Une démonstration générale du théorème de l'orthocentre d'un triangle

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **13 (1960)**

Heft 4

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-738517

BIBLIOGRAPHIE

Jayet, A. (1950). Genèse de l'appareil morainique observée aux glaciers du Valsorey et du Vélan (Valais, Suisse). *Arch. Sc.*, *3*, fasc. 5, pp. 383-386. Genève.

—— (1953). Quelques caractéristiques peu connues des dépôts glaciaires. *Ecl. geol. Helv.*, *45*, n° 2, pp. 287-293.

—— (1954). Observations au glacier du Valsorey (Valais, Suisse). *Arch. Sc.*, *7*, fasc. 6, pp. 481-184. Genève.

—— (1955). Le problème du fluvio-glaciaire. *Geographica helvetica*, *3*, pp. 148-153.

—— (1957). Sur l'origine du caractère arrondi des galets glaciaires et fluvio-glaciaires. *Ecl. geol. Helv.*, *50*, n° 2, pp. 496-507.

—— (1958). Remarques sur la composition, la structure, les déformations mécaniques des moraines glaciaires pléistocènes et actuelles. *Ecl. geol. Helv.*, *51*, n° 2, pp. 341-354.

Reinhard, M. et H. Preiswerk (1934). Excursion n° 30. *Guide géologique de la Suisse*, fasc. 7, pp. 495-497. Wepf, Bâle.

Paul Rossier. — *Une démonstration générale du théorème de l'orthocentre d'un triangle.*

1. *Cas euclidien.*

Dans un plan, soient une droite a, deux de ses points B et C, h une perpendiculaire à a et X un point variable de h. Menons les droites BX et CX et, de C et B, abaissons les perpendiculaires sur elles; les deux faisceaux ainsi obtenus sont projectifs et même perspectifs puisque, si X est impropre, les deux perpendiculaires ci-dessus sont confondues avec a. Le lieu de l'intersection Y de ces deux droites est donc une droite.

Il existe deux triangles rectangles d'hypothénuse BC et dont le sommet de l'angle droit appartient à h. Choisissons X en l'un M de ces points; le point Y correspondant est alors confondu avec M. La droite lieu de Y a deux points sur h; elle est confondue avec elle. Autrement dit, les trois hauteurs du triangle BCX sont concourantes. La construction s'applique à tout triangle en prenant pour h la hauteur issue du troisième sommet; le théorème est général.

La démonstration précédente ne fait appel qu'à une seule notion métrique, la perpendicularité. Elle est indépendante de la notion de parallélisme.

2. *Cas cayleyen.*

La remarque précédente suggère d'étendre les raisonnements ci-dessus à la géométrie cayleyenne.

En plus de la droite a et de ses deux points B et C, donnons-nous la conique absolue p du plan cayleyen. Mener une perpendiculaire à une droite, c'est tracer une droite qui passe par le pôle de la droite donnée, relativement à l'absolu.

Montrons tout d'abord l'existence de deux triangles cayleyennement rectangles, d'hypothénuse BC et dont les sommets de l'angle droit appartiennent à une droite h. Pour cela, choisissons un point X de h, joignons-le à B et, de C abaissons la perpendiculaire cayleyenne à BX; cette droite coupe h en un point Z, lié projectivement à X. Cette projectivité homolocale possède deux points unis M et N; les triangles MBC et NBC sont cayleyennement rectangles en M et N. Il existe bien deux triangles rectangles d'hypothénuse BC et dont le sommet de l'angle droit appartient à h.

Cela acquis, la démonstration de l'existence de l'orthocentre d'un triangle est identique à celle donnée plus haut. La droite h est choisie perpendiculaire à a et les perpendicualires issues de C et B à BX et CX engendrent une conique dégénérée en les droites a et h.

3. *Cas particuliers.*

Si un sommet A d'un triangle est le pôle du côté opposé, relativement à l'absolu, le triangle est birectangle et toute droite issue de A est une hauteur. Le théorème subsiste car le côté opposé à A porte les deux autres hauteurs du triangle. L'orthocentre est indéterminé sur ce côté.

Si le triangle est auto-conjugué par rapport à l'absolu, il est trirectangle. Toute droite issue d'un sommet est une hauteur: l'orthocentre est indéterminé. En ce sens, le théorème tombe et est remplacé par le suivant. Tout point du plan d'un triangle trirectangle peut être pris comme orthocentre de ce triangle.

Si un triangle est asymptotique, c'est-à-dire si ses trois sommets appartiennent à l'absolu ou si ses trois côtés sont tangents à l'absolu, le théorème de la convergence des hauteurs est le cas particulier de celui du Brianchon relatif aux triangles circonscrits à une conique.

Le cas elliptique, où l'absolu est imaginaire, n'appelle pas de remarque. Au contraite, dans le cas hyperbolique, il peut arriver que l'orthocentre soit inaccessible. Le théorème prend alors la forme suivante, naturellement valable en géométrie lobatchevskienne. Si deux hauteurs d'un triangle sont des droites sécantes, la troisième hauteur passe par leur point de concours; si elles sont des non-sécantes, leur perpendiculaire commune est perpendiculaire à la troisième hauteur ou les trois hauteurs d'un triangle possèdent un point commun ou une perpendiculaire commune.

4. *Expression projective du théorème.*

En géométrie cayleyenne, mener les trois hauteurs d'un triangle, c'est, de façon appropriée, en joindre les sommets à ceux du triangle polaire du triangle donné par rapport à l'absolu. En langage projectif, le théorème de l'orthocentre devient le suivant: si deux triangles sont polaires l'un de l'autre par rapport à une conique, ils sont perspectifs.

Il est facile de rédiger la démonstration précédente en termes projectifs; il suffit de remplacer la relation de perpendicularité par celle de polarité relativement à l'absolu.

Marcel Haegi. — *Nouvelle méthode de confinement dans les plasmas. Examen du principe du fonctionnement.*

Supposons possible de placer des ions positifs sur des orbites passant toutes par une même ligne (fig. 1).
Le nombre de particules par unité de volume pour $\rho \to 0$ tendraient vers l'infini, les collisions auraient quasiment toutes lieu dans cette région, la vitesse y serait purement radiale *avant* le choc et *après*, la nouvelle trajectoire repasserait par le centre, y conservant ainsi la forte densité qui permettrait à la fusion d'avoir lieu.

§ 1. *Choix du modèle.*

Nous supposerons:

$\vec{B}$ uniforme dans une région $\rho >> \overline{R}$,
$\vec{E} \equiv 0$, plasma neutre,
les particules déjà placées sur leur orbite.