

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Band: 13 (1960)
Heft: 4

Artikel: De la possibilité d'une théorie unitaire finslérienne de l'électromagnétisme et de la gravitation
Autor: Schaer, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-738523>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

J. Schaer. — *De la possibilité d'une théorie unitaire finslérienne de l'électromagnétisme et de la gravitation.*

Procédés de la relativité générale.

Pour élaborer les procédés d'une théorie unitaire, il est nécessaire de connaître d'abord à fond ceux de la relativité générale.

Le noyau de cette théorie est formé des équations du champ d'Einstein

$$S^{ik} = \chi T^{ik} ,$$

χ étant une constante universelle. Elles fournissent la relation entre la distribution de la matière et la géométrie de l'espace-temps à quatre dimensions, T^{ik} étant le tenseur décrivant la matière et S^{ik} étant un tenseur déterminé par la métrique. En relativité générale on a $T^{ik} = \mu u^i u^k$, où μ est la densité de masse et u^i la quadrivitesse de la matière. S^{ik} est formé à partir du tenseur métrique g^{ik} et de ses dérivées de façon telle que sa divergence covariante s'annule identiquement

$$\nabla_k S^{ik} = 0 .$$

Dans ces conditions, la conservation de la masse et les géodésiques pour les lignes d'univers comme trajectoires de la matière sont des conséquences immédiates des équations du champ.

Une possibilité consisterait à se donner la géométrie, c'est-à-dire le tenseur métrique g_{ik} , puis à déterminer à l'aide des équations du champ la distribution de la matière nécessaire à cette géométrie. Par exemple on déduit sans autre que la densité de la masse vaut $\mu = -\frac{1}{\chi} R$, où R est la courbure invariante.

Cependant on utilise ordinairement l'autre possibilité, à savoir le procédé où l'on se donne la distribution de la matière dans un système de coordonnées abstrait et où l'on détermine la métrique (et avec elle la signification des coordonnées) à partir des équations du champ.

En relativité générale un rôle considérable est assumé par les particules d'épreuves. Ce sont des particules microscopiques si petites que leur influence sur la géométrie et par suite sur les autres corps, c'est-à-dire les corps de dimension finie ou corps macroscopiques, est négligeable. Einstein avait d'abord estimé devoir postuler que les trajectoires des particules d'épreuve dans le champ des corps princi-

paux sont des géodésiques. Depuis, on a démontré que le mouvement le long des géodésiques est une conséquence des équations du champ (Infeld et Schild, Papapetrou) ¹.

Théories unitaires finslériennes.

Par théorie unitaire, on entend une seule et unique explication unifiant les phénomènes qui, jusqu'ici, étaient restés les domaines de deux théories distinctes, celle de la gravitation (dans la forme de la relativité générale) et celle de l'électromagnétisme. On pourrait être tenté de suivre la voie empruntée en relativité générale et d'interpréter géométriquement l'électromagnétisme comme la gravitation. Mais pour cela la structure de la géométrie riemannienne à quatre dimensions ne suffit plus. On a alors, entre autres, la possibilité de la remplacer par la géométrie de Finsler dont la structure est plus riche.

En effet, les trajectoires de la matière chargée peuvent être considérées comme les géodésiques d'un espace de Finsler avec la fonction métrique fondamentale

$$F(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ik}(x) \dot{x}^i \dot{x}^k} + k \varphi_i(x) \dot{x}^i .$$

Ici les g_{ik} sont les potentiels de la gravitation et φ_i le potentiel électromagnétique; k est soit le rapport $\frac{\text{charge}}{\text{masse}}$ d'une particule, soit celui $\frac{\text{densité de charge}}{\text{densité de masse}}$ de la matière distribuée d'une manière continue.

La géométrie différentielle des espaces de Finsler n'est pas déterminée univoquement ². Rund considère les espaces de Finsler comme localement minkowskiens. Pour introduire une dérivée covariante il a besoin d'un champ de directions donné. Ce n'est pas le cas dans la théorie de Cartan, qui regarde l'espace de Finsler comme espace d'éléments de ligne. Ici par principe chaque tenseur dépend, comme la métrique, du lieu et de la direction ³. Cependant il est possible de déduire la dérivée covariante de Cartan par la méthode de Rund ⁴.

