le moment d'ordre 1 par rapport à l'origine est la moyenne arithmétique de la distribution, le moment d'ordre 2 par rapport à cette moyenne est la variance, les moments d'ordre supérieur permettent de calculer d'autres coefficients. Il est non seulement maintes fois suffisant de connaître seulement certains moments d'une distribution, mais K. Pearson a encore démontré qu'il était généralement possible de construire une courbe de fréquence à partir d'un nombre de moments relativement petit.

Les moments réels (c'est-à-dire ceux de la distribution réelle) sont donnés dans le problème qui nous occupe par des relations de la forme:

$$M_n = \int_0^D d^n F(d) \mathbf{d} d \quad (\text{G})$$

ou n est l'ordre du moment, et les moments apparents (c'est-à-dire ceux de la distribution des sections) par des relations analogues:

$$\mu_n = \int_0^D x^n \varphi(x) \mathbf{d} x \quad (\text{G}')$$

Wicksell a démontré qu'il était possible de déduire les moments réels de la valeur des moments apparents au moyen des équations suivantes:

$$M_2 = \frac{4}{\pi} M_1 \mu_1, \quad M_3 = \frac{3}{2} M_1 \mu_2, \quad M_4 = \frac{16}{3\pi} M_1 \mu_3, \\ M_5 = \frac{15}{8} M_1 \mu_4, \quad M_6 = \frac{32}{5\pi} M_1 \mu_5, \quad \text{etc.} \quad (\text{H})$$

Reste à déterminer la valeur de M_1 , moyenne arithmétique de la distribution réelle, que l'on trouve dans toutes ces expressions. A cet effet on peut se servir de la proposition suivante (démontrable au moyen des relations (B) et (D)): La moyenne arithmétique des diamètres réels est égale à la *moyenne harmonique* des diamètres apparents multipliée par $\pi/2$. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que pour obtenir la moyenne harmonique d'une distribution, il suffit de prendre les inverses de toutes les valeurs (ici les tailles), d'en faire la moyenne arithmétique et de prendre l'inverse de ce résultat.

7. RECHERCHE DE LA GRANULOMÉTRIE APPARENTE.

Les recherches granulométriques en plaques minces comprennent obligatoirement deux stades. D'une part la mesure des diamètres apparents et la recherche de la distribution

apparente, d'autre part la restitution de la granulométrie réelle à partir de la distribution apparente, en se fondant sur les principes théoriques que nous venons d'énoncer. Voyons maintenant quelles sont les techniques simples et relativement rapides permettant de franchir ces deux stades.

Les méthodes employées pour établir la granulométrie apparente en plaques minces sont assez mal commodes. Contrairement à ce qui se passe en granulométrie classique (technique du tamis par exemple) il faut en général mesurer *individuellement* chaque élément; il en résulte une grosse perte de temps et des risques d'erreurs par omission ou répétition; en outre les sections n'étant généralement pas circulaires, il faut souvent effectuer certaines corrections sur chaque valeur.

Le moyen le plus naturel consiste à amener chaque grain au centre du champ microscopique et à mesurer au moyen d'un micromètre oculaire son diamètre ou, dans le cas de sections non circulaires, ses diamètres maximum et minimum dont on prendra la moyenne. On peut aussi reproduire au préalable l'image microscopique à une échelle beaucoup plus grande en se servant soit d'un dessin à la chambre claire, soit d'un dessin fait sur écran où on projette la plaque mince. Si les sections sont quelconques, il pourra être nécessaire, au lieu de mesurer leur diamètre, de les transformer en des cercles de surface équivalente, dont la valeur s'obtient au moyen d'un planimètre ou en découpant et en pesant chaque section; lorsqu'on emploie ce dernier procédé il faut évidemment prendre soin de dessiner sur un papier bien homogène de manière à ce que le poids soit proportionnel à l'aire.

