

Sur un problème de la théorie des files d'attente et une propriété des déterminants de Vandermonde

Autor(en): **Féraud, Lucien**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **12 (1959)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739047>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

essentielles, et que l'on doit souhaiter voir reflourir chez ceux qui viennent remplacer les équipes disparues.

*Nihil velocius annis,
Aut brevius vita |
Sed dilectis amicis
Quid melius memoria
Acti temporis.*

Paul-Ad. MERCIER.

Séance du 19 février 1959

Lucien Féraud. — *Sur un problème de la théorie des files d'attente et une propriété des déterminants de Vandermonde.*

1. Dans la théorie des files d'attente ¹ joue un rôle prééminent le cas exponentiel dans lequel la durée du service (ou la durée comprise entre deux arrivées) est une variable aléatoire de fonction de fréquence

$$\lambda e^{-\lambda t},$$

la durée moyenne étant $\frac{1}{\lambda}$.

Si l'on considère plusieurs guichets qui travaillent simultanément et indépendamment avec des durées de service suivant toutes des lois exponentielles de moyennes respectives

$$\frac{1}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{\lambda_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lambda_j}, \quad \frac{1}{\lambda_n}$$

il est intéressant de connaître la distribution de la durée moyenne du service dans l'ensemble des guichets. Au facteur n près, il s'agit d'établir la distribution de la somme des variables aléatoires. Le problème se formule donc comme suit.

2. Soit une suite de variables aléatoires positives

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_j, \quad u_n$$

¹ Les résultats de la présente Note se rattachent à un travail sur les files d'attente en cours de préparation au Centre de recherches de la Faculté des sciences économiques et sociales.

dont les fonctions de fréquence sont, pour $j = 1. 2. \dots n$

$$\lambda_j e^{-\lambda_j u_j}$$

et les moyennes $\frac{1}{\lambda_j}$ respectivement.

Ces variables étant considérées comme indépendantes, leur somme $s = \sum u_j$ a pour moyenne $\sum \frac{1}{\lambda_j}$.

Lorsque l'on ne pourra se contenter de la connaissance de cette moyenne il faudra calculer la fonction de fréquence de la distribution de s . La fonction caractéristique de la distribution de u_j est

$$\varphi_j(t) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j - it}.$$

Les variables u_j étant indépendantes la fonction caractéristique de la distribution de s est le produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables, c'est-à-dire

$$\Phi(t) = \Pi[\varphi_j(t)] = \frac{\Lambda}{\Pi(\lambda_j - it)}$$

en posant

$$\Lambda = \Pi(\lambda_j).$$

Lorsque tous les λ_j sont différents on passe, par une décomposition en éléments simples, à la forme suivante

$$\Phi(t) = \frac{\Lambda}{\prod_{j=1}^n (\lambda_j - it)} = \Lambda \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{\lambda_k - it} \quad (1)$$

avec

$$C_k = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\lambda_j - \lambda_k)}.$$

En remontant de la fonction caractéristique à la fonction de fréquence à l'aide de

$$\lambda_k e^{-\lambda_k s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-its} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - it} dt,$$

on obtient

$$\Lambda \sum C_k e^{-\lambda_k s} \quad (2)$$

pour fonction de fréquence de s .

On vérifie sans difficulté que son intégrale de 0 à l'infini est égale à 1:

$$\Lambda \int_0^{\infty} \sum C_k e^{-\lambda_k s} ds = \Lambda \sum \frac{C_k}{\lambda_k} = 1$$

en s'appuyant sur ce que devient 1) lorsqu'on y fait $t = 0$.

La distribution de s a pour moyenne

$$\Lambda \sum \int_0^{\infty} C_k s e^{-\lambda_k s} ds = \Lambda \sum \frac{C_k}{\lambda_k^2}$$

que nous avons déjà exprimée sous une autre forme $\sum \frac{1}{\lambda_k}$.

