

# Sur la construction à la règle de courbes unicursales ayant un unique point multiple

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **12 (1959)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739054>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

est  $\frac{2\pi}{p} - \xi$ . L'aire du secteur est  $\frac{2\pi}{p} R^2 \left(1 - \cos \frac{R}{r}\right)$ . Pour la courbure totale, il vient

$$K = \frac{\frac{2\pi}{p} - \xi}{\frac{2\pi}{p} R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)} .$$

Supposons  $p$  suffisamment grand pour que l'on puisse poser  $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{p}$ . Le numérateur devient  $\frac{2\pi}{p} \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)$  et, après simplification, on trouve que la courbure interne de la sphère est égale au carré de l'inverse du rayon.

Ainsi, sur une sphère, la courbure interne est égale à la courbure totale. L'invariance de la courbure totale lors d'une flexion est bien connue<sup>1</sup>. Une flexion permet de donner la forme sphérique à une petite calotte. Ainsi les deux courbures interne et totale sont toujours égales. En général, on démontre cette propriété en faisant intervenir une condition d'intégrabilité de diverses différentielles totales.

5. On peut reprocher à la démonstration ci-dessus de ne s'appliquer qu'à un secteur circulaire. Cette restriction est de peu d'importance, car toute courbe analytique tracée sur une surface analytique au voisinage d'un point régulier possède des cercles géodésiques osculateurs et nos raisonnements ne font intervenir qu'un secteur d'ouverture infinitésimale.

Enfin, notre démonstration n'est valable que pour les surfaces convexes.

**Paul Rossier.** — *Sur la construction à la règle des courbes unicursales ayant un unique point multiple.*

Si une courbe unicursale d'ordre  $n$  ne possède qu'un unique point multiple, celui-ci est d'ordre  $n - 1$ . La donnée de ce

<sup>1</sup> Pour une démonstration élémentaire de cette propriété, voir P. ROSSIER, Sur le théorème de Gauss relatif à la conservation de la courbure intérieure d'une surface lors d'une flexion. *Archives des Sciences*, vol. 3, fasc. 6, 1950, p. 450.

point équivaut à celle de  $\frac{n(n-1)}{2}$  points simples. Il suffit de donner en outre  $2n$  points quelconques pour déterminer la courbe.

Introduisons un système de coordonnées projectives ayant son origine au point multiple. Par cette origine, menons une droite d'équation  $y = tx$ . La substitution dans l'équation de la courbe de cette valeur de  $y$  conduit à une équation de degré  $n$  en  $x$  qui a  $n - 1$  racines nulles. Ainsi, l'équation de la courbe est

$$\sum a x^{n-j} y^j = \sum b_j x^{n-1} y^j \quad (0 \leq j \leq n).$$

Les coordonnées de l'unique intersection de la courbe avec la droite ci-dessus, distincte de l'origine, sont

$$x = \frac{\sum b_j t^j}{\sum a_j t^j}, \quad y = \frac{t \sum b_j t^j}{\sum a_j t^j}.$$

Ce sont là les équations paramétriques de la courbe.

Ces équations contiennent  $n + 1$  coefficients  $a_j$  et  $n$  coefficients  $b_j$ , soit au total  $2n + 1$  coefficients homogènes ou  $2n$  coefficients essentiels.

Cherchons la signification du paramètre  $t$ . Pour cela, sur la droite à l'infini du système de coordonnées projectives, construisons une échelle projective ayant le point infini de l'axe des  $x$  comme origine, celui de l'axe des  $y$  comme infini et comme point unité la projection, à partir de l'origine, du point unité du système. Le paramètre  $t$  d'une droite par l'origine est l'abscisse projective, dans cette échelle, de son intersection avec la droite à l'infini du système de coordonnées.

Les échelles des  $t$  et des  $y$  sont perspectives. Leur centre perspectif est l'intersection de l'axe des  $x$  avec la droite passant par les points unités de ces échelles.

Menons la droite par les points unités des échelles des  $x$  et des  $t$  puis déterminons l'intersection de cette droite avec l'axe des  $y$ . La projection à partir de ce point de l'échelle des  $t$  sur l'axe des  $x$  est une nouvelle échelle projective; les points unités se correspondent dans cette projection, mais chaque

point origine correspond au point infini de l'autre échelle. La projection de l'échelle des  $t$  est ainsi liée à l'échelle des  $x$  par la relation d'inversion  $tx = 1$ .

A partir des trois sommets du triangle de coordonnées, projetons les  $2n$  points simples donnés sur les trois côtés de ce triangle; on obtient ainsi les segments qui correspondent aux coordonnées  $x$  et  $y$  de ces points et au paramètre  $t$ . Sur chacun des axes, construisons les segments relatifs aux puissances utiles de  $t$ , c'est-à-dire à celles qui apparaissent dans les équations paramétriques et formons les équations paramétriques relatives à ces points. On obtient ainsi un système de  $2n$  équations linéaires qui déterminent les  $2n$  coefficients essentiels  $a_j$  et  $b_j$ . Ces coefficients connus, les équations paramétriques déterminent le point de la courbe correspondant à une valeur quelconque du paramètre  $t$ .

La détermination des puissances successives de  $t$ , la solution d'un système d'équations linéaires, la construction des fonctions rationnelles donnant  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$  sont des opérations de calcul segmentaire justiciables de la règle. Ainsi est donné le moyen de construire un point quelconque de la courbe considérée.

Pratiquement, ces constructions sont longues et la figure obtenue très touffue, même dans le cas des degrés inférieurs. Elles sont un peu abrégées si l'on choisit des points de la courbe comme points infinis et unité dans le système de coordonnées. Même dans le cas des coniques, la construction précédente est plus longue que celle qui résulte du théorème de Pascal. Cela montre que notre construction ne semble intéressante que par sa généralité.

Le problème traité est plus simple que celui du tracé d'une courbe unicursale donnée par des points simples, même si l'on sait que l'unicursalité est due à l'existence d'un unique point singulier, sans que celui-ci soit donné. Par contre, le tracé d'une courbe unicursale d'équations paramétriques données est facile et revient aux opérations esquissées ci-dessus, postérieures à la solution du système linéaire.