

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Band:** 13 (1960)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Le conflit des anciens et des modernes en géométrie  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-738500>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LE CONFLIT DES ANCIENS ET DES MODERNES EN GÉOMÉTRIE <sup>1</sup>

PAR

**Paul ROSSIER**

---

La géométrie, cette science si sûre, si parfaite, parler de conflit à son sujet; n'est-ce pas là une mauvaise plaisanterie ? En matière de raison et de logique, ce qui était vrai pour les Anciens l'est encore pour les Modernes; peut-il donc y avoir conflit entre deux groupes de penseurs séparés dans le temps et l'espace ? Telles sont peut-être quelques-unes des premières réactions que provoque notre titre. En science, tout jugement doit être précédé d'une étude sérieuse du problème envisagé. Procédons à cet examen.

Le sens du mot géométrie est lié à son origine étymologique: mesure de la Terre; la géométrie est la science qui a pour objet l'étude de l'espace, des figures, c'est-à-dire des propriétés communes à divers corps, abstraction faite des qualités mécaniques, physiques, chimiques ou biologiques. La notion de corps solide conduit à celle d'égalité des figures. Partant des corps offerts à son observation, le géomètre ancien distingue les volumes, les surfaces, les lignes et les points; il en fait l'objet de sa science. Actuellement le maître d'école primaire procède de la même façon.

On sait la fortune du mot de Pascal opposant l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse et montrant la stérilité du premier s'il n'est pas inspiré par le second <sup>2</sup>. Pascal voulait-il dire cette banalité que l'étude du rectangle ou du cercle est stérile dans la recherche des qualités de la pensée ? Certainement pas; sous sa plume, le mot géométrie signifie alors la logique rigoureuse dont il dit lui-même que la géométrie

<sup>1</sup> Conférence présentée à la séance du 5 mai 1960.

<sup>2</sup> B. PASCAL, *Pensées diverses de philosophie et de littérature*, article X, pensée II.

offre le plus bel exemple. Entre ces deux extrêmes, étude des corps de notre espace et celle de la logique, il y a place pour de nombreuses acceptions du terme géométrie. Proposons-nous de jeter un coup d'œil sur l'évolution des idées attachées à ce mot.

Les historiens sont mal renseignés sur l'origine et la découverte des premières propriétés géométriques. Cela est naturel; un chasseur habile a une connaissance intuitive des relations spatiales dont ne dispose pas un concurrent moins exercé. Pour que nous en ayons connaissance, ces notions intuitives doivent tout d'abord être exprimées. L'homme de science primitif est donc une sorte d'artiste qui sait dire et communiquer ce qu'il sait. Pour que cet enseignement nous parvienne, il est nécessaire qu'il soit rédigé et enfin que cette rédaction soit conservée pendant des siècles. Parfois, une institution ou un homme écrit un traité consacré à une discipline. Dans l'antiquité, trois encyclopédistes émergent: Aristote (— 384 à — 322) pour les sciences physiques et naturelles, Euclide (— 3<sup>e</sup> siècle) en mathématiques, et Ptolémée (— 2<sup>e</sup> siècle) pour ce qui concerne l'astronomie et la géographie. Pendant quelques instants, portons notre attention sur le second. Les « Eléments d'Euclide » sont l'une des plus belles créations de l'esprit humain. Les textes religieux mis à part, aucun ouvrage n'a et n'a eu une autorité aussi durable et n'a été édité, traduit, plagié et imité autant qu'eux. Euclide, « le plus grand professeur de mathématiques du monde »<sup>1</sup>, a un tel prestige que certains auteurs anglo-saxons en sont venus à intituler « Euclid » des ouvrages de géométrie.

L'œuvre essentielle d'Euclide a été de choisir une méthode, de l'appliquer sans défaillance et surtout d'établir un ordre des propositions si bien adapté à la nature des choses que les efforts faits par d'autres depuis plus de vingt siècles n'y ont rien changé d'essentiel.

