Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 9 (1956)
Heft: 2

Artikel: Théorème de Kempe et constructions au compas
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738972

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

intéressants seraient évidemment ceux des polygones de 17, 257 et 65.537 côtés, dont Gauss a montré la constructibilité au compas. On est conduit alors à des équations de degrés 8, 128 et 32.768 dont les coefficients sont eux-mêmes de grands nombres (des milliers dans le cas de 17). Il est certain que ces équations sont solubles par racines carrées, mais la démonstration directe de cette propriété, sans recours à l'imaginaire, semble devoir présenter quelques difficultés.

Par contre, en recourant à l'imaginaire, on ramène facilement la théorie précédente à celle de Gauss. Posons $e^{i\varphi} = u$. On a

$$\operatorname{tg} 2n\varphi \operatorname{tg}\varphi \equiv \frac{u^{4n} - 1}{i\,(u^{4n} + 1)} \cdot \frac{u^2 - 1}{i\,(u^2 + 1)} = 1$$

Une seconde substitution $u^2 = -z$ donne

$$z^{2n+1} + 1 = 0 .$$

C'est l'équation de Gauss de la division du cercle.

Paul Rossier. — *Théorème de Kempe et constructions au compas.*

Le théorème de Kempe affirme l'existence d'un système articulé permettant de décrire tout arc fini d'une courbe algébrique quelconque et donne le moyen de déterminer ce système. Pour le démontrer, on pose

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y &= a \sin \alpha + b \sin \beta \end{aligned}$$

et on met facilement l'équation de la courbe sous la forme

$$1) \quad \sum \mathrm{L}_j \cos \left(r_j \alpha \pm s_j \beta + \varepsilon_j \frac{\pi}{2} \right) = 0 .$$

Les L_j sont des constantes positives, les r_j et les s_j des entiers positifs et ε_j l'un des nombres 0, 1, 2 ou 3. Les termes de la somme sont en nombre fini. Cette équation a la signification suivante: la composition de vecteurs de longueurs fixes, L_j, faisant les angls $\gamma_j = r_j \alpha \pm s_j \beta + \varepsilon \frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x donne

un vecteur dont l'extrémité appartient à l'axe des y. A tout point de la courbe, correspond un point de cet axe. L'ordonnée de ce point est donnée par l'équation obtenue en remplaçant dans (1) les cosinus par les sinus des mêmes angles.

L'équation (1) donne le moyen, en n'utilisant que le compas, de vérifier que le point de coordonnées x et y appartient ou pas à la courbe considérée. Les longueurs a et b étant choisies, le point proposé détermine les angles α et β. Si l'extrémité P du polygone de vecteurs correspondants tombe sur l'axe des y, le point donné appartient à la courbe et pas dans le cas contraire.

Si le point P n'appartient pas à l'axe des y, répétons la construction pour un point voisin du point de départ M; P se déplace et décrit une courbe en même temps que M. A une intersection de cette dernière courbe avec l'axe des y correspond un point M de la courbe considérée.

Le problème de la constructibilité au compas de la courbe considérée est ramené au suivant: le point P étant pris sur l'axe des y, choisir les longueurs a et b et déterminer les angles α, β et $\Sigma \frac{\pi}{2}$ de telle sorte que la composition des vecteurs L_j conduise au point P, ces vecteurs faisant les angles γ_γ avec l'axe des x. On obtient un problème relatif à des angles liés par des relations à coefficients entiers. Au compas, on peut additionner et soustraire des angles, les multiplier par un entier quelconque et les diviser par les puissances entières de 2. Le problème des courbes algébriques constructibles au compas prend ainsi une forme nouvelle et précise qui montre en tous cas l'ampleur de la question.

Paul Rossier. — *Sur la représentation du relief terrestre par l'analyse harmonique.*

M. J.-M. Chevalier * a essayé de représenter le relief terrestre par une somme de quelques termes de la forme

$$z_n = a_n \cos n\ (L—L_n).$$

* J. M. Chevalier, « Analyse harmonique du relief terrestre. Essai d'interprétation mécanique ». *Revue de Géomorphie dynamique*, 3e année, 1952, nº 5, p. 219.