Le temps demandé par ces opérations nous a conduit à suggérer l'emploi de l'artifice suivant. Soit un dessin d'une plaque mince contenant des éléments dont il faut étudier la granulométrie. Traçons une série de droites qui coupent au hasard les sections apparentes suivant des *cordes* dont la longueur diffère plus ou moins de leur diamètre; établissons alors la distribution de ces cordes en déterminant leur fréquence en fonctions de leur longueur. Nous avons vu aux titres 3 et 4 que pour passer de cette distribution à celle du diamètre des sections (taille apparente des grains) on peut appliquer les

mêmes transformations que lors de la restitution de la distribution réelle à partir de la distribution apparente. En appliquant ce procédé nous aurons donc affaire à trois distributions: une distribution réelle dans l'espace dont les éléments sont les grains, une première distribution apparente, dans le plan, dont les éléments sont les diamètres des sections des grains, une seconde distribution apparente, selon des lignes, dont les éléments sont les cordes des sections.

Cette méthode présente des avantages pratiques qui sont loin d'être négligeables:

a) Suppression du risque de répétition ou d'omission, la plaque mince étant méthodiquement explorée.

b) Gain de temps du fait de cette systématisation.

c) Possibilité de ne pas dessiner l'image microscopique mais d'opérer directement sur la plaque mince au moyen d'un appareil approprié.

A propos de ce dernier avantage, nous pensons qu'on pourrait se servir avec profit d'une platine d'intégration planimétrique. Remarquons cependant que si dans le cas d'une planimétrie il suffit de connaître la *somme* de toutes les cordes appartenant à une même espèce de minéral, il faudrait, dans ces opérations granulométriques, mesurer *séparément* la longueur de chaque corde. Il nous semble qu'il serait toutefois facile de transformer une platine automatique du type du « Hurlbut counter » ou de la « Sigma » de Fuess en un appareil qui enregistrerait automatiquement les cordes et les sommerait en un petit nombre de classes de tailles différentes, permettant d'établir ainsi directement l'histogramme de la distribution.

Le principal désavantage de cette distribution réside dans le fait qu'il faut appliquer deux fois au lieu d'une les transformations que nous avons étudiées, nécessité impliquant un certain supplément d'imprécision, de risque d'erreur et de travail. Il serait en outre intéressant de voir s'il n'y aurait pas lieu de modifier légèrement la théorie du fait de l'interdépendance existant entre les N traversées effectuées au moyen du dispositif planimétrique, puisqu'elles représentent des droites parallèles et généralement équidistantes. Nous pensons toutefois que cette

technique est plus commode que les autres et même que son caractère statistique permet de diminuer certaines inexactitudes, notamment lorsque les grains ne sont pas sphériques.

8. EMPLOI D'UNE MÉTHODE SEMI-GRAPHIQUE.

En ce qui concerne le passage de la granulométrie apparente à la granulométrie réelle, nous désirons maintenant proposer une méthode approximative semi-graphique, qui pourra peut-être rendre quelques services en attendant que les pétrographes soient plus familiarisés avec les procédés statistiques et emploient la solution par les moments. Nous nous contenterons d'en indiquer d'abord les grandes lignes mais nous la reprendrons en appendice appuyé sur un exemple numérique théorique accompagné de figures, auquel on peut dès maintenant se référer.

Imaginons que la distribution de la taille des grains n'est plus continue comme nous l'avions admis au titre 4, mais est *discontinue* et comprend un petit nombre de tailles différentes comprises entre 0 et D, correspondant par exemple à une dizaine de classes $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{10}$. L'histogramme apparent total (dérivé de la fonction $\varphi(x)$) des diamètres apparents dans un plan sécant sera la somme des 10 histogrammes apparents partiels provenant chacun d'une classe différente et donnés par l'expression (A). La hauteur de chaque histogramme apparent partiel sera proportionnelle à la fréquence de la classe qu'il représente et au rapport d/d^0 (d = taille de la classe; d^0 = diamètre moyen réel de la distribution).