Dans une théorie unitaire basée sur la géométrie de Finsler on rendra le champ électromagnétique responsable de la déviation de la

¹ Cf. M. A. PAPAPETROU, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* (1957), 173.

² H. RUND, *The Differential Geometry of Finsler Spaces* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959).

³ E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Actualités sc. et ind.*, 79 (Paris, 1934).

⁴ Voir l'Appendice.

géométrie par rapport à une géométrie riemannienne. A cet effet, on pose d'une façon plus ou moins arbitraire un rapport entre les quotients différentiels $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ mesurant le taux de la dépendance de la métrique envers la direction et le champ électromagnétique ou son potentiel. C'est ce qu'on fait divers auteurs déjà ¹.

La critique principale qu'il faut adresser à ces théories consiste en ce qu'elles ne tiennent pas compte de la variabilité du rapport $k = \frac{\text{charge}}{\text{masse}}$. Aussi ne disent-elles rien à l'égard du procédé qui doit être appliqué à des problèmes spéciaux. Elles laissent ouverte la question de la détermination du tenseur métrique $g_{ik}(x, \dot{x})$ en partant de distributions données de la masse et de la charge, et aussi le problème inverse de la détermination de la distribution de la matière correspondant à des champs donnés des potentiels g_{ik} et φ_i (c'est-à-dire la métrique), les équations du champ n'étant valables que pour le vide. En outre les équations du champ sont dispersées en plusieurs groupes indépendants. D'ailleurs elles sont développées à l'aide d'un champ d'éléments de ligne qui reste indéterminé.

Des corps lancés dans les mêmes conditions mais affublés de différents rapports k parcourent certainement des trajectoires différentes. Or, dans un espace de Finsler, des conditions aux limites fixes ne déterminent qu'une seule géodésique à la fois. La variabilité de k exigerait donc toute une famille d'espaces de Finsler, un pour chaque champ de k . On pourrait éventuellement éviter cette ambiguïté très malcommode à l'aide des équations du champ en attribuant à chaque point une densité de masse et une densité de charge et par conséquent une seule valeur de k et on définirait de cette façon avec ce champ unique de k un seul espace de Finsler.

Rien ne nous dit que k doive rester constant le long d'une ligne d'univers; cependant, si ce n'était pas le cas, cela reviendrait, du point de vue physique, à un transbordement de la charge. En posant les équations du champ convenablement cela ne se produira pas.

Plus grave est le fait que dans cet espace il n'y aurait plus aucune place pour des particules d'épreuve. Car une telle particule modifierait sensiblement la distribution de la masse et de la charge ou mieux leur

¹ J. I. HORVÁTH, A. MOÓR, *Z. f. Phys.*, 131 (1951), 44.

E. SCHAFFHAUSER-GRAF, *J. of Rat. Mech. and An.*, 2/4 (1953), 743.

Cf. aussi G. STEPHENSON, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* (1957), 205.

rapport k . Même si cela n'arrive que le long d'une seule ligne d'univers, de l'importance de cette modification dépendrait la trajectoire, c'est-à-dire en fin de compte la géodésique correspondante, et l'espace serait remplacé par un autre. Il n'est pas aisé de renoncer à la notion de particule d'épreuve, parce que sans elle il ne serait plus possible, comme il est usuel de le faire en relativité générale, de calculer les diverses trajectoires possibles dans le champ de corps principaux donnés, et on serait alors forcé de traiter chaque cas pour soi, dans un espace de Finsler particulier.

Equations du champ.

