Forme des opérateurs de la mécanique quantique dans les espaces courbes

Autor(en): **Di Fazio, Mauro**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **12 (1959)**

Heft 4

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739084

argiles vertes et rouges marquant la transgression tertiaire inférieure.

Résumé et conclusions.

Les poches décrites à Mornex sont formées de grès marin à Bryozoaires et d'argile résiduelle dans un karst de l'Urgonien. Leur composition n'est pas celle de poches karstiques comblées de sables éocènes sidérolithiques ni de filons clastiques et karstiques barrémiens décrites à Saint-Maurice par R. MURAT. Ce sont des dépôts qui s'apparentent aux grès verts du Petit-Salève et qui leur sont probablement contemporains (Paléocène inférieur), marquant la transgression tertiaire, prélude des dépôts molassiques.

BIBLIOGRAPHIE

GIGNOUX, M., 1944, Phénomènes de karstification et d'injection naturelle d'argiles et de sables dans l'Urgonien des environs de Bellegarde (Ain). *C.R.S.G.F.*, *74*.

GIGNOUX, M. et J. MATHIAN, 1952, Enseignements géologiques du Grand Barrage de Génissiat sur le Rhône (Ain, Haute-Savoie): karstification éocène de l'Urgonien. *Travaux Labor. Géol. Grenoble*, *XXIX*, pp. 121-162.

PARÉJAS, E. et A. CAROZZI, 1953, Une algue marine du genre *Broeckella* dans les grès verts du Petit-Salève (Haute-Savoie). *Arch. Sciences Genève*, vol. 6, fasc. 3, pp. 165-171.

Université de Genève.
Laboratoire de Géologie.

Mauro di Fazio. — *Forme des opérateurs de la mécanique quantique dans les espaces courbes* *.

Nous nous proposons dans cet article d'étendre aux espaces courbes la formulation des opérateurs de la mécanique quantique; c'est-à-dire d'étudier leur aspect quand on introduit une métrique généralisée du type $g\ (q, t)$. Nous supposerons qu'une

* Ce travail a été effectué grâce aux subsides du Fonds national suisse de la Recherche scientifique.

métrique naturelle est définie dans l'espace des q et choisirons la normalisation des $\mid q', t >$ selon la forme:

$$< q'', t \mid q', t > \; = \delta(q'', q', t) \tag{1}$$

où:

$$\int \delta(q'', q', t)\, f(q')\, d_t q' = f(q'') \tag{2}$$

pour une fonction arbitraire $f(q')$; $d_t q'$ est l'élément invariant de volume. Cette notation exprime le fait que la métrique, et donc la normalisation, peut varier avec le temps.

La forme explicite de $d_t q'$ est:

$$d_t q' = g^{\frac{1}{2}}(q', t)\, dq'^1 \ldots dq'^n \tag{3}$$

où $g(q', t)$ est le déterminant du tenseur métrique.

Cette formulation a déjà été utilisée par DeWitt [1] afin d'étendre la théorie dynamique aux espaces courbes. Nous reprendrons le sujet, cherchant à montrer que les opérateurs de la mécanique quantique peuvent être mis sous une forme particulièrement intéressante, en analogie avec la forme de dérivation tensorielle.

Par ailleurs, nous avons:

$$\delta(q'', q', t) = g^{-\frac{1}{2}}(q'', t)\, \delta(q'' - q') = \tag{4. A}$$

$$= g^{-\frac{1}{2}}(q', t)\, \delta(q'' - q') \tag{4. B}$$

$\delta(q'' - q')$ étant la fonction ordinaire à n dimensions. De (4) nous avons:

$$(q''^i - q'^i)\, \delta(q'', q', t) = 0 \tag{5}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial q''^i} \delta(q'', q', t) = - \frac{\partial}{\partial q'^i} \delta(q'', q', t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q'^i} [\mathrm{L}ng\,(q', t)]\, \delta(q'', q', t)\,. \tag{6}$$

En tenant compte de (5) nous aurons enfin:

$$(q''^i - q'^i) \frac{\partial}{\partial q''^j} \delta(q'', q', t) = - (q''^i - q'^i) \frac{\partial}{\partial q'^j} \delta(q'', q', t) = - \delta^i_j\, \delta(q'', q', t) \tag{7}$$ [1]

[1] δ^i_j est le tenseur de Kronecker.

ou l'élément de matrice de l'opérateur q^i:

$$< q'', t \mid q^i \mid q', t > \; = q'^i \, \delta (q'', q', t) - q''^i \, \delta (q'', q', t) \, . \qquad (8)$$

Si nous prenons l'élément de matrice de

$$[q^i, p_j] = i \hbar \, \delta^i_j$$

nous avons:

$$i \hbar \, \delta^i_j \, \delta (q'', q', t) = (q''^i - q'^i) < q'', t \mid p_i \mid q', t > \qquad (9)$$

et pour (5) et (7)

$$< q'', t \mid p_j \mid q', t > \; = - i \hbar \frac{\partial}{\partial q''^j} \delta (q'', q', t) + \\ + \mathrm{F}_j (q'', t) \, \delta (q'', q', t) \qquad (10)$$

où les F (q'', t) sont des fonctions de q^i et t. L'addition de cette fonction est justifiée par (5).