Si nous simplifions les conditions naturelles en admettant par exemple que la distribution réelle d'un sédiment étudié ne comprend que dix tailles différentes, nous pouvons faire le chemin précédent en sens inverse, c'est-à-dire décomposer l'histogramme apparent total en dix histogrammes apparents partiels et la comparaison de ces derniers nous donnera la fréquence relative réelle des dix classes admises. Les calculs pourront se faire au moyen de tables établies une fois pour toutes ou en partie graphiquement.

Cette solution n'est qu'approximative puisque nous remplaçons arbitrairement du continu par du discontinu. Son degré d'exactitude dépendra de la forme de l'histogramme de la distribution réelle et il augmentera proportionnellement au nombre de classes choisies; en outre les erreurs ne se répartiront probablement pas uniformément sur toute la longueur de l'histogramme calculé; l'extrémité correspondant aux grandes classes sera sans doute sujette à des inexactitudes plus considérables. Il semble cependant que le degré d'approximation donné par ce procédé sera suffisant dans un certain nombre de cas et que souvent les erreurs dues à la méthode seront inférieures aux erreurs dont nous allons examiner les causes.

9. CAUSES D'ERREURS.

Comme toute théorie, celle qui nous donne le moyen de transformer la granulométrie apparente en une granulométrie réelle repose sur la simplification de la réalité. Nous avons dû faire abstraction de nombreux détails, supposer des conditions idéales et introduire de la sorte un écart entre le réel et le théorique; écart qui sera la cause de nombreuses erreurs systématiques. Cette schématisation de la réalité est légitime à condition cependant qu'on en ait pleinement conscience; nous voudrions précisément dresser dans ce paragraphe un bilan de ces causes d'erreurs.

a) *Erreurs d'échantillonnage.*

α) Nous ne devons jamais oublier que la plaque mince ou même le spécimen dont elle provient ne sont qu'une infime partie du banc de roche étudié. Est-il légitime d'admettre que leur constitution est une image fidèle de la constitution globale de ce banc ? La théorie statistique de l'échantillonnage permet de répondre à cette question, jusqu'à présent trop souvent négligée par les pétrographes; nous ne nous y attarderons cependant pas.

β) Dans les études en plaques minces on se heurte à un second obstacle analogue. En effet les solutions proposées sont de nature

statistique, c'est dire qu'elles ne sont valables que pour un nombre de grains élevé. Il faudra donc s'efforcer de connaître à partir de quel nombre de sections mesurées une certaine précision, jugée suffisante, sera obtenue avec un degré de probabilité suffisant. Bien qu'il n'existe encore aucune étude sur ce sujet, il est facile de prévoir que la courbe de la distribution réelle calculée sera d'autant plus précise que son ordonnée sera plus grande (puisque une grande ordonnée équivaut à un nombre élevé de grains); dans la représentation histogramme l'exactitude des rectangles croîtra avec leur hauteur.

D'autre part si on emploie la platine d'intégration pour établir la distribution apparente des sections, comme nous l'avons suggéré au titre 7, ce problème d'échantillonnage spécial se présentera à deux reprises: lors du passage de la distribution des cordes interceptées à celle des diamètres des sections, et lors du passage de cette distribution apparente à celle, réelle, du diamètre des grains. Il semble que dans le premier cas nous pourrions augmenter la précision en accroissant le nombre des traversées et dans le second en multipliant celui des plaques minces.

b) *Erreurs provenant des méthodes d'étude.*

Tout en laissant de côté les erreurs expérimentales habituelles (difficulté de lire les divisions de la platine d'intégration, de définir exactement le bord d'un minéral, etc.) nous désirons faire ressortir certains points plus particuliers.

α) Si mince soit-elle, une plaque mince n'est pas dépourvue d'épaisseur, chaque grain sera donc coupé selon deux sections. Dans le cas d'un grain relativement gros ou lorsque la plaque mince passe près du centre d'un grain ces deux sections ont des tailles très voisines l'une de l'autre (fig. 5 a). Il n'en est plus ainsi lorsque le grain est relativement petit ou que la plaque mince passe près de son bord (fig. 5 b), les diamètres des deux sections sont très différents et dans le cas extrême nous observerons même une calotte sphérique souvent en relief si le minéral est plus dur que le ciment (fig. 5 c). Lorsque d'autre part le grain devient très petit les données du problème se

compliquent et la méthode paraît avoir une limite d'efficacité du côté des petites tailles quand le grain possède un diamètre inférieur à l'épaisseur de la plaque mince, et peut être contenu en entier dans cette dernière (fig. 5 *d*).