Etablir des équations du champ signifie dans notre cas poser une relation entre des grandeurs géométriques et des grandeurs physiques. En géométrie finslérienne on la mettra, comme en relativité générale, sous forme covariante générale en égalant, à un facteur universel près, un tenseur géométrique et un tenseur physique. Mais ici le tenseur physique sera de nature bien plus complexe qu'en relativité générale. En effet, il sera formé à partir de la densité de masse, de la densité de charge ou du potentiel électromagnétique et, le cas échéant, de ses dérivées, et des vitesses de la masse et de la charge, qui coïncident s'il n'y a pas de transbordement de charge. Le tenseur géométrique lui-même sera formé du tenseur métrique et éventuellement d'un vecteur auxiliaire, ainsi que de leurs dérivées.

Il est clair que, lorsque les champs électromagnétiques s'annulent, il faut retrouver la théorie de la relativité générale. Il est donc utile d'accommoder les équations du champ aux équations d'Einstein $S^{ik} = \chi T^{ik}$. En relativité générale c'est le tenseur matériel d'énergie-impulsion qui joue le rôle de tenseur physique. Pour pouvoir déduire la conservation de l'énergie et de l'impulsion il suffit donc de choisir le tenseur géométrique tel que sa divergence s'annule. Au cas où la charge électrique suit les mêmes trajectoires que la masse, le rapport k reste constant le long des trajectoires, et avec la masse, la charge reste aussi conservée.

Si dans le cas de masse pure on choisit sans difficulté comme tenseur physique le tenseur matériel $M^{ik} = \mu u^i u^k$ ($\mu = \mu(x)$ étant la densité de masse et u^i la quadrivitesse) on n'est pas autorisé, dans un espace de Finsler, à regarder comme indépendants u^i et x^i : $M^{ik}(x, u) = \mu(x) u^i u^k$. Sinon, la dérivée de Cartan $D_k u^i$ étant identiquement

nulle, on trouve $D_k T^{ik} = \frac{\partial \mu}{\partial x^k} u^i u^k$ et il n'est possible d'en déduire ni l'équation de continuité ni la loi des géodésiques. En revanche, on les retrouve toutes deux si la vitesse est considérée comme champ de vecteur $u^i(x)$ et alors $T^{ik}(x, u(x)) = T^{ik}(x)$ ne dépend donc que de la position; et cela, que l'on utilise soit la dérivée de Cartan soit celle de Rund avec $u^i(x)$ comme champ de direction.

Dans le cas électromagnétique on considérera, par analogie avec la relativité générale, la somme du tenseur d'énergie-impulsion matériel M^{ik} et du tenseur électromagnétique τ^{ik} comme tenseur physique. On peut se demander alors pourquoi ne pas remplacer l'espace de Finsler par l'espace riemannien osculateur le long des trajectoires de $u^i(x)$, ce qui mènerait à la « théorie naïve » de la gravitation et de l'électromagnétisme. La raison en est que la dérivée finslérienne d'un tenseur qui ne dépend que de la position par l'intermédiaire d'un champ vectoriel n'est pas identique à la dérivée riemannienne dans l'espace osculateur correspondant.

Le problème mathématique.

Il faut donc trouver un tenseur conservatif convenable S^{ik} qui soit déterminé par la métrique seulement. Il serait désirable de trouver à cette question mathématique une réponse aussi complète qu'on peut la donner dans le cas riemannien, où tous les tenseurs conservatifs qui ne dépendent que du tenseur métrique et de ses dérivées jusqu'au deuxième ordre et qui sont linéaires en ces dérivées du deuxième ordre ont la forme $S_{ik} = h \left[R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R - 2\lambda) \right]$, où R_{ik} est le tenseur contracté de la courbure, $R = g^{ik} R_{ik}$ la courbure invariante, et h et λ sont des constantes arbitraires. On cherche donc à poser, outre la question principale concernant la divergence nulle $D_k S^{ik} = 0$, des conditions telles que la classe des tenseurs satisfaisant à toutes les exigences soit restreinte et facile à embrasser d'un coup d'œil, et c'est beaucoup. Et l'on serait déjà bien heureux de connaître un seul tenseur conservatif susceptible de nous donner quelque indice sur la façon non seulement de remplir ces conditions mais même de les poser.