Euclide tente de construire une discipline rationnelle en partant de trois types de propositions: Les *axiomes* expriment des propriétés générales pas spécifiquement géométriques; par exemple, « le tout est plus grand que la partie ». Les *définitions* décrivent les figures géométriques sur lesquelles porteront les études ultérieures. Les *postulats*, enfin, explicitent des propriétés déduites de l'observation immédiate. Sauf un, relatif au parallélisme, les postulats d'Euclide sont si évi-

<sup>1</sup> P. SERGESCU, *Coup d'œil sur les origines de la science exacte moderne*, p. 136.

dents qu'il ne paraît guère possible de penser que le monde puisse être différent de ce qu'ils expriment. Parmi les axiomes, figurent les propriétés de l'égalité des figures. Euclide fait un emploi constant de cette relation entre deux figures. Sa méthode géométrique est la recherche systématique de paires de figures égales et c'est ainsi qu'il parvient à démontrer tous les théorèmes fondamentaux de la géométrie dite élémentaire.

Parmi les Anciens, Archimède (— 287 à — 212) et Apollonius (— 2<sup>e</sup> siècle) perfectionnent l'œuvre d'Euclide; le premier étudie les coniques tandis que le second applique les méthodes infinitésimales à la géométrie. Malgré leur génie, les successeurs d'Euclide n'ont rien changé à la méthode: l'égalité des figures conduit au théorème de la similitude et celle-ci est en quelque sorte le « sésame, ouvre-toi » des problèmes géométriques.

C'est près de deux millénaires qu'il faut attendre avant de voir apparaître un progrès essentiel dans la science de l'espace.

A la Renaissance, apparaissent simultanément deux géomètres de génie, Desargues et Descartes.

Desargues a vécu de 1591 à 1662<sup>1</sup>; c'est un architecte; il découvre que la perspective constitue un moyen de perfectionner la géométrie, car aux propriétés d'une figure correspondent des théorèmes relatifs à la perspective de cette figure; en particulier, puisque la perspective d'un cercle est une conique, la théorie des coniques est une extension de celle du cercle. Cette remarque peut paraître banale et elle a dû être faite avant Desargues par bien des dessinateurs. C'est le propre des hommes de talent de s'emparer d'une idée simple et de montrer combien elle est féconde. Desargues était un géomètre de génie. Aussi construit-il toute une géométrie nouvelle que nous appelons projective car la perspective est une application des projections. Il rédige divers ouvrages, notamment le *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*. Il publie son ouvrage en 1539 à cinquante exemplaires et le distribue à quelques amis. Le langage et surtout le vocabulaire de Desargues s'écartent beaucoup de ceux de ses prédécesseurs. Peu de lecteurs se donnent la peine de lire attentivement le *Brouillon projet*. Quelques-uns cependant y découvrent

<sup>1</sup> Desargues n'est pas né en 1593 comme on le dit souvent, mais bien en 1591.

un monde nouveau dont ils pressentent l'importance; deux d'entre eux sont illustres: Fermat (1601-1665) et Pascal (1623-1662).

Desargues a aussi rédigé un traité de perspective. Des jalousies d'éditeurs suscitent en partie de violentes attaques contre les ouvrages de Desargues. Le fait est que le *Brouillon projet* disparaît de la scène. En 1679, La Hire (1640-1718) en a un exemplaire entre les mains. Intéressé par la théorie des coniques, il le copie et s'en inspire dans la rédaction de son *Traité sur les coniques*. Au XIX<sup>e</sup> siècle, Chasles découvre chez un bouquiniste la copie de La Hire, copie qui sert de base à l'édition de 1864 des œuvres de Desargues par Poudra. Enfin en 1951, M. Taton, après avoir alerté toutes les grandes bibliothèques, met la main sur l'unique exemplaire du *Brouillon projet* actuellement connu; il était déposé à la Bibliothèque nationale de Paris et masqué dans un volume factice composé d'un lot de brochures. Les géomètres disposent actuellement d'une excellente édition du *Brouillon projet* due à M. Taton. Que contient cet ouvrage? Il introduit les notions fondamentales de la géométrie projective que sont la ponctuelle et les faisceaux; il étudie les correspondances entre ces éléments suggérées par la perspective, l'involution<sup>1</sup> notamment; il montre deux théorèmes fondamentaux qui tous deux portent son nom; l'un concerne les paires de triangles dont l'un est la perspective de l'autre: les côtés homologues se coupent en trois points alignés; l'autre affirme que l'ensemble des coniques qui passent par quatre points coupent une droite quelconque en des paires de points liés par une involution.