β) Lorsqu'on comparera des valeurs granulométriques réelles, mais obtenues à partir d'observations en plaques à des valeurs granulométriques déterminées en terrain meuble, il faudra tenir compte de la *méthode* employée dans le second cas (tamis,



Fig. 5.

Vue en coupe d'une plaque mince. En noir: ciment.

lévigation, etc.) et faire attention que les grandeurs mesurées ne sont pas de même espèce dans tous les cas; ainsi il est connu que le tamis classe des grains ellipsoïdaux ni selon leur volume, ni selon leur diamètre maximum, mais selon leur diamètre intermédiaire.

c) *Erreurs ayant leur origine dans la roche elle-même.*

α) *Forme des grains.* La théorie précédente n'est strictement applicable qu'à des grains *sphériques*. Certains (3,8) l'ont étendue au cas de grains ellipsoïdaux, mais au prix de complications importantes. Or dans un sédiment les grains possèdent fréquemment des formes irrégulières et variées. On peut comme nous l'avons noté transformer par des calculs appropriés chaque grain en une sphère de volume équivalent et prendre le rayon de cette sphère comme variable *d*. Dans la pratique il est cependant douteux qu'il vaille la peine d'effectuer ces transformations. Il serait toutefois intéressant d'être orienté sur l'ordre de grandeur des erreurs commises en assimilant des grains quelconques à des sphères.

β) *Disposition des grains.* La théorie exige ensuite que les grains soient, en ce qui concerne leur taille, distribués *au hasard*

dans l'espace; ce qui n'est pas toujours réalisé dans la nature. Il peut y avoir, par exemple, alternance de zones fines et de zones grossières ou même un « graded bedding » à l'échelle microscopique. On peut aussi supposer que les grains tendent à se disposer selon un schéma géométrique excluant le hasard. Un plan coupant un assemblage compact de sphères identiques ne montrera plus un ensemble de sections dont les tailles obéissent à l'équation (A), de même si les plus gros grains d'un ensemble tendent à former un assemblage compact dont les interstices sont occupés par les plus petits, il y a tout lieu de penser que l'équation (B) sera inutilisable. Cette remarque présente un intérêt pratique parce qu'on a observé [2] que, dans certains sédiments, les grains ont effectivement tendance à former des assemblages géométriques, notamment des assemblages compacts.

γ) Orientation des grains. Dans le cas de grains non sphériques, ellipsoïdaux par exemple, la théorie suppose encore que l'*orientation* de ces grains obéit aux lois du hasard. Cette condition n'est pas toujours respectée par la nature. Dans les sédiments déjà il est possible que les grains tendent vers une orientation privilégiée lors de leur dépôt, mais c'est dans les roches métamorphiques que les exceptions deviennent la règle; on sait que les micas, les amphiboles, la tourmaline, en un mot la plupart des minéraux non isométriques s'orientent parallèlement dans les schistes cristallins.

A la suite de ces remarques, il apparaît comme évident que pour affiner la théorie et pour délimiter et augmenter son domaine d'application, il faudra encore une grande somme de recherches tant expérimentales que théoriques réunissant les efforts conjugués des géologues et des statisticiens. Si cet exposé suscite quelques-unes de ces recherches, il aura pleinement atteint son but; mais nous serons déjà satisfait s'il fait comprendre qu'il est imprudent de comparer sans plus une granulométrie apparente obtenue en plaque mince à des granulométries réelles.