Une autre forme de (10) est:

$$< q'', t \mid p_j \mid q', t > \; = \\ = g^{-\frac{1}{2}} (q'', t) \left[- i \hbar \frac{\partial}{\partial q''^i} + \mathrm{G}_j (q'', t) \right] \delta (q'' - q') = \qquad (11. \mathrm{A})$$

$$= g^{-\frac{1}{2}} (q'', t) \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial q'^i} + \mathrm{G}_j (q', t) \right] \delta (q'' - q') \qquad (11. \mathrm{B})$$

avec

$$\mathrm{G}_j = \mathrm{F}_j + \frac{1}{2} i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \mathrm{L} n g \right) . \qquad (12)$$

Une restriction finale sur F est imposée par la condition hermitienne sur p; et par les relations de commutation. En prenant l'élément de matrice

$$[p_i, p_j] = 0$$

et en utilisant (11) nous avons:

$$0 = \int (< q'', t \mid p_i \mid q''', t >< q''', t \mid p_j \mid q', t > - \\ - < q'', t \mid p_j \mid q''', t >< q''', t \mid p_i \mid q', t >) \, d_t q''' = \\ = - i \hbar \left[\frac{\partial}{\partial q''^i} \mathrm{F}_j (q'', t) - \frac{\partial}{\partial q''^j} \mathrm{F}_i (q'', t) \right] \delta (q'', q', t) \qquad (13)$$

donc:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \tag{13}$$

pour une certaine fonction F de q^i et t.

Nous devons avoir:

$$< q'', t \mid p_i \mid q', t >^* = < q', t \mid p_i \mid q'', t > . \tag{14}$$

En introduisant (10) dans (14) et en utilisant (6) nous obtenons la condition

$$F^+ = F + \frac{1}{2} i \hbar \, \mathrm{L}ng . \tag{15}$$

La condition (15) nous dit que F a la forme:

$$F = -\Phi - \frac{1}{4} i \hbar \, \mathrm{L}ng \tag{16}$$

où Φ est une certaine fonction réelle des q et de t.

L'élément de matrice (1) peut être lié à la transformation unitaire de phase:

$$\overline{p_i} = e^{-(i/\hbar)\Phi} \, p_i \, e^{(i/\hbar)\Phi} = p_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} \tag{17}$$

ou en définissant les vecteurs de base selon:

$$\mid \overline{q', t} > = e^{(i/\hbar)\Phi} \mid q', t > \tag{18}$$

considérons l'élément de matrice des p_i:

$$< \overline{q'', t} \mid \overline{p_i} \mid \overline{q', t} > = -i\hbar < q'', t \mid \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial q^i} [\mathrm{L}ng\,(q, t)] \mid q', t > \tag{19}$$

et enfin:

$$< \overline{q'', t} \mid \overline{p_i} \mid q', t > = - = -i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial q''^i} + \left[\frac{\partial}{\partial q''^i} \mathrm{L}ng\,(q'', t) \right] \right\} \delta\,(q'', q', t) . \tag{20}$$

La transformation (19) change seulement la phase du vecteur q', t; mais cette phase est arbitraire et alors nous pouvons écrire l'élément de matrice de p_i sous la forme:

$$< q'', t \mid p_i \mid q', t > = -$$

$$= - i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial q''^i} + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial q''^i} \operatorname{L}ng\,(q'', t) \right] \delta\,(q'', q', t) \right. . \quad (21)$$

Considérons, maintenant, les représentations suivantes:

$$\Psi\,(q', t) = < q', t \mid \Psi > \quad (22)$$

pour un état arbitraire $\mid \Psi >$. Pour un opérateur $F\,(t)$ nous aurons:

$$F_{q'}\,(t')\,\Psi\,(q', t) = < q', t' \mid F\,(t') \mid \Psi > \quad (23)$$

et en particulier:

$$q^i_{q'} = q'^i$$

$$p_{iq'} = - i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial q'^i} + \frac{1}{4}\,(\operatorname{L}ng'),\,i \right] . \quad (24)$$

Par une transformation ponctuelle, le déterminant du tenseur métrique se transforme selon:

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|^2 g \quad (25)$$

où $\left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|$ représente le jacobien de q par rapport à $\bar{q}$.