Desargues n'a pas pu se rendre compte de l'importance de ces découvertes. Le théorème des triangles perspectifs joue un rôle fondamental dans l'élaboration logique de la géométrie moderne; le second contient virtuellement toute la théorie des groupes harmoniques et celle des coniques.

Desargues innove encore sur un autre sujet: il pose que deux droites parallèles se coupent en un point infiniment éloigné. La perspective de ce point est le point de fuite de la perspective de ces droites. Désormais les démonstrations faites sur un ensemble de droite concourantes sont encore valables pour les droites parallèles; le parallélisme devient un cas particulier d'intersection.

<sup>1</sup> Comme la symétrie, l'involution est une correspondance entre figures qui, appliquée deux fois de suite conduit à la figure originale.

Ainsi Desargues crée un lien entre des paires de théorèmes analogues et contribue à l'ordonnance de l'édifice géométrique.

La définition donnée par Euclide du parallélisme est négative : droites coplanaires ne se recoupant pas. Celle de Desargues est affirmative : droites se coupant en un point infiniment éloigné.

Par ce qui précède, Desargues introduit l'infini en géométrie. Cet infini est actuel ou catégorique, comme disent certains philosophes ; il ne résulte pas d'un passage à la limite, ainsi que celui de l'analyse. Ce dernier infini est toujours en devenir ; on le dit parfois syncatégorique. Ce qui précède montre combien le génie de Desargues s'écarte de celui d'Euclide. Il est un novateur qui n'hésite pas à rompre avec une tradition ayant l'autorité attachée aux *Eléments* et à rompre avec l'autorité des Anciens. Au xvii<sup>e</sup> siècle on sait l'importance d'une telle démarche.

Desargues fut en relation avec les savants de son temps et il eut un disciple illustre : Pascal (1623 à 1662) ; l'*Essay pour les coniques* que le jeune Blaise publia en 1640 est directement inspiré de l'œuvre de Desargues ; on y trouve le théorème sur les coniques qui porte le nom de l'auteur. Le jeune géomètre persévéra dans cette voie et rédigea un traité sur les coniques, ouvrage malheureusement perdu et qui n'est connu que par quelques notes dues à Leibniz (1646 à 1716) ; celui-ci eut le manuscrit en main en 1675, soit longtemps après la mort de Pascal.

Portons notre attention sur les dates précédentes : le *Brouillon projet* est de 1639 ; l'*Essay pour les coniques* de 1640. Or, en 1637, Descartes (1596-1650) publiait son *Discours de la méthode* suivi de la *Dioptrique*, des *Météores* et de la *Géométrie*. Le *Discours* a eu la fortune que l'on sait. La *Géométrie*, elle aussi, est une œuvre de premier ordre. On dit souvent qu'elle constitue la première géométrie analytique qui ait été écrite. La géométrie des Descartes n'est pas un traité où est exposée la matière des cours de géométrie analytique du baccalauréat : l'application systématique de la méthode des coordonnées et des procédés du calcul à l'étude des propriétés géométriques. Descartes établit bien une relation entre les propriétés géométriques des figures et celles des relations algébriques, relation qui est fondamentale en géométrie analytique ; il ne voit pas dans son œuvre une doctrine nouvelle, mais bien un moyen permettant d'étendre le champ de la science. Il l'applique notamment à diverses classes de courbes d'ordres trois et quatre.

Descartes, formé aux disciplines classiques, est un écrivain en quelque sorte professionnel. Son œuvre est étendue; son système des tourbillons est rapidement admis par les savants français et sera opposé aux doctrines newtoniennes; il collabore au perfectionnement de la physique. En fait, sa géométrie éclipsa celle de Desargues, homme d'une culture moins vaste et dont le style n'est pas devenu un modèle du genre. En outre, la géométrie de Descartes est contemporaine de la théorie des Indivisibles de Cavalieri (1635) où apparaît une première forme de calcul intégral. L'algèbre, la géométrie analytique et le calcul de l'infini sont des disciplines plus voisines les unes des autres qu'elles ne le sont de la géométrie de Desargues. Aussi dès Descartes, la géométrie nouvelle est analytique.

La fortune de cette géométrie fut immense. Au XVII<sup>e</sup> et au XVIII<sup>e</sup> siècles on voit presque tous les géomètres se consacrer à l'extension et au perfectionnement des méthodes analytiques. Celles-ci ont permis l'élaboration d'une mécanique dont les succès sont grands en astronomie.