BIBLIOGRAPHIE

1. BOCHER, M., *An introduction to the study of integral equations*, Cambridge University Press, 1909.
2. GRATON, L. C. and H. J. FRAZER, « Systematic packing of spheres with particular relation to porosity and permeability », *Journ. of Geol.*, 43, 785, 1935.
3. HAGERMAN, T. H., « En metod för bedömning av kornstorlecken och sorteringsgraden inom finkornige mekaniski sedimentära bergarter », *Geol. Fören. Förhandl.*, 46, 325, 1924.
4. KRUMBEIN, W. C., Thin section mechanical analysis of indurated sediments, *Journ. of Geol.*, 43, 1935.
5. KRUMBEIN, W. C. and F. J. PETTIJOHN, *Manual of sedimentary petrography* Appleton-Century-Crofts Inc., New York, 1938.
6. WICKSELL, S. D., « A study of the properties of globular distributions », *Arch. f. Math., Astron. och Physik*, 18, 1924.
7. — « The corpuscle problem. A mathematical study of a biometric problem », *Biometrika*, 17, 84, 1925.
8. — « The corpuscle problem. Case of ellipsoidal corpuscles », *Biometrika*, 18, 152, 1926.
9. ZEIPPEL, H. von, « Catalogue de l'amas globulaire Messier 3 », *Ann. Observatoire de Paris*, 25, 30, 1906.

APPENDICE

Exemple numérique.

Le but de cet appendice est de montrer par un exemple numérique théorique simple le principe de la solution approximative suggérée au titre 8 et de permettre au lecteur de saisir d'une manière plus concrète, en s'aidant notamment des graphiques, le *sens* de l'ensemble du problème.

Supposons tout d'abord un ensemble de grains sphériques tous de même diamètre, 10 mm. La courbe de la distribution réelle de cet ensemble se réduit à un point et son histogramme à un rectangle (par exemple celui allant de 9 à 10 mm). Un plan sécant donnera un ensemble de sections dont la taille variera entre 0 et 10 mm. La distribution des tailles ($f(x)$) sera donnée par l'équation (A) (cf. fig. 3). Ainsi un sédiment parfaitement calibré donne une granulométrie apparente qui ne l'est plus mais où les tailles *s'étalent* dans un large intervalle.

Supposons maintenant que l'ensemble contienne des grains de dix tailles différentes et correspondant à des diamètres

de 1, 2, 3, ... 10 mm et que la fréquence de chaque classe soit la même. La distribution réelle de cet ensemble sera donnée par 10 points d'abscisse 1, 2, 3, ..., 10 et de même ordonnée; son histogramme sera représenté (fig. 6) par dix rectangles de même hauteur et de même base. Un plan sécant donnera un ensemble de sections dont le diamètre variera de 0 à 10 mm. Pour calculer la distribution de ces tailles, c'est-à-dire la

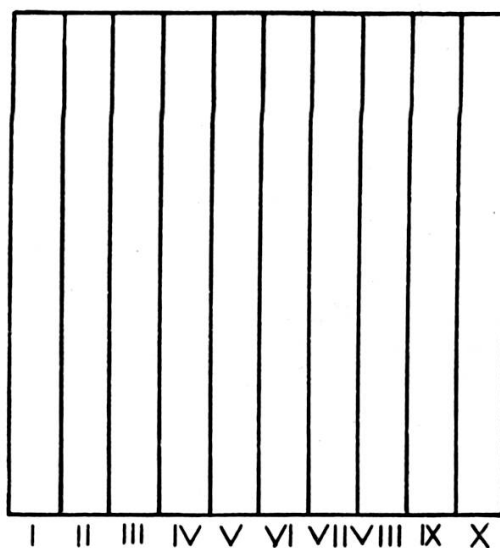


Fig. 6.

Histogramme réel d'une distribution de grains dont le diamètre varie de 0 à 10 mm. Le même histogramme vaut pour une distribution continue comme pour une distribution discontinue.

granulométrie apparente (fonction $\varphi(x)$), nous pouvons, au lieu de faire appel à la formule (B), procéder comme suit.