Nous aurions, enfin, pour $(\overline{\operatorname{L}ng})_{,i}$

$$\frac{1}{2}\,(\operatorname{L}\overline{ng})_{,i} = \left(\frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \right)_{,j} + \begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \quad (26)$$

où le $\begin{Bmatrix} i \\ ji \end{Bmatrix}$ dénote le symbole de Christoffel de second ordre.

D'autre part, en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{q}}$ à n'importe quel opérateur $\bar{A}$ (lorsque celui-ci se transforme selon $A = A \left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|$) et en prenant une moyenne symétrisée, nous aurons:

$$- i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} \bar{A} = \frac{1}{2} \overline{\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix}} \bar{A} \right] = - \frac{1}{2} - i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} A^i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^i} A^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} A^i \right] = \left(p_i\,, \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \right) A^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} \,.$$

Nous pouvons, alors, décrire la loi de transformation pour les moments:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{2}\left(p_i \, , \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j}\right) \tag{27}$$

où la notation ( ) représente l'anticommutateur. Grâce à (27), le caractère hermitien est conservé.

Maintenant, une transformation ponctuelle infinitésimale est donnée par la formule suivante:

$$U_1 = 1 - \frac{1}{2}\, i\hbar^{-1}\,(p_i \, , \delta q^i) \tag{28}$$

et si δq^i, $\delta' q^k$ sont deux systèmes de différentielles, nous aurons pour un opérateur U_2

$$U_2 = 1 - \frac{1}{2}\, i\hbar^{-1}\,(p_k \, , \delta q^k) \tag{29}$$

La différence $d\,U_1 - d\,U_2$ nous donne:

$$d\,U_1 - d\,U_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left\{{j \atop ji}\right\}}{\partial q^k} - \frac{\partial\left\{{j \atop jk}\right\}}{\partial q^i} + \left\{{j \atop ji}\right\}\left\{{i \atop ik}\right\} - \left\{{j \atop jk}\right\}\left\{{k \atop ki}\right\}\right]\delta q^i \, \delta' q^k =$$

$$= \frac{1}{2}\, R^j_{\cdot jki}\, \delta q^i \, \delta' q^k \tag{30}$$

où $R^j_{\cdot jki}$ est le tenseur de Riemann.

Mais $R^j_{\cdot jki}$ ayant deux indices antisymétriques égaux, s'annule. On peut introduire une métrique généralisée dans laquelle nous pouvons poser:

$$g_{ik} = g_{\underline{ik}} + g_{\underset{\vee}{ik}} \tag{31}$$

c'est-à-dire décomposer le tenseur g_{ik} en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Dans ce cas, nous aurons:

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{\underline{ik}} + \Gamma^l_{\underset{\vee}{ik}} \tag{32}$$

où Γ^l_{ik}, dans le cas d'un champ symétrique est, comme $\left\{{l \atop ik}\right\}$, le symbole de Christoffel de second ordre.

Nous avons, au moyen de (28) et (29)

$$\bar{p}_i = U p_i \, U^{-1} = p_i + \frac{1}{2}\,(p_j \, , \delta q^j_i) \tag{33}$$

Si nous appelons Δp_i la différence $\bar{p}_i - p_i$, nous aurons:

$$\Delta p_i = \frac{1}{2} \underset{\vee}{\mathrm{R}}{}^{j}{}_{\cdot jki}\, \delta q^i\, \delta' q^k \tag{34}$$

où $\underset{\vee}{\mathrm{R}}{}^{j}{}_{\cdot jki}$ est le tenseur de Riemann composé par les $\underset{\vee}{g_{ik}}$.

(La suite de cet article paraîtra ultérieurement.)

BIBLIOGRAPHIE

1. B. DE WITT. *Rev. Mod. Phys.*, *29* (1957), p. 386 et suivantes.

Laboratoire de Recherches nucléaires
Institut de Physique, Genève

Paul Rossier. — *Sur les faisceaux tangentiels coplanaires de paraboles.*

En coordonnées tangentielles, l'équation d'une parabole est de la forme

$$1) \quad \mathrm{P} \equiv au^2 + buv + cv^2 + duw + evw = 0\ .$$

La droite impropre du plan est caractérisée par $u = 0$ et $v = 0$.

L'équation (1) contient cinq coefficients homogènes. Soient $\mathrm{P}_j = 0$ les équations de cinq paraboles indépendantes et invariables. Le premier membre de l'équation (1) peut être obtenu par une combinaison linéaire et homogène des cinq premiers membres des équations $\mathrm{P}_j = 0$:

$$\mathrm{P} \equiv \Sigma\, \lambda_j\, \mathrm{P}_j = 0\ .$$

Prenons les cinq coefficients λ_j comme coordonnées homogènes d'un point de l'espace quadridimensionnel. Ainsi est établie une correspondance biunivoque entre les points de cet hyperespace et les paraboles du plan, et aux propriétés des uns correspondent des propriétés corrélatives des autres. Par uns exemple, un faisceau de paraboles est représenté par les points