On voit cependant quelques hommes s'intéresser à la géométrie des anciens. Des professeurs publient encore des éléments selon Euclide destinés surtout à l'enseignement; ils n'apportent rien de bien neuf. La Hire s'inspire de Desargues dans l'élaboration de son grand ouvrage sur les coniques. Leibniz, à côté de ses multiples occupations, essaie sans succès d'obtenir communication du *Brouillon projet*. La géométrie synthétique semble bien définitivement éclipsée par celle de Descartes.

Plus tard, au XIX<sup>e</sup> siècle, quand les mathématiciens se préoccupèrent activement du problème philosophico-scientifique des fondements de leur discipline, la fusion qu'opérait la géométrie de Descartes entre l'analyse et la géométrie ramenait toute la question à l'étude des bases de l'analyse: au moyen des coordonnées, tout problème géométrique ne se ramenait-il pas à une question d'analyse? Soucieux d'uniformité, les mathématiciens ne se posaient guère de questions sur la nature de ces coordonnées, sur les axiomes nécessaires à leur détermination et les méthodes servant à leur construction. La mise en veilleuse de la géométrie pure dura jusqu'à la Révolution. Les soubresauts de l'époque mirent aux responsabilités un homme nouveau: Gaspard Monge (1746-1818) qui, par la puissance de son intuition, créa à cette époque la géométrie descriptive. On trouve des

applications anciennes de la méthode des projections élaborée par Monge dans l'œuvre de Dürer, par exemple. La géométrie descriptive de Monge est une étude méthodique de ces procédés et de ses applications. Mais Monge ne borna pas à cela son œuvre. Sa personnalité puissante créa à Paris une véritable école qui suscita la vocation d'un nombre considérable d'élèves de valeur. Hachette (1769 à 1834), son successeur à l'École polytechnique, Brianchon (1785 à 1864), Poncelet (1788 à 1867), Dupin (1784 à 1873), Gergonne (1771 à 1859) sont en France les plus remarquables d'entre eux. Outre-Rhin, l'école de Monge eut aussi un écho. Moebius (1790 à 1868), von Staudt (1798 à 1867), Plücker (1801 à 1868) sont parmi les plus éminents des géomètres de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle.

Le destin de Poncelet nous intéresse particulièrement. Fait prisonnier par les Russes en 1812 lors du passage du Dniepr, il est interné à Saratov. Il consacre ses loisirs à méditer les cours de Monge dont il a été l'élève à l'École polytechnique et s'efforce de rétablir les propriétés géométriques sans s'appuyer sur les méthodes analytiques; il renoue avec les méthodes arguésiennes, pratiquement abandonnées depuis Pascal. En 1822, Poncelet publie son *Traité des propriétés projectives des figures* qui, comme le *Brouillon projet* de Desargues fait un emploi systématique de la perspective sous la forme d'une transformation plane, l'homologie. Poncelet dépasse Desargues sur un point: il introduit en géométrie l'emploi de l'imaginaire. La théorie des équations avait habitué les mathématiciens à la considération des points dits imaginaires, points dont les coordonnées sont des nombres complexes. Pour cela, Poncelet se base sur un « principe de continuité » qui revenait à affirmer qu'une démonstration effectuée sur une figure est encore valable si certaines conditions non essentielles ne sont pas satisfaites. Par exemple, une non-sécante coupe un cercle en une paire de points imaginaires et ceux-ci déterminent un segment dont le milieu est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre.

Le principe de continuité de Poncelet déchargeait la géométrie de l'obligation d'étudier successivement les divers cas de figure comme le faisaient les Anciens. Il y a là une nouvelle possibilité de coordination des propositions géométriques. Ce procédé valut à Poncelet de vives attaques de Cauchy. Ces disputes reposaient sur un malentendu. Le principe de Poncelet est valable lorsque la représentation analy-



tique des figures envisagées ne fait appel qu'aux opérations de l'algèbre, à l'exclusion de l'emploi de fonctions transcendentes et, Poncelet n'étudiait que des figures algébriques. Cauchy, au contraire, montrait que l'emploi de ce principe n'était pas justifié dans l'étude des figures transcendentes.

Le traité de Poncelet n'apportait pas seulement un exposé nouveau de propriétés connues, mais aussi quelques théorèmes neufs. Malgré le succès de son œuvre, Poncelet consacra la fin de sa vie à la mécanique industrielle.

