REMARQUE SUR L'EFFET COMPTON ET L'HYPOTHÈSE DU CORPS GRIS EN ASTROPHYSIQUE

PAR

Pierre BOUVIER

Le transfert d'énergie rayonnante, diffusée par des électrons libres, paraît revêtir une certaine importance quant à l'opacité des étoiles de type spectral précoce. S. Chandrasekhar [1] a étudié le transfert d'énergie diffusée dans une atmosphère stellaire d'après la loi de Thomson en $1 + \cos^2 \Theta$; nous avons récemment [2] repris le même problème dans une atmosphère où la courbure n'est pas négligeable, ce qui paraît bien être le cas des étoiles considérées.

Le point de départ est toujours l'équation de transfert, écrite pour une atmosphère à stratification plane sous la forme

$$\cos\theta \frac{d\mathrm{I}}{\rho dx} = -\,\mathrm{K\,I}(x\,,\,\theta') + \frac{\mathrm{K}}{4\,\pi}\int \mathrm{I}(x\,,\,\theta')\,w(\theta'\,,\,\varphi'\,;\,\theta)\,d\Omega \qquad (1)$$

où I (x, θ) est l'intensité globale au point x, et dans la direction formant un angle θ avec l'axe x normal aux plans de stratification; $\varkappa$ est le coefficient (massique) d'absorption, ρ la densité et $w d\Omega' = w\,(\theta', \varphi'; \theta)\; d(\cos\theta')d\varphi'$ est la probabilité pour qu'un photon, arrivant de la direction (θ', φ'), soit diffusé

[1] S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, *100*, 117, 1944.
[2] P. Bouvier, *Arch. des Sc.*, *2*, 87, 1949.

dans la direction $(\theta, 0)$ qui détermine avec l'axe x le plan $\varphi = 0$. Cette probabilité vaut donc ici (effet Thomson):

$$w \, d\Omega' = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \Theta) \, d\Omega' \tag{2}$$

où

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi'$$

Or l'intensité globale $I(x, \theta)$, en tant que superposition d'intensités monochromatiques I_ν:

$$I = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu$$

comporte avant tout des intensités du spectre visible ou infrarouge. Si on tient compte des I_ν relatifs à des fréquences plus élevées, l'expression (2) devra céder le pas, pour ces fréquences-là, à la formule de Klein et Nishina pour l'effet Compton. La modification qui en résulte est certainement superflue pour le rayonnement émis de la surface d'une étoile, lequel a son maximum d'intensité dans une région spectrale où l'effet Compton ne corrige l'effet Thomson que dans le rapport de 1 à $1 + 10^{-5}$. Mais il peut être intéressant, au moins théoriquement de reprendre le problème avec cette correction, car l'hypothèse du corps gris impliquée en (1) cesse alors d'être valable.

Nous devrons considérer $\varkappa$ et aussi ω comme des fonctions $\varkappa_\nu$, ω_ν de la fréquence ν, définies par

$$K_\nu \rho = n Q_\nu \tag{3}$$

$$w_\nu \, d\Omega = 4\pi \frac{dQ_\nu}{Q_\nu} \tag{4}$$

où n est la densité des électrons libres, dQ_ν et Q_ν les sections d'efficacité différentielle, respectivement totale de Klein-Nishina. L'équation de transfert, qui exprimera encore que la variation d'intensité dI est égale à l'intensité émise moins l'intensité absorbée sur le trajet dx/μ, s'écrira:

$$\mu \frac{dI}{\rho \, dx} = -\int_0^\infty K_\nu I_\nu \, d\nu + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\nu \int_{\Omega'} d\Omega' K_{\nu'} \, w_{\nu'} (\Omega', \theta) f_{\nu'} \, I_{\nu'} (\theta') \tag{5}$$

où $f_{\nu'}$ est le facteur

$$f_{\nu'} = \frac{\nu}{\nu'} = \left[1 + \gamma'(1 - \cos\Theta)\right]^{-1} \tag{6}$$

qui mesure le changement de fréquence de l'effet Compton; $\gamma' = \dfrac{h\nu'}{mc^2}$ où h, m, c ont les significations usuelles.

