

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1955)
Heft: 1

Artikel: La notion d'ordre et la géométrie non euclidienne
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739840>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Paul Rossier. — *Sur la définition du triangle.*

En géométrie euclidienne ou lobatchewskienne, un segment est bien déterminé par la donnée de ses deux extrémités; il en résulte que les trois sommets d'un triangle déterminent cette figure sans ambiguïté.

En géométrie projective ou riemannienne, deux points déterminent deux segments dits supplémentaires. Ainsi, aux trois sommets d'un triangle sont liés six segments. Appelons respectivement a et a' , b et b' , c et c' les paires de segments supplémentaires d'extrémités B et C, C et A, A et B. Si l'on n'impose aucune condition à la notion de triangle, il existe huit triangles de sommets A, B et C, savoir ceux dont les côtés sont abc , abc' , $ab'c$, $a'bc$, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$ et $a'b'c'$.

L'axiome du triangle, dû à Pasch, est le suivant: toute droite qui ne passe pas par un sommet d'un triangle et qui coupe un de ses côtés en coupe deux. Soit d une droite qui coupe les trois droites AB, BC et CA aux points K, L et M; appelons c' , a' et b' ceux des segments portés par ces droites qui contiennent K, L et M. Les trois segments a , b et c ne coupent pas d et constituent un triangle; les ternes de segments $ab'c'$, $a'b'c$ et $a'bc'$ forment aussi des triangles, car ils sont coupés en deux points par la droite d . Au contraire, $a'b'c'$, $a'bc$, $ab'c$ et abc' ne sont pas des triangles puisque la droite d ne les coupe qu'en un seul point ou en trois. En géométrie projective, il y a donc quatre triangles ayant trois sommets donnés. En géométrie élémentaire, on pose implicitement qu'aucun côté d'un triangle ne possède de point impropre; si d est la droite impropre du plan, le seul triangle de sommets A, B et C est abc .

En faisant tourner la droite d autour d'une de ses intersections avec un côté, on montre l'indépendance du triangle de la droite d qui a servi à le caractériser.

Paul Rossier. — *La notion d'ordre et la géométrie non euclidienne.*

En géométrie euclidienne, l'ordre se présente sous deux aspects différents; sur une droite, deux points déterminent un

ordre (dit euclidien) tandis que dans un faisceau, il faut trois éléments pour en déterminer un. Ce dernier cas se présente en géométrie projective, tant pour les ponctuelles que pour les faisceaux.

En géométrie projective ou en géométrie riemanienne, la notion d'ordre peut être axiomatisée comme suit :

- I. — Trois éléments d'une forme de première espèce, pris dans un certain ordre, déterminent sur celle-ci un ordre géométrique.
- II. — Une permutation circulaire de trois éléments ne modifie pas l'ordre géométrique qu'ils déterminent.

Ces deux axiomes conduisent au théorème suivant : il n'y a pas plus de deux ordres sur une forme de première espèce, car les six permutations de trois éléments sont obtenues par permutations circulaires de deux d'entre elles, opposées l'une à l'autre.

- III. — Il y a deux ordres géométriques sur une forme de première espèce.
- IV. — On peut classer des éléments en nombre fini d'une forme de première espèce de telle sorte que les omettant tous, sauf trois quelconques d'entre eux, l'ordre établi par eux soit toujours le même.

Dans ce cas, la suite est dite *ordonnée*.

- V. — Dans une suite ordonnée, entre deux éléments, on peut toujours introduire un élément sans détruire l'ordre géométrique.
- VI. — La projection et la section conservent l'ordre géométrique.

Soit une suite ordonnée de quatre éléments A, B, C et D. On dit que les deux paires AC et BD se séparent. A une permutation circulaire près, on ne peut désigner cette suite ordonnée que de deux façons sans détruire l'ordonnance : ABCD et DCBA ; elles correspondent aux deux ordres possibles sur la forme.