Le flambeau de la géométrie fut repris par Michel Chasles (1793-1880). Chasles eut une très grande activité. Son premier succès est de voir couronner par l'Académie de Bruxelles son *Aperçu historique sur les méthodes et le développement de la géométrie*; en même temps, il publie un important mémoire sur les figures projectives, mémoire qui peut en quelque sorte être considéré comme le développement du *Traité* de Poncelet. En 1846 est ouverte à la Sorbonne une chaire de Géométrie destinée à Chasles.

La méthode employée par Poncelet, Chasles et les géomètres de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle est mixte; ils s'appuient sur les théorèmes et les méthodes des Anciens pour démontrer des propriétés très générales; ils constatent ensuite que les théorèmes qu'ils ont utilisés sont des cas particuliers de propositions plus générales qu'ils ont démontrées. Il n'y a rien là de choquant, semble-t-il; mais ces propriétés générales appartenaient à la géométrie projective, plus vaste que la géométrie des Anciens et qui surtout renonce à l'emploi de l'égalité des figures pour remplacer cette relation par des correspondances projectives inspirées par la perspective. Autrement dit, la géométrie de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle pêche par un manque d'élégance; ses bases axiomatiques sont plus étendues qu'il n'est nécessaire; un échafaudage qui n'a rien d'essentiel, mais qui a été utile à l'élaboration de la science ancienne subsiste dans l'œuvre définitive et la dépare; il y avait nécessité de reprendre la construction de la géométrie à pied d'œuvre et de l'élaborer à nouveau en s'appuyant exclusivement sur des propriétés projectives, en écartant tout recours aux méthodes euclidiennes de l'égalité des figures. Cette œuvre est bien dans l'esprit moderne de critique approfondie des bases de la science. Von Staudt se consacra à l'élaboration de cette géométrie strictement projective; en 1847, il publie sa *Geometrie der*

*Lage* dans laquelle, se basant sur des propriétés des quadrangles et des quadrilatères déjà remarquées par Desargues, il établit les propriétés générales et fondamentales de la géométrie.

Si la géométrie projective moderne apparaît chez Desargues et n'est qu'un feu de paille, si elle renaît avec Poncelet, c'est von Staudt qui en donne le premier exposé totalement indépendant de tout procédé non projectif. La *Geometrie der Lage* de 1847 ne concernait que les figures réelles; en 1856, il y a à peine plus d'un siècle, von Staudt publiait des *Beiträge zur Geometrie der Lage* où est exposée une théorie purement géométrique, habile et subtile, des figures imaginaires. Dès lors la géométrie synthétique a conquis son indépendance totale; elle n'exige plus le recours aux méthodes analytiques et aux procédés euclidiens. La géométrie avait-elle acquis ainsi son statut définitif? Le prétendre serait oublier l'importance de l'œuvre critique des mathématiciens de la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle et les perfectionnements apportés à la science durant cette période.

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, deux mathématiciens éminents, Hilbert (1862 à 1943) et Henriques (1871 à 1946), portèrent leur attention sur les bases de la science. Dans ses *Grundlagen der Geometrie* publiés en 1896, le premier fait une analyse des types d'axiomes nécessaires à l'élaboration de la géométrie; il classe ceux-ci en cinq groupes: l'appartenance, l'ordre, la congruence, le parallélisme et la continuité.

Les axiomes de l'*appartenance* expriment des faits de l'observation élémentaire tels que les suivants: deux points déterminent une droite et trois points non alignés, un plan. Hilbert énonce huit axiomes d'appartenance.

L'*ordre* est une relation entre des points d'une droite ou du plan: De trois points alignés l'un est entre les deux autres. Dans les *Grundlagen* il figure quatre axiomes d'ordre.

La *congruence* ne fait qu'explicitement les relations d'égalité employées par Euclide. Les axiomes de congruence sont au nombre de cinq.

L'axiome de *parallélisme* pose que dans un plan, par un point, il passe une unique droite qui ne coupe pas une droite donnée de ce plan.

Enfin, Hilbert reconnaît deux axiomes de continuité. L'un affirme que sur une droite, en reportant un segment donné par application de la congruence, on finit par dépasser tout point de cette droite. A cet axiome, Hilbert ajoute un dernier énoncé dit d'*intégrité*: il interdit

d'adjoindre des notions nouvelles aux trois notions fondamentales de point, droite et plan.

