Paul Rossier. — *Constructions à la règle, un polygone régulier étant donné.*

Steiner a étudié les constructions possibles à la règle, un carré étant donné [1]. Examinons le cas où un polygone régulier d'au moins cinq côtés est donné.

Si le nombre de côtés est pair, les côtés opposés sont parallèles; soit AB un côté; la droite joignant A au sommet opposé à B est perpendiculaire à AB. Le centre est donné par l'intersection des diagonales.

Si le nombre des sommets est impair, traçons un étoilé dans le polygone donné; chaque côté de l'étoilé possède un côté du polygone donné qui lui est parallèle. Un sommet et une intersection appropriée de deux côtés de l'étoilé déterminent une droite qui passe par le centre et est perpendiculaire au côté opposé.

Dans les deux cas, on obtient donc des paires de parallèles et de perpendiculaires. La règle permet alors le tracé de parallèles et de perpendiculaires. En particulier, on peut construire la figure homothétique d'une ligne brisée quelconque et sa symétrique par rapport à un axe.

On peut encore faire tourner un droite quelconque de l'angle au centre du polygone. Pour cela, par un sommet du polygone donné, menons la parallèle à la droite donnée et déterminons son intersection A avec un rayon passant par le centre du polygone et un de ses sommets. Construisons le polygone homothétique et homocentrique au polygone donné. En joignant deux sommets appropriés des deux polygones, on obtient la droite cherchée.

Il est possible de faire tourner une droite de l'angle de deux côtés du polygone. Traitons le cas de deux côtés adjacents AB et BC. Par A, menons la parallèle à la droite donnée; elle coupe BC en un point E. Construisons le polygone homothétique au donné de côté BE et soit F le sommet appartenant

[1] Jacob STEINER, « Die Geometrischen Konstruktionen ».

à AB. Déterminons le symétrique C' de C par rapport à AB. La droite C'F est la droite demandée. On généralise facilement au cas de deux côtés non adjacents.

Si le nombre des côtés est impair, on peut construire un polygone de nombre double de côtés; il suffit de construire le symétrique de chaque sommet par rapport au centre.

Si le nombre des côtés est pair, on peut construire un nouveau polygone de même nature, faisant un angle quelconque avec le donné. Pour cela, joignons un point M du côté AB au centre O; construisons le symétrique de M par rapport au rayon OB; il appartient au côté BC; déterminons le symétrique N de M' par rapport à la médiatrice de BC; on a AM = BN et OM = ON. Repétant la construction, on obtient le polygone demandé.

La construction peut être étendue au cas d'un polygone à nombre impair de côtés, par doublement préalable de ce nombre.

Les opérations précédentes sont applicables au triangle équilatéral, à condition que son centre soit donné, ou les milieux de deux côtés.

Paul Rossier. — *Construction au compas de cubiques et quartiques binodales.*

A notre connaissance, le problème de déterminer les courbes constructibles par points au compas n'est pas résolu. Par contre, il est bien connu que la règle suffit pour construire les courbes unicursales. Nous allons montrer que les cubiques et quartiques de genre un sont constructibles au compas.

I. Newton a montré que par une homographie, on peut transformer une cubique quelconque en une parabole divergente d'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Le polynôme du second membre peut être construit à la règle; le compas donne la racine carrée; la parabole divergente