

Une géométrie sans mesure : mais avec congruence des segments de droite

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **10 (1957)**

Heft 3

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-738712>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

dispersée et le cytoplasme paraissent encore normaux. Par contre à la concentration M/10, le cytoplasme est partiellement lysé ainsi que le noyau. Les nucléoles complètement ratatinés ont pris des formes tout à fait irrégulières.

Il résulte de ces observations que l'acide borique ralentit la croissance des racines chez *Allium cepa* en inhibant le processus normal de la mitose, en la bloquant au stade prophase, à faibles concentrations; en empêchant même la prophase de s'installer, à concentrations plus élevée. Le bore se rattache donc au groupe des inhibiteurs préprophasiques-prophasiques établi par Deysson (1948) et d'Amato (1948-1949). Deysson (1956) pense que les inhibiteurs préprophasiques-prophasiques altèrent le métabolisme cellulaire, plus particulièrement le métabolisme des acides nucléiques préparant la mitose. Il est probable que l'acide borique, aux concentrations mitostatiques M/100-M/50, agit sur ce métabolisme puisque son action se manifeste sur le nucléole qui représente la principale accumulation d'acide ribo-nucléique intranucléaire. On peut donc émettre l'hypothèse que les altérations nucléolaires observées et l'incapacité de ce corpuscule de se résorber en fin de prophase découleraient d'une interaction acide borique — acide ribonucléique ayant pour conséquence le ralentissement et l'accumulation des mitoses au stade prophasique et dans les cas extrêmes l'inhibition complète de la mitose ¹.

Paul Rossier. — *Une géométrie sans mesure, mais avec congruence des segments de droite.*

On appelle mesure cayleyenne d'un segment un nombre proportionnel au logarithme du birapport des extrémités du segment avec deux points fixes, dits absolus, de son support. La mesure cayleyenne d'un segment dont une extrémité est l'un des points absolus est infinie. Si les deux points absolus sont confondus, les mesures cayleyennes des segments sont

¹ Le travail *in extenso* avec microphotographies et bibliographie paraîtra dans *Caryologia*.

nulles en général et indéterminées si l'une des extrémités est l'unique point absolu.

En géométrie plane, les points absolus d'une droite sont ses intersections avec une conique fixe, dite absolue. On introduit dans le plan une métrique analogue relative aux angles: les rayons absolus sont les tangentes à la conique absolue issues du sommet de l'angle. Dans cette géométrie plane, on montre qu'un cercle cayleyen (lieu des points cayleyenement équidistants d'un point) est une conique bitangente à l'absolu; les tangentes aux points de contact se coupent au centre cayleyen du cercle.

Supposons l'absolu tangentiellement dégénéré en deux points. Ces deux points absolus déterminent une droite dite exceptionnelle. Seule la droite exceptionnelle possède une métrique cayleyenne normale. Une droite quelconque du plan ne possède ni points absolus ni métrique. Si une droite passe par un seul des points absolus, la métrique y est dégénérée; les segments y sont généralement nuls ou exceptionnellement indéterminés.

Toute conique passant par les deux points absolus y possède deux tangentes; elle constitue un cercle cayleyen dont le centre est l'intersection de ces deux tangentes.

Posons la congruence des rayons d'un cercle. On définit ainsi la congruence de segments ayant une extrémité commune et rien de plus. Par exemple, la définition précédente ne pose pas que les rayons de deux cercles passant respectivement par les centres l'un de l'autre sont congruents. En outre, cette définition n'établit pas de relation de congruence entre segments de même support sans extrémité commune.

Dans ce qui précède, on suppose le centre du cercle quelconque, n'appartenant pas à la droite exceptionnelle. Un cercle dont le centre est sur celle-ci, dégénère en la droite exceptionnelle comptée deux fois. La définition de la congruence est en défaut. Pour introduire une relation de congruence entre segments portés par des droites concourant en un point de la droite exceptionnelle, une définition *ad hoc* est nécessaire. Inspirons-nous de la géométrie affine et posons la congruence des segments opposés d'un quadrangle dont deux points

diagonaux appartiennent à la droite exceptionnelle. Plus intuitivement, si nous qualifions de parallèles des droites se coupant sur la droite exceptionnelle (car leur angle cayleyen est nul et seulement dans ce cas), nous dirons que par définition, deux côtés opposés d'un parallélogramme sont congruents.