Au moyen de ces vingt axiomes, Hilbert reconstruit toute la géométrie classique ancienne.

L'œuvre de Hilbert est dans la ligne d'Euclide mais pas dans celle de Desargues. Aussi, tout en reconnaissant la valeur et l'importance décisives des *Grundlagen*, les géomètres d'il y a quelque soixante ans n'étaient-ils pas entièrement satisfaits; un problème subsistait: expliciter l'axiomatique de la géométrie projective. Poncelet et von Staudt avaient montré la non-nécessité de la notion de congruence des figures; von Staudt faisait usage de la continuité sous une forme mal explicitée et pas toujours satisfaisante aux yeux des critiques modernes; or, dans l'exposé de Hilbert, la continuité repose sur la congruence des figures. L'œuvre était à reprendre en donnant une forme nouvelle à l'axiome de continuité et en ne la basant que sur les relations d'incidence et d'ordre.

Faisons une brève incursion dans l'histoire des principes de l'analyse. Dedekind, préparant le cours d'analyse à l'Ecole polytechnique de Zurich, constate la fragilité de la théorie analytique du continu et publie en 1872 son axiome de la coupure, base de l'analyse moderne. Cet axiome fait usage d'une série d'inégalités emboîtées. Une vingtaine d'années plus tard, Enriques remarque que les inégalités entre nombres sont liées à la notion d'ordre, que celle-ci est essentielle à la géométrie projective; il est ainsi conduit à introduire un énoncé de l'axiome de la continuité, inspiré de l'axiome de la coupure de Dedekind, qui ne repose pas sur la notion de congruence mais bien sur celle d'ordre. Dès 1894, Enriques enseigne ses conceptions nouvelles et les publie en 1902 dans ses *Lezioni di Geometria proiettiva*. Suivant les axiomes d'appartenance et d'ordre, la nouvelle forme de l'axiome de continuité établit désormais une construction axiomatique sûre de la géométrie projective; elle permet d'en donner une définition précise et simple: l'ensemble des propositions géométriques qui reposent sur les trois notions d'appartenance, d'ordre et de continuité.

Les idées actuelles sur la continuité permettent encore d'aller plus loin; les méthodes projectives donnent le moyen de construire des systèmes de coordonnées en ne faisant aucun appel aux propriétés métriques; par les mêmes procédés, on montre la validité des propositions fondamentales de la géométrie analytique: les équations des droites et des plans sont linéaires.

Grâce à la forme actuelle de l'axiomatique de la géométrie, une proposition fondamentale de la géométrie analytique, la correspondance biunivoque entre les nombres réels et les points d'un axe devient un théorème. Ainsi, la géométrie analytique prend le caractère de vaste corollaire de la géométrie projective. Il n'y a plus opposition entre les deux géométries mais simplement existence de deux méthodes pour l'étude des propriétés de l'espace. Dans l'une, la géométrie pure ou synthétique, la réflexion porte directement sur la figure étudiée. Dans l'autre, la géométrie analytique, le mathématicien passe de la figure à son image analytique; il opère sur celle-ci par les procédés de l'analyse et enfin traduit en langage géométrique les résultats de ces opérations analytiques; malgré la double opération de traduction, il arrive que l'étude analytique d'une question soit plus expéditive que sa solution par les méthodes de la géométrie pure; on observe souvent le contraire. Ainsi, l'analyse axiomatique des bases de la science a conduit à la conclusion de la vanité de l'opposition des deux types de géométries. En ce domaine comme en d'autres, il est des méthodes diverses et quelle que soit leur importance, les méthodes ne sont pas l'essentiel des phénomènes étudiés par la science.

Il n'est pas possible, sans un appel à la technique des géomètres, d'exposer comment Laguerre (1834 à 1886), Cayley (1821 à 1895), Klein (1849 à 1925) et Poincaré (1854 à 1912) ont, durant la seconde moitié du siècle passé, donné au problème si passionnant des géométries non euclidiennes une forme projective et ont ainsi fait taire les scrupules de validité qu'avaient fait naître les travaux des créateurs de cette branche de la géométrie.