Laissons A, C et D fixes ; l'ensemble des éléments B séparés de D par A et C constitue le segment AB extérieur à D. Ainsi,

deux éléments d'une forme déterminent deux segments sur celle-ci.

La géométrie affine se distingue de la géométrie projective par l'attribution d'un rôle privilégié au plan impropre et à ses points. On convient implicitement de toujours faire figurer le point impropre d'une droite dans l'expression de l'ordre de ses points. Appelant I le point impropre d'une droite, on a par définition

$$\begin{aligned} \text{Ordre projectif ABI} &= \text{ordre projectif IAB} \\ &= \text{ordre euclidien AB.} \end{aligned}$$

On appelle segment euclidien celui des deux segments projectifs qui ne contient pas le point impropre de la droite.

Pour passer à la géométrie lobatwhewskienne, posons axiomatiquement l'existence d'une surface dite impropre coupée en deux points par une droite quelconque. Appelons parallèles deux droites ou une droite et un plan d'intersections impropres. La théorie de l'ordre des points sur une droite est modifiée, mais pas celle des rayons des faisceaux.

Définissons l'ordre lobatchewskien des points d'une droite par les conventions suivantes: dans l'expression de l'ordre lobatchewskien, il figure toujours un point impropre et deux points propres; l'ordre ne change pas si l'on remplace l'un des deux points impropres de la droite considérée par l'autre.

On a ainsi, en appelant J et K les deux points impropres de la droite AB,

$$\text{Ordre ABJ} = \text{ordre ABK} = \text{ordre JAB.}$$

Il n'existe pas de paire de points propres séparés par deux points impropres; en effet, soit XY une telle paire; on aurait

$$\text{ordre XKY} = \text{ordre KYJ} = \text{ordre JYJ.}$$

Or deux points Y et J ne déterminent pas un ordre. L'hypothèse est absurde.

Par définition, un segment lobatwhewskien ne contient pas de point impropre; il est donc déterminé sans ambiguïté par ses extrémités, comme un segment euclidien.

En général, on distingue les géométries non euclidiennes par la notion de parallélisme. En réalité la notion d'ordre, plus essentielle que celle de parallélisme, permet déjà de faire

cette distinction et les propriétés du parallélisme sont des conséquences des conventions faites sur l'ordre.

La considération des éléments impropres permet de montrer facilement la vanité de la recherche d'une géométrie ressemblant à celle connue et telle qu'une droite posséderait trois points impropres. En effet, dans toute géométrie élémentaire, le déplacement joue un rôle important. Le déplacement d'une droite sur elle-même est une projectivité dans laquelle les points impropres sont unis. Or l'existence de trois éléments impropres fait de toute projectivité une identité; une telle géométrie ignorerait la notion de déplacement.

Pierre Bouvier. — *Une extension particulière de la méthode de Wiener-Hopf.*

Nous savons que l'équation de transfert, écrite pour une atmosphère stratifiée en couches planparallèles sous la forme

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \mathcal{J} \quad (1)$$

relie l'intensité $I(\tau, \mu)$ à la profondeur optique τ et dans la direction $\theta = \cos^{-1} \mu$ à la fonction-source \mathcal{J} . En prenant les transformées de Laplace des deux membres de (1), l'on obtient sans peine l'égalité

$$\bar{I}(p, \mu) = \frac{\bar{\mathcal{J}} - \mu I(0, \mu)}{1 - p\mu} \quad (2)$$

où

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

désigne la transformée de Laplace de $f(t)$ et où à la surface de l'atmosphère $\tau = 0$,

$$I(0, \mu) = 0 \text{ si } \mu < 0, \quad \mu I(0, \mu) = \bar{\mathcal{J}}(1/\mu) \text{ si } \mu > 0.$$

Jusqu'ici I et \mathcal{J} peuvent être considérées comme des fonctions de la direction μ , de la fréquence ν et de la profondeur τ_ν .