On sait en effet que la puissance rayonnante, diffusée du cône d'angle solide $d\Omega$ dans le cône $d\Omega$ a pour valeur, par unité de masse:

$$\frac{1}{\rho}\, n\, \mathrm{I}_{\nu'}(\theta')\, f_{\nu'}\, d\mathrm{Q}_{\nu'}\, d\Omega$$

ν' est la fréquence initiale et $\nu = f_{\nu'}\nu'$ la fréquence finale; en invoquant (4) puis (3), nous intégrons d'abord sur Ω', ν étant fixe tandis que ν' dépend de ν et Ω' par (6); puis par intégration sur ν, nous obtiendrons le second terme de (5).

D'ailleurs, la densité de quantité de mouvement du rayonnement vaut, par unité de fréquence:

$$\frac{1}{c^2}\, \mathrm{I}_{\nu'}(\theta') = n_{\nu'\Omega'}\, \frac{h\nu'}{c}$$

c étant la vitesse du rayonnement et $n_{\nu'\Omega'}$ le nombre de photons par unité de volume, par unité de fréquence et par unité d'angle solide. Introduisant un coefficient de diffusion [1]

$$s_{\nu'}\, \rho = n\, \frac{d\mathrm{Q}_{\nu'}}{d\Omega'}$$

relatif au passage du cône $d\Omega'$ dans le cône $d\Omega$, nous voyons que l'expression

$$dx\, \frac{1}{c^2}\, n \int \mathrm{I}_{\nu'}(\theta')\, f_{\nu'}\, d\mathrm{Q}_{\nu'} = dx \int n_{\nu'\Omega'}\, s_{\nu'}\, \rho\, d\Omega' .$$

est égale au nombre de photons diffusés, par élément de volume, dans le cône $d\Omega$ avec la fréquence ν, multipliée par la quantité de mouvement $h\nu/c$ de chacun d'eux. Donc le second terme du second membre de (5) représente bien l'intensité émise par diffusion.

[1] R. Coutrez, *Ann. Obs. Roy. Belgique*, série 3, *3*, fasc. 1, 1944.

Le second membre de (4) étant une fonction compliquée de ν, plaçons-nous dans le cas où $\gamma = \frac{h\nu}{nc^2} \ll 1$ de sorte que l'effet Compton n'intervient que comme une correction du premier ordre en γ. (6) se réduit alors à $f_{\nu'} = 1 - \gamma(1 - \cos\Theta) = f_\nu$, par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{\nu'} &= \mathrm{K}_0(1 - 2\gamma) \\ \mathrm{K}_{\nu'} \varpi_{\nu'} &= \mathrm{K}_0 \varpi_0 \left[1 - 2\gamma(1 - \cos\Theta)\right] \end{aligned} \qquad (7)$$

où les valeurs $\varkappa_0$, ϖ_0 se refèrent à l'effet Thomson et ne dépendent donc pas de la fréquence (corps gris). Introduisons la profondeur optique τ_0 définie par $d\tau_0 = -\varkappa_0 \rho\, dx$; nous aurons pour (5) l'équation:

$$\mu \frac{d\mathrm{I}}{d\tau_0} = \mathrm{I} - 2\int \gamma \mathrm{I}_\nu\, d\nu -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int\int \varpi_0 \mathrm{I}_{\nu'}\, d\Omega'\, d\nu - \frac{3}{4\pi} \int\int (1 - \cos\Theta)\, \varpi_0\, \gamma\, \mathrm{I}_{\nu'}\, d\Omega'\, d\nu$$

où $\mathrm{I}_{\nu'}$ est l'intensité de fréquence $\nu' = \nu + \gamma\nu(1 - \cos\Theta)$, et où les contributions des intégrales sur ν sont négligeables sitôt que ν atteint une valeur telle que (7) cesse d'être valable. Nous pourrons, dans ces conditions, procéder par itération [1] et poser

$$\mathrm{I}_{\nu'} = \mathrm{I}_\nu^{(0)} + \mathrm{I}_{\nu'}^{(1)}$$

où $\mathrm{I}_{\nu'}^{(1)}$ est petit devant $\mathrm{I}_\nu^{(1)}$ comme γ devant 1. L'approximation d'ordre zéro, régie par l'équation

$$\mu \frac{d\mathrm{I}^{(0)}}{d\tau_0} = \mathrm{I}^{(0)} - \frac{1}{4\pi} \int \varpi_0 \mathrm{I}^{(0)}\, d\Omega' \qquad (8)$$

nous fait évidemment retomber sur le problème du corps gris (diffusion sans changement de longueur d'onde); le dernier terme de (8) a la valeur

$$\mathfrak{J}^{(0)}(\tau_0, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int \varpi_0 \mathrm{I}^{(0)}\, d\Omega' = \frac{3}{8}\left[(3 - \mu^2)\, \mathrm{J}^{(0)} + 2\mathrm{P}_2(\mu)\, \mathrm{K}^{(0)}\right]$$