Un autre domaine exploré par les géomètres modernes est celui des transformations géométriques. Les Anciens ne connaissaient que l'égalité et la similitude des figures. Desargues introduit les relations projectives; celles-ci sont biunivoques, c'est-à-dire qu'à un point elles font correspondre un point unique et cela sans aucune exception. Dès 1863, Cremona (1830-1903) abordait avec succès l'étude d'une classe beaucoup plus générale de transformations, dites birationnelles, la seule extension faite était de laisser tomber l'inexistence des exceptions. Tout d'abord Cremona a limité son ambition au plan, et l'étude de ce cas est actuellement très avancée. Par contre, l'extension des théories précédentes à l'espace attend encore l'homme de génie qui réussira à fusionner en un tout coordonné l'ensemble des

nombreux théorèmes particuliers actuellement connus en ces matières.

D'autres géomètres, Chasles en tête, entreprenaient l'étude des transformations multivoques<sup>1</sup> et trouvaient ainsi des méthodes permettant d'attaquer des problèmes dont l'étude analytique conduisait à des calculs inextricables. Donnons un exemple. Dans le plan, supposons données deux coniques; menons un cercle variable qui leur soit tangent à toutes deux; le lieu du centre de ce cercle est une courbe d'ordre 28; l'équation générale d'une telle courbe comporte plus de 400 termes!

La géométrie projective est-elle ainsi la science de l'espace la plus générale qu'aient élaborée les géomètres? Il n'en est rien; les contemporains ont encore étendu ce domaine dans deux directions. Dans l'introduction à ses *Grundlagen*, Hilbert montre que les notions géométriques fondamentales sont au nombre de trois: point, droite et plan; dans ses axiomes de l'appartenance, ce fait est explicité par deux énoncés: si deux plans ont un point commun ils en ont au moins deux; et hors d'un plan, il existe au moins un point. Ces deux postulats limitent à trois le nombre des données indispensables pour déterminer un point.

Est-il judicieux de faire éclater ce cadre? La création des géométries multidimensionnelles en a montré la possibilité. Ce sont tout d'abord des analystes, Cayley en Angleterre et Schläefli (1814-1895) à Berne qui ont étudié cette géométrie nouvelle. Son élaboration a été reprise depuis par des tenants de la géométrie pure et, par modification des axiomes de Hilbert, une base logique solide a été donnée à cette science. Un problème difficile se présentait, celui de la courbure des espaces nouveaux. A peine était-il élucidé, qu'Einstein (1879-1955) avec son ami Grossmann (1878-1936) l'appliquait à la théorie de la relativité générale et élaborait une théorie nouvelle de la gravitation dont on connaît le succès.

Il est un autre domaine qu'étudient les mathématiciens contemporains: la *topologie*, anciennement appelée *analysis situs*. A la base de toute géométrie figure la notion de droite. Imaginons un enfant maladroit qui, essayant de copier une figure portant quelques droites

<sup>1</sup> Transformations dans lesquelles à un point correspond plus d'un point; par exemple, une perpendiculaire à un diamètre d'un cercle coupe celui-ci en deux points.

remplace celles-ci par des lignes quelconques, en obéissant aux règles de la continuité, en s'interdisant donc tout saut dans son tracé, mais qui s'astreindrait à reproduire les croisements de lignes, sans en rajouter. Quelles sont les propriétés communes à la figure primitive et à celle résultant de la déformation ci-dessus ? Tel est l'objet de la topologie. Son étude est à l'ordre du jour. Elle a fait l'objet de nombreux travaux. Les mathématiciens lui ont appliqué des méthodes analytiques. Quelques-uns de ses problèmes sont justiciables de méthodes ressortissant des procédés de la géométrie pure. Cela est le cas, par exemple, pour le théorème d'Euler (1707-1783) affirmant que dans un polyèdre la somme des nombres de sommets et de faces surpasse de deux unités le nombre des arêtes. La topologie est une science difficile. Certaines questions très simples ont résisté aux efforts des chercheurs ; ainsi, on sait par expérience que quatre couleurs suffisent pour colorier une carte sans que deux pays voisins aient la même teinte mais il n'a jusqu'à présent pas été possible de prouver que ce nombre est inférieur à cinq.

