

# Théorème de Kempe et constructions au compas

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **9 (1956)**

Heft 2

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-738972>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

intéressants seraient évidemment ceux des polygones de 17, 257 et 65.537 côtés, dont Gauss a montré la constructibilité au compas. On est conduit alors à des équations de degrés 8, 128 et 32.768 dont les coefficients sont eux-mêmes de grands nombres (des milliers dans le cas de 17). Il est certain que ces équations sont solubles par racines carrées, mais la démonstration directe de cette propriété, sans recours à l'imaginaire, semble devoir présenter quelques difficultés.

Par contre, en recourant à l'imaginaire, on ramène facilement la théorie précédente à celle de Gauss. Posons  $e^{i\varphi} = u$ . On a

$$\operatorname{tg} 2n\varphi \operatorname{tg} \varphi \equiv \frac{u^{4n} - 1}{i(u^{4n} + 1)} \cdot \frac{u^2 - 1}{i(u^2 + 1)} = 1$$

Une seconde substitution  $u^2 = -z$  donne

$$z^{2n+1} + 1 = 0.$$

C'est l'équation de Gauss de la division du cercle.

**Paul Rossier.** — *Théorème de Kempe et constructions au compas.*

Le théorème de Kempe affirme l'existence d'un système articulé permettant de décrire tout arc fini d'une courbe algébrique quelconque et donne le moyen de déterminer ce système. Pour le démontrer, on pose

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y &= a \sin \alpha + b \sin \beta \end{aligned}$$

et on met facilement l'équation de la courbe sous la forme

$$1) \quad \sum L_j \cos \left( r_j \alpha \pm s_j \beta + \varepsilon_j \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Les  $L_j$  sont des constantes positives, les  $r_j$  et les  $s_j$  des entiers positifs et  $\varepsilon_j$  l'un des nombres 0, 1, 2 ou 3. Les termes de la somme sont en nombre fini. Cette équation a la signification suivante: la composition de vecteurs de longueurs fixes,  $L_j$ , faisant les angles  $\gamma_j = r_j \alpha \pm s_j \beta + \varepsilon_j \frac{\pi}{2}$  avec l'axe des  $x$  donne

un vecteur dont l'extrémité appartient à l'axe des  $y$ . A tout point de la courbe, correspond un point de cet axe. L'ordonnée de ce point est donnée par l'équation obtenue en remplaçant dans (1) les cosinus par les sinus des mêmes angles.

L'équation (1) donne le moyen, en n'utilisant que le compas, de vérifier que le point de coordonnées  $x$  et  $y$  appartient ou pas à la courbe considérée. Les longueurs  $a$  et  $b$  étant choisies, le point proposé détermine les angles  $\alpha$  et  $\beta$ . Si l'extrémité P du polygone de vecteurs correspondants tombe sur l'axe des  $y$ , le point donné appartient à la courbe et pas dans le cas contraire.

Si le point P n'appartient pas à l'axe des  $y$ , répétons la construction pour un point voisin du point de départ M; P se déplace et décrit une courbe en même temps que M. A une intersection de cette dernière courbe avec l'axe des  $y$  correspond un point M de la courbe considérée.

Le problème de la constructibilité au compas de la courbe considérée est ramené au suivant: le point P étant pris sur l'axe des  $y$ , choisir les longueurs  $a$  et  $b$  et déterminer les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\Sigma \frac{\pi}{2}$  de telle sorte que la composition des vecteurs  $L_j$  conduise au point P, ces vecteurs faisant les angles  $\gamma_j$  avec l'axe des  $x$ . On obtient un problème relatif à des angles liés par des relations à coefficients entiers. Au compas, on peut additionner et soustraire des angles, les multiplier par un entier quelconque et les diviser par les puissances entières de 2. Le problème des courbes algébriques constructibles au compas prend ainsi une forme nouvelle et précise qui montre en tous cas l'ampleur de la question.

**Paul Rossier.** — *Sur la représentation du relief terrestre par l'analyse harmonique.*

M. J.-M. Chevalier\* a essayé de représenter le relief terrestre par une somme de quelques termes de la forme

$$z_n = a_n \cos n (L - L_n).$$

\* J. M. CHEVALIER, « Analyse harmonique du relief terrestre. Essai d'interprétation mécanique ». *Revue de Géomorphie dynamique*, 3<sup>e</sup> année, 1952, n<sup>o</sup> 5, p. 219.