Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 12 (1959)
Heft: 1

Artikel: Sur l'égalité des courbures interne et totale des surfaces
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739053

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. FLEURY, C. et E. FROMMEL, Une cause d'erreur dans l'emploi du phénomène de Straub comme épreuve atropinique. *Helv. Physiol. Acta*, 1958, *16*, C 61-C 63.
4. FROMMEL, E. et C. FLEURY, Une cause d'erreur des méthodes d'analgésimétrie en expérimentation animale. *Arch. exp. Path. Pharmak.*, 1959, *236*, 213-214.
5. RADOUCO, C., S. RADOUCO et E. FROMMEL, Méthode algésimétrique expérimentale. Etude quantitative des analgésiques. *Helv. Physiol. Acta*, 1957, *15*, 193-199.

Séance du 19 mars 1959

Paul Rossier. — *Sur l'égalité des courbures interne et totale des surfaces.*

1. Soient A et B deux points voisins d'une surface; menons deux droites parallèles, l'une par A dans le plan tangent à la surface et l'autre par B; projetons orthogonalement cette dernière sur le plan tangent en B. On dit que la droite menée par A a été transportée parallèlement sur la surface de A en B.

Sur la surface, traçons une courbe; divisons-la en arcs infinitésimaux et transportons une droite successivement sur chacun d'eux; la droite a été transportée parallèlement sur la courbe considérée.

Le transport parallèle conserve les longueurs des segments et les angles des droites. Cela est dû au fait que les plans tangents en deux points voisins forment un angle infiniment petit et que le cosinus d'un tel angle diffère de l'unité d'un infiniment petit d'ordre deux.

Si la droite transportée est la tangente à la courbe et que celle-ci est une géodésique de la surface, la droite reste tangente par transport parallèle; en effet, deux tangentes consécutives déterminent le plan osculateur et celui-ci est normal à la surface.

2. Sur la surface, découpons une petite calotte, faisons-en parcourir le contour par une droite; en général, les positions initiale et finale de celle-ci ne coïncident pas, elles forment un angle non nul; le rapport de cet angle à l'aire de la calotte est la courbure interne de celle-ci.

Lors d'une flexion, les arcs, les angles et les aires sont conservés; la courbure totale est donc un invariant des flexions.

3. Proposons-nous de calculer la courbure interne d'une sphère. Pour cela, résolvons un problème préalable. Sur un cône de révolution dont les génératrices font un angle φ avec la base, soient A et B deux points de cette courbe. Déplaçons parallèlement de A en B la tangente à la base en A. La tangente en B et la parallèle par B à la tangente en A sont contenues dans le plan de base. Projetons la parallèle à la tangente en A dans le plan tangent en B; cette projection fait un angle ξ avec la tangente en B; calculons-le. Pour cela, projetons orthogonalement la figure sur le plan de la base pris comme horizontal et sur le plan du méridien par B pris comme vertical. Sur les deux tangentes, portons l'unité de longueur. Soit α l'angle des rayons par A et B. La longueur de la projection verticale de la projection sur le plan tangent en B de la parallèle par B à la tangente en A est $\cos\varphi \sin\alpha$; la longueur de la projection de cette parallèle sur la tangente en B est $\cos\alpha$; la tangente de l'angle ξ est égale au rapport de ces deux longueurs. Donc

$$\operatorname{tg}\xi = \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha .$$

4. Sur une sphère de rayon R, soit un petit cercle de rayon r, donc d'angle au centre $\frac{r}{R}$. Pour le transport parallèle sur ce petit cercle, celui-ci peut être considéré aussi bien comme appartenant à la sphère qu'au cône tangent; la formule ci-dessus est applicable. Considérons un secteur de ce petit cercle d'angle au centre $\frac{2\pi}{p}$. Transportée parallèlement le long de l'arc correspondant, la tangente en une extrémité fait avec la tangente en la seconde extrémité l'angle ξ tel que

$$\operatorname{tg}\xi = \cos\frac{r}{R}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{p} .$$

A une droite, faisons parcourir le contour du secteur. Aux extrémités de l'arc et au centre, elle tourne des angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\xi$ et $\pi - \frac{2\pi}{p}$. Finalement, l'angle des positions initiale et finale

est $\frac{2\pi}{p} - \xi$. L'aire du secteur est $\frac{2\pi}{p} R^2 (1 - \cos \frac{R}{r})$. Pour la courbure totale, il vient

$$K = \frac{\frac{2\pi}{p} - \xi}{\frac{2\pi}{p} R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)}.$$

Supposons p suffisamment grand pour que l'on puisse poser $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{p}$. Le numérateur devient $\frac{2\pi}{p}\left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)$ et, après simplification, on trouve que la courbure interne de la sphère est égale au carré de l'inverse du rayon.

Ainsi, sur une sphère, la courbure interne est égale à la courbure totale. L'invariance de la courbure totale lors d'une flexion est bien connue [1]. Une flexion permet de donner la forme sphérique à une petite calotte. Ainsi les deux courbures interne et totale sont toujours égales. En général, on démontre cette propriété en faisant intervenir une condition d'intégrabilité de diverses différentielles totales.

5. On peut reprocher à la démonstration ci-dessus de ne s'appliquer qu'à un secteur circulaire. Cette restriction est de peu d'importance, car toute courbe analytique tracée sur une surface analytique au voisinage d'un point régulier possède des cercles géodésiques osculateurs et nos raisonnements ne font intervenir qu'un secteur d'ouverture infinitésimale.

Enfin, notre démonstration n'est valable que pour les surfaces convexes.

Paul Rossier. — *Sur la construction à la règle des courbes unicursales ayant un unique point multiple.*

Si une courbe unicursale d'ordre n ne possède qu'un unique point multiple, celui-ci est d'ordre $n - 1$. La donnée de ce

[1] Pour une démonstration élémentaire de cette propriété, voir P. Rossier, Sur le théorème de Gauss relatif à la conservation de la courbure intérieure d'une surface lors d'une flexion. *Archives des Sciences*, vol. 3, fasc. 6, 1950, p. 450.