Le XIX<sup>e</sup> siècle a encore vu la géométrie se renouveler dans un autre domaine qui la rapproche de la physique : la théorie des constructions. Les Anciens, admirateurs de la perfection des figures circulaires se sont astreints à étudier les problèmes de dessin géométrique en n'employant que la règle et le compas. Parmi les problèmes qu'ils se sont posés, trois ont résisté à leurs efforts, la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. Nombreux, trop nombreux, sont les chercheurs qui ont cru trouver la solution à la règle et au compas de ces problèmes. Dès la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, on découvrait l'impossibilité de la construction au compas de l'heptagone régulier. Louis Bertrands (1731-1812), professeur à Genève, le montre dans son *Développement nouveau des mathématiques*, publié en 1778. Un résultat remarquable de Gauss (1777 à 1855), la possibilité de construire au compas les polygones réguliers de 17, 257 et 65537 côtés attira l'attention sur ces problèmes ; en même temps, il montrait l'impossibilité de résoudre au compas et à la règle les deux problèmes classiques de la duplication du cube et de la trisection. Dès lors, les inventeurs s'en donnèrent à cœur joie d'inventer des trisecteurs. Plusieurs d'entre-nous ont connu l'un de ces derniers, Dmitri Mirimanoff (1861-1945) qui fut jusqu'en 1936 le titulaire de la chaire d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences de notre ville.

Durant ce dernier quart du XIX<sup>e</sup> siècle, on alla plus loin et on démontra que tous les problèmes dont la solution est liée à la construction d'une courbe algébrique sont solubles au moyen d'un type général d'appareil, les systèmes articulés, assemblages déformables de tiges rigides. La limitation apportée par les Anciens, qui imposaient l'emploi exclusif de la règle et du compas, constituait un appauvrissement regrettable de la science. A la même époque, en 1882, Lindemann (1852-1939) démontrait que le tracé de courbes algébriques était incapable de résoudre le vieux problème de la quadrature du cercle. Quelques années après lui, Abdank-Abakanovics (1852 à 1900) décrivait son intégraphe qui, lié à une unique tige fixée en une extrémité, donnait la solution générale du problème de la quadrature du cercle.

Une question qui a fait couler des flots d'encre, pas toujours d'excellente qualité, qui passe encore auprès des gens mal renseignés pour le type du problème insoluble a ainsi été éliminée de la liste des préoccupations des gens avertis.

Dans l'évolution des idées géométriques dont nous venons d'examiner une esquisse, un fait apparaît. Ce sont des précurseurs, des intuitifs, un architecte: Desargues, un autodidacte: Monge, un officier isolé: Poncelet, qui ouvrent des voies nouvelles, qui ont l'audace de rompre avec la tradition inspirée par l'observation superficielle du monde; ils ont une sorte de foi téméraire qui les pousse dans leur œuvre; ils ne s'inquiètent guère d'assurer leurs arrières par une critique axiomatique ferme de leurs principes. D'aucuns les combattent; grâce à eux, la science progresse et plus tard, les logiciens reprennent leur œuvre, parfois fragile, en assurent les points forts, en précisent les énoncés incomplets et parfois éliminent des erreurs. La science est faite de ces alternatives d'audace et de méthode.

Le parallélisme de ce développement avec celui de l'analyse est frappant. Nous voyons les géomètres servir de pont entre les abstractions de l'analyse et la réalité physique.

Un problème se pose aujourd'hui aux géomètres: fournir aux physiciens une théorie de l'espace appropriée à l'étude des phénomènes atomiques et nucléaires. La théorie des quanta impose le renoncement à la continuité. Les difficultés que représente l'élaboration d'une théorie satisfaisante du noyau ne tiendraient-elles pas au fait que nous nous obstinons à construire des modèles appartenant à un espace continu? Pour donner satisfaction aux physiciens, faudra-t-il

que les géomètres revisent leur monde, qu'ils construisent de nouvelles images de l'espace ? C'est là une tâche énorme, qui semble dépasser la capacité des savants actuels. Ce que nous pouvons et devons faire pour contribuer à l'avancement de la science, nous hommes de talent modeste, c'est de nous entraîner nous-mêmes, entraîner nos étudiants à la souplesse de l'esprit, à la capacité de renoncer aux évidences, à la capacité de substituer à des idées préconçues, insuffisamment analysées des hypothèses nouvelles, parfois téméraires et révolutionnaires.

En science, comme ailleurs, l'histoire montre combien souvent sont combattues ces révolutions, souvent par les hommes, parfois par le sort ; le destin de Desargues le montre bien.

---