Chaque classe de taille réelle (désignée pour éviter des confusions par des chiffres romains) donnera un histogramme apparent qu'il est possible de construire en partant de l'équation (A). Ainsi pour la classe X on se servira de la formule :

$$f(x) dx = \frac{dx}{10 \sqrt{100 - x^2}}, \quad (A_{10})$$

on intégrera dix fois cette fonction sur les intervalles 0-1, 1-2, 2-3, ..., 9-10. La valeur de chaque intégrale définie donne directement la hauteur du rectangle correspondant de l'histo-

gramme apparent. On répétera l'opération pour chaque classe en changeant d dans la formule et en intégrant un nombre de fois égal à l'ordre de la classe (9 fois pour la classe IX, etc.). On obtient donc ainsi dix histogrammes apparents partiels (h. a. p.) correspondant aux valeurs du tableau I. Il faut maintenant se rappeler que les classes ne sont pas isolées mais associées en un ensemble dont le diamètre moyen d^0 est 5,5 mm; or les grains de petite tailles (cf. titre 4) ont moins de chances d'être coupés que ceux de grande taille; il faut donc multiplier la hauteur de chaque histogramme par le facteur de probabilité d/d^0 ; après avoir effectué cette opération on obtient les valeurs du tableau II et les dix histogrammes de la figure 8 (I à X). La dernière partie du procédé consiste à additionner les classes de même taille des dix h. a. p. et à construire de la sorte un histogramme apparent total (h. a. t.) composé de dix rectangles (fig. 8/T). Chaque rectangle correspond à une classe comprenant les sections dont les diamètres varient entre 0 et 1 mm pour la classe 1, entre 1 et 2 mm pour la classe 2, ... , entre 9 et 10 mm pour la classe 10. La classe 1 sera la somme de dix classes partielles, la classe 2 de neuf classes partielles, etc.; seule la classe 10 ne sera composée que d'une seule classe partielle. Nous avons tenté de rendre facilement compréhensible cette décomposition des classes de l'h. a. t. en indiquant par des figurés différents les « composantes » des cinq plus grandes classes (fig. 8). Notons que si dans ce cas la granulométrie réelle est discontinue la granulométrie est devenue *continue*.

Nous pouvons enfin partir d'un ensemble de grains sphériques dont le diamètre varie *continûment* entre 0 et 10 mm tout en possédant une distribution constante. La courbe représentant cette dernière sera donnée par la fonction $F(x) = 1/10$; c'est une droite parallèle à l'axe des x . L'histogramme correspondant est identique à celui de la figure 6. Un plan sécant donnera un ensemble de sections dont nous pouvons connaître la distribution grâce à l'expression (B) qui prend la forme:

$$\varphi(x) dx = \frac{1}{5} \int_x^{10} \frac{1}{10} \frac{d d}{\sqrt{100 - x^2}} dx \quad (B')$$

(d^0 vaut ici 5 mm). La courbe représentant cette distribution et l'histogramme correspondant sont donnés par la figure 7. Il est intéressant de noter que l'histogramme réel constant donne un histogramme apparent possédant un *maximum* et légèrement *dissymétrique* par rapport à ce dernier; ce phénomène nous prouve qu'une granulométrie apparente établie en plaques minces peut présenter certaines particularités, à pre-

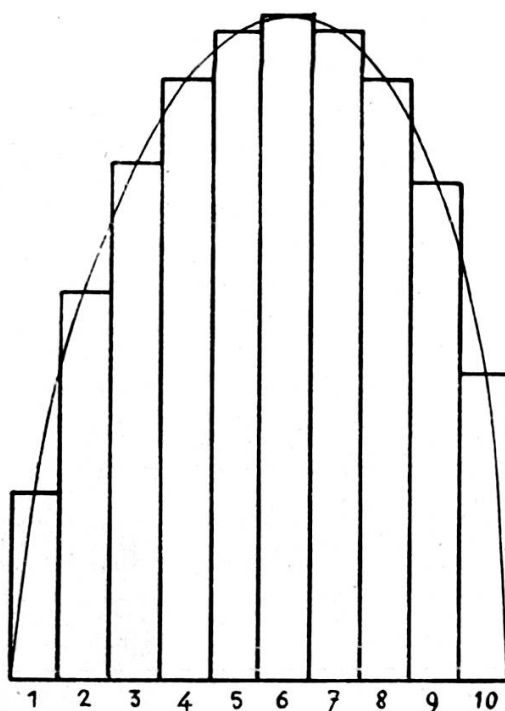


Fig. 7.