Soit AB et $A'B'$ une paire de segments congruents selon ce dernier mode. Menons BA' qui coupe la droite exceptionnelle en K et à partir de K , projetons B' sur le support de AB en C . On montre que B est centre d'un cercle qui passe par A et C . La transitivité de la congruence et l'identité des deux définitions s'introduisent ainsi. La seconde définition permet, grâce à la transitivité, de définir la congruence de deux segments de même support et d'extrémités quelconques. On montre facilement que cette relation est indépendante du choix du second côté du parallélogramme nécessaire à la construction.

Désormais, on dispose dans le plan d'une relation de congruence qui jouit des propriétés de la congruence euclidienne habituelle des segments. Cette relation est indépendante de toute opération de mesure et de tout choix d'unité de longueur. On voit ainsi clairement l'indépendance de la géométrie des axiomes de la grandeur, au moins pour les longueurs.

Les remarques précédentes mettent aussi en évidence la cause de l'absence, en géométrie euclidienne, de toute dualité métrique entre les longueurs et les angles. L'existence d'un absolu tangentiellement dégénéré n'a d'influence que sur les angles des droites se coupant sur la droite exceptionnelle. Sauf dans ce cas, un angle a une grandeur non nulle. Il ne peut évidemment pas y avoir de dualité entre une grandeur généralement non nulle et une autre, la longueur, qui l'est toujours, sauf sur la droite exceptionnelle.

En géométrie métrique élémentaire, on superpose une métrique de caractère affín à la métrique cayleyenne basée sur l'absolu, qui est alors constitué par les deux points cycliques. Cette superposition n'a rien de nécessaire, puisque les relations de congruence de segments peuvent être ramenées à des opérations portant sur des figures et pas sur des nombres. Mais il faut bien dire que le recours à la mesure des segments

facilite bien des choses et abrège beaucoup de démonstrations et d'énoncés.

L'extension à l'espace (et à l'hyperespace) est immédiate et ne présente aucune difficulté.

Paul Rossier. — *Un paradoxe géométrique relatif au report d'un angle.*

Soient a , b et c trois rayons d'un faisceau, j et k les rayons absolus d'une métrique cayleyenne établie dans ce faisceau. Reporter l'angle cayleyen $a b$ à partir de c , c'est contruire le rayon d tel que les birapports (a, b, j, k) et (c, d, j, k) soient égaux.

Pour effectuer la construction, coupons la figure par une droite quelconque p . Elle coupe a , b et k aux points (pa) , (pb) , et (pk) . Joignons les deux points (pa) et (pb) à un point quelconque Q de j . La droite $Q(pa)$ coupe c en un point R . Menons $R(pk)$; elle coupe $Q(pb)$ en un point du rayon cherché d . La double projection montre l'égalité requise des deux birapports.

Ainsi, le report d'un angle est justiciable de la règle au moyen de la construction précédente. Or en géométrie élémentaire, on montre que le report de l'angle ne peut pas être effectué à la règle. Il semble donc y avoir là une contradiction.

Il n'en est rien. La métrique élémentaire des angles est bien cayleyenne, mais elle est elliptique, c'est-à-dire que les rayons absolus j et k sont imaginaires conjugués. Si l'on utilise des éléments imaginaires dans une construction, c'est toujours par paires conjuguées et les deux éléments de la paire jouent des rôles identiques. Dans la construction donnée ci-dessus, les deux rayons absolus ne sont pas traités de la même façon: on distingue le point pk alors que son homologue pj n'est pas considéré; le point Q est choisi arbitrairement sur j et aucun point arbitraire de k n'intervient de la même façon.

Le paradoxe est donc expliqué. La construction, valable en géométrie hyperbolique, ne l'est pas dans le cas elliptique. En géométrie élémentaire, le report de l'angle est fait au moyen d'un compas; mais alors on résoud d'un coup un double problème: report d'un angle dans les deux sens.