Pour vérifier l'identité de ces deux formes il suffit de remarquer

$$\begin{aligned} \frac{C_k}{(\lambda_k - it)^2} &= \frac{d}{d(it)} \left[\frac{C_k}{\lambda_k - it} \right] \\ \sum \frac{C_k}{(\lambda_k - it)^2} &= \frac{d}{d(it)} \left[\frac{1}{\Lambda (\lambda_k - it)} \right] = \frac{1}{\Lambda (\lambda_k - it)} \sum \frac{1}{\lambda_k - it} \end{aligned}$$

d'où en faisant $t = 0$

$$\sum \frac{C_k}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\Lambda} \sum \frac{1}{\lambda_k} .$$

3. On peut encore remarquer que les C_k sont les solutions du système

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} + \dots &+ \frac{C_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\Lambda} \\ C_1 + C_2 + \dots &+ C_n = 0 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots &+ \lambda_n C_n = 0 \\ \lambda_1^{n-2} C_1 + \lambda_2^{n-2} C_2 + \dots &+ \lambda_n^{n-2} C_n = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

et en tirer

$$C_k = (-1)^{k-1} \frac{V(\lambda_1, \dots, \bar{\lambda}_k, \dots, \lambda_n)}{V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

où sont représentés par

$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le déterminant de Vandermonde d'ordre n formé avec tous les λ , et par

$V(\lambda_1, \dots, \bar{\lambda}_k, \dots, \lambda_n)$ le déterminant de Vandermonde d'ordre $n - 1$ formé avec les λ , à l'exception de λ_k .

Le système 3) complété par l'équation

$$\frac{C_1}{\lambda_1^2} + \frac{C_2}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{C_n}{\lambda_n^2} = X$$

peut être considéré comme un système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues

$$\frac{C_1}{\lambda_1^2}, \frac{C_2}{\lambda_2^2}, \dots, \frac{C_n}{\lambda_n^2}, X$$

dont le déterminant principal s'écrit

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_n^2 & 0 \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_n^n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \Lambda V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

On en tire

$$X = \frac{(-1)^{n+1}}{\Lambda} \cdot \frac{D}{\Delta}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_n^n \end{vmatrix}$$

d'où

$$X = \frac{1}{\Lambda^2} \cdot \frac{\Delta}{V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

Le rapprochement des deux expressions obtenues pour la moyenne de s , d'une part ΛX et d'autre part $\sum \frac{1}{\lambda_j}$,

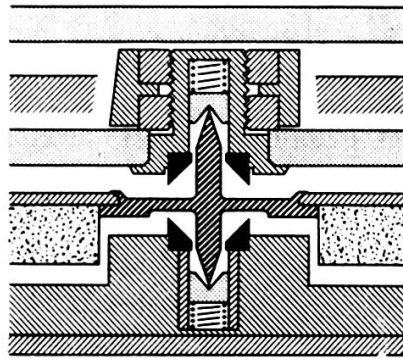
conduit rapidement à l'identité

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \wedge \sum \frac{1}{\lambda_j}$$

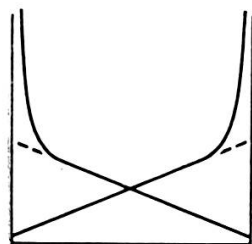
que l'on pourrait déduire directement des propriétés élémentaires des déterminants.

A. Amstutz. — *Butées élastiques pour pivots.*

Pour améliorer la façon nouvelle d'associer pivot et rubis que j'ai décrite récemment dans ces *Archives* (4 déc.) j'ai adjoint deux couronnes de caoutchouc aux deux ressorts hélicoïdaux qui appliquent à *tout moment* les pierres contre le pivot.



Comme le montre la coupe ci-dessus, à l'échelle 2/1, ces couronnes sont de forme cylindrique à l'extérieur, conique à l'intérieur, et sont encastrées à leur base dans des cavités faites à l'extrémité des tubes contenant rubis et ressorts. L'arête circulaire que donne l'intersection cylindre-cône, émerge de la cavité et reçoit avec souplesse les chocs de l'équipage mobile (pivot, cadran, aimant, etc.) qui dérivent de mouvements insuffisamment amortis par les ressorts. Il appert, en effet, qu'au début d'un choc l'élasticité du caoutchouc est grande, grâce à la forme en arête, mais qu'une augmentation de la



compression crée une résistance rapidement croissante, qui se traduit, sur un diagramme, par une courbe à tendance asymptotique, et non par une de ces droites caractérisant le travail de ressorts hélicoïdaux simples. (Flèche en abscisse, charge en ordonnée.)