Courbe de la distribution apparente et histogramme correspondant dans le cas d'une distribution réelle continue avec diamètres variant de 0 à 10 mm. En abscisse: diamètres apparents; en ordonnée: fréquence des classes.

mière vue importantes, qui ne sont *pas* du tout *caractéristiques* de la granulométrie réelle; la plus grande prudence s'impose donc.

La solution approximative proposée au titre 8 consiste à schématiser la nature en admettant que la distribution réelle est discontinue et que le sédiment étudié ne contient par exemple que dix tailles de grain distinctes. Il est alors facile

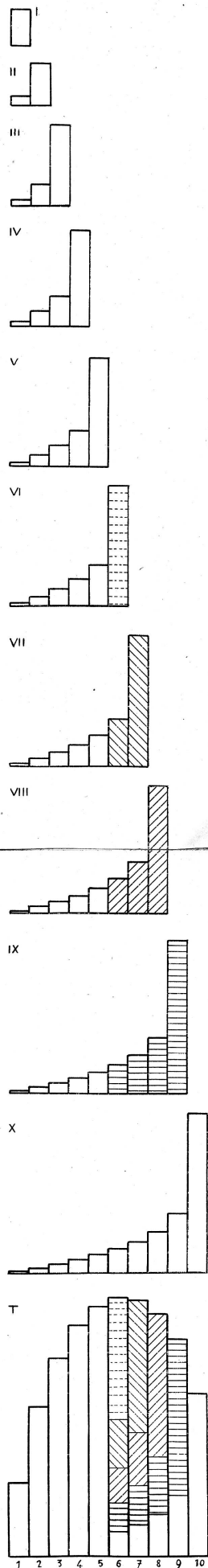


Fig. 8.

Histogrammes I à X: Histogrammes apparents partiels correspondant chacun à une taille réelle de grain.
 Histogramme T: somme des dix histogrammes apparents, c'est-à-dire histogramme apparent total d'une distribution réelle discontinue avec diamètres de 1, 2, 3, ..., 10 mm.
 En abscisse: diamètres apparents; en ordonnée: fréquence des classes.

de refaire *en sens inverse* le chemin que nous venons de faire plus haut et de décomposer l'h. a. t. en dix h. a. p. A cet effet on part de la classe 10 de l'h. a. t.; le rectangle qui la figure est identique à celui de la classe 10 de l'h. a. p. X (fig. 8); connaissant de la sorte la classe maxima de cet h. a. p. on peut le construire en entier en se servant de l'équation (A) (ou de tables établies une fois pour toutes) et le soustraire de l'h. a. t.; nous obtenons un *histogramme apparent résiduel* comprenant

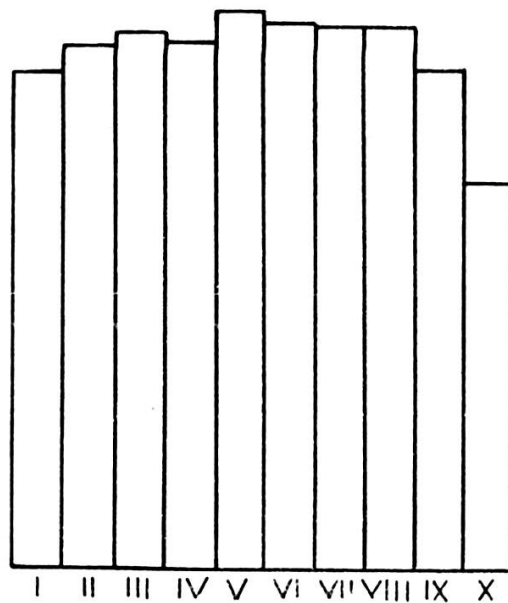


Fig. 9.