[1] S. CHANDRASEKHAR, *Ap. J.*, *101*, 328, 1945.

où $P_2(\mu)$ est le deuxième polynome de Legendre, et $J^{(0)}$, $K^{(0)}$ sont les intégrales

$$\left. \begin{aligned} J^{(0)}(\tau_0) &= \frac{1}{2} \int I^{(0)}(\tau_0, \mu')\, d\mu', \\ K^{(0)}(\tau_0) &= \frac{1}{2} \int I^{(0)}(\tau_0, \mu')\, \mu'^2\, d\mu' \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Dans l'approximation d'ordre un, nous pourrons écrire $I_\nu^{(1)}$ au lieu de $I_{\nu'}^{(1)}$ en supposant $I_\nu^{(1)}$ fonction continue de ν; d'où l'équation

$$\mu \frac{d I^{(1)}}{d\tau_0} = I^{(1)} - \mathcal{J}^{(1)} \tag{10}$$

avec

$$\mathcal{J}^{(1)}(\tau_0, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int w_0 I^{(1)}\, d\Omega' + 2 \int \gamma I_\nu^{(0)}\, d\nu -$$

$$- \frac{3}{4\pi} \int \int (1 - \cos\Theta)\, w_0\, \gamma\, I_\nu^{(0)}\, d\Omega'\, d\nu$$

Ajoutons membre à membre les équations (8) et (10), nous obtenons

$$\mu \frac{dI}{d\tau_0} = I - \mathcal{J}$$

où la fonction $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{(0)} + \mathcal{J}^{(1)}$ donne le taux d'émission d'énergie au point τ_0 et dans la direction μ. Effectuant les intégrations sur φ' et incorporant les intégrations sur μ' dans les intégrales du type (9) avec d'éventuels indices ν correspondant à I_ν, et auxquelles nous adjoindrons

$$F_\nu^{(0)}(\tau_0) = 2 \int I_\nu^{(0)}(\tau_0, \mu')\, \mu'\, d\mu',$$

$$L_\nu^{(0)}(\tau_0) = \frac{1}{2} \int I_\nu^{(0)}(\tau_0, \mu')\, \mu'^3\, d\mu'$$

nous trouvons finalement pour $\mathfrak{J}$ la valeur

$$\mathfrak{J}(\tau_0\,,\ \mu) = 2\int_0^\infty \gamma\, I_\nu^{(0)}\, d\nu$$

$$+\frac{3}{8}\left[(3-\mu^2)\left(J - 3\int_0^\infty \gamma\, J_\nu^{(0)}\, d\nu\right) + \right.$$

$$\left. + 2P_2(\mu)\left(K - 3\int_0^\infty \gamma\, K_\nu^{(0)}\, d\nu\right)\right]$$

$$+\frac{3}{16}\left[(5\mu - 3\mu^3)\int_0^\infty \gamma\, F_\nu^{(0)}\, d\nu + 2P_3(\mu)\int_0^\infty \gamma\, L_\nu^{(0)}\, d\nu\right] \tag{11}$$

où $P_3(\mu)$ est le troisième polynome de Legendre, $J = J^{(0)} + J^{(1)}$, $K = K^{(0)} + K^{(1)}$.

Le taux d'émission énergétique au point τ_0 (source function) est donc

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathfrak{J}(\tau_0\,,\mu)\, d\mu = J(\tau_0) - \int_0^\infty \gamma\, J_\nu^{(0)}\, d\nu$$

et la loi d'assombrissement déduite de (11)

$$I(0\,,\ \mu) = \int_0^\infty \mathfrak{J}(\tau_0\,,\ \mu)\, e^{\frac{\tau_0}{\mu}}\, \frac{d\,\tau_0}{\mu}\,.$$

comportera aussi des termes en γ qui indiquent de combien l'on s'écarte de l'hypothèse du corps gris lorsqu'on tient compte, dans l'intensité totale, de composants monochromatiques de fréquence suffisamment élevées pour que l'effet Compton se fasse sentir en première approximation.