Histogramme réel calculé, correspondant à une distribution réelle continue avec diamètres variant de 0 à 10 mm. En abscisse: diamètres réels; en ordonnée: fréquence des classes.

les classes I à IX (h. a. r./I-IX). Le rectangle de classe 9 de cet h. a. r./I-IX est identique (voir fig. 8) à celui de même classe de l'h. a. p. IX que nous pouvons donc à son tour construire, puis soustraire de l'h. a. r./I-IX pour obtenir un deuxième histogramme résiduel: l'h. a. r./I-VIII. Il est clair qu'en répétant le même procédé on obtiendra finalement dix h. a. p. correspondants à ceux de la figure 8/I-X. Dans le cas général le reste de l'opération consisterait à rechercher d^0 par la proposition de la moyenne harmonique (cf. titre 7) ou éventuellement à se contenter en première approximation de d^{10} (moyenne arith-

métique apparente, c'est-à-dire des diamètres des sections); à diviser la hauteur de chaque h. a. p. par le facteur d/d^0 (ou d/d'^0), enfin à comparer entre elles les aires de chaque h. a. p. corrigé de manière à connaître les fréquences réelles des dix classes. Dans l'exemple traité il suffit de comparer la hauteur de la classe maxima de chaque h. a. p. à la hauteur de la plus grande classe de l'h. a. p. correspondant de la figure 8 pour obtenir ces fréquences. On construit ainsi l'histogramme réel restitué de la figure 9.

Etant donné le fait que l'on est sciemment parti de données inexactes en supposant une distribution réelle discontinue, il est normal que l'histogramme réel restitué ne soit pas identique à celui de la figure 6; l'erreur, assez sensible sur les deux plus grandes classes, est inférieure à 10% pour le reste de l'histogramme. Dans certains problèmes cette approximation sera suffisante; il serait d'ailleurs possible de la rendre meilleure en augmentant le nombre des classes ou en corrigeant le premier ou les deux premiers h. a. p. calculés au moyen d'un coefficient approprié. Comme nous l'avons déjà dit nous pensons cependant que la solution la plus élégante et qui a le plus grand avenir est celle faisant appel à la méthode des moments. Le procédé que nous venons de décrire à un intérêt transitoire et surtout didactique.

TABLEAU I.

Fréquences relatives des classes des dix histogrammes apparents.

Tailles apparentes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Classes des tailles réelles	I	1,000									
	II	0,134	0,867								
	III	0,056	0,199	0,745							
	IV	0,032	0,102	0,205	0,662						
	V	0,020	0,063	0,117	0,200	0,600					
	VI	0,013	0,043	0,077	0,122	0,192	0,553				
	VII	0,010	0,031	0,054	0,083	0,120	0,185	0,516			
	VIII	0,008	0,024	0,041	0,061	0,086	0,119	0,178	0,484		
	IX	0,007	0,019	0,031	0,048	0,064	0,086	0,117	0,171	0,459	
	X	0,005	0,015	0,026	0,037	0,051	0,066	0,086	0,114	0,164	0,436

TABLEAU II.

*Fréquence des classes des histogrammes apparents après correction
par le facteur d/d^0 .*

Tailles apparentes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Classes des tailles réelles	I	0,182									
	II	0,049	0,315								
	III	0,031	0,109	0,406							
	IV	0,023	0,074	0,149	0,481						
	V	0,018	0,057	0,106	0,182	0,545					
	VI	0,015	0,047	0,084	0,133	0,209	0,603				
	VII	0,013	0,039	0,069	0,106	0,153	0,236	0,656			
	VIII	0,012	0,035	0,060	0,089	0,125	0,173	0,259	0,705		
	IX	0,011	0,031	0,051	0,079	0,105	0,141	0,192	0,280	0,767	
	X	0,009	0,027	0,047	0,067	0,093	0,120	0,156	0,207	0,298	0,792

*Université de Genève.
Laboratoire de Minéralogie.*