Le tenseur S^{ik} utilisé en relativité générale est symétrique et il est formé à partir du tenseur symétrique R_{ik} . Un calcul élémentaire mais laborieux montre que le tenseur de courbure contracté correspondant

K_{ik} ¹ de la géométrie de Finsler n'est pas symétrique si bien qu'on peut former deux divergences différentes.

En relativité générale on démontre que le tenseur S^{ih} est conservatif à l'aide des identités de Bianchi pour le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel R_{ihk}^j . Le tenseur correspondant K_{ihk}^j remplit les identités analogues suivantes:

$$D_l K_{ihk}^j + D_h K_{ikl}^j + D_k K_{ilh}^j + \\ + \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial \dot{x}^r} K_{shl}^r + \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial \dot{x}^r} K_{slh}^r + \frac{\partial \Gamma_{il}^{*j}}{\partial \dot{x}^r} K_{shk}^r \right) \dot{x}^s = 0.$$

Mais ici les termes supplémentaires dans la parenthèse empêchent que la divergence du tenseur formé d'une façon analogue à S^{ih} s'annule. Le problème se pose alors de représenter le vecteur B_i qu'est cette divergence de quelque autre manière en tant que divergence d'un tenseur, disons $B^i = D_k X^{ik}$. La façon la plus simple serait la représentation de B_i par le gradient d'un invariant: $B_i = D_i I$ ($X^{ik} = g^{ik} I$).

Ainsi se pose la question de l'intégrabilité dans les espaces de Finsler: Dans quelles conditions un vecteur se laisse-t-il représenter par le gradient d'un invariant? Dans la géométrie de Riemann cette question mène à un système total d'équations différentielles partielles dont on connaît bien les conditions d'intégrabilité: Le rotationnel $\nabla_k B_i - \nabla_i B_k$ doit être identiquement nul. Dans l'espace de Finsler considéré comme espace d'éléments de ligne la situation est plus complexe, le système correspondant de n équations différentielles partielles pour une fonction $I(x, \dot{x})$ de $2n$ variables n'étant pas total. Aussi peut-on espérer que les conditions d'intégrabilité ne sont pas si strictes.

¹ $K_{ik} = K_{irk}^r$, où

$$K_{ihk}^j = \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*j}}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial G^l}{\partial \dot{x}^k} + \Gamma_{mk}^{*j} \Gamma_{ih}^{*m} - \\ - \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial x_h} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^{*j}}{\partial \dot{x}^l} \frac{\partial G_l}{\partial \dot{x}^h} + \Gamma_{mh}^{*j} \Gamma_{ik}^{*m} \right)$$

et $G^i = \frac{1}{4} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^k \dot{x}^l$. (Cf. Rund, *l. c.*)

Le problème qui se pose alors serait de trouver d'abord ces conditions, puis d'examiner si elles sont remplies par notre vecteur particulier B_i . De cette façon on construirait un tenseur conservatif qui pourrait être considéré comme tenseur géométrique et utilisé dans des équations du champ. Le sens physique de ces équations est encore incertain.

Je tiens à remercier le professeur A. Mercier pour les suggestions et le soutien que je lui dois.

Appendice.

Etablissons la dérivée covariante de Cartan dans les espaces de Finsler par un procédé simple.

Dans son livre: *The Differential Geometry of Finsler Spaces* (Springer, 1959), Rund calcule la dérivée partielle des vecteurs ne dépendant que du lieu (p. 55 ff). La même méthode conduit, avec une légère généralisation aux vecteurs qui dépendent et du lieu et de la direction (mais d'une autre manière que celle envisagée par Rund, p. 60) à la dérivée de Cartan.

La clef de notre méthode réside dans le calcul des dérivées du second ordre des fonctions et de la transformation des coordonnées:

$$\partial_{l'} A_{i'}^i = \frac{\partial}{\partial x^{l'}} A_{i'}^i \quad \left(A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)$$

qui fournit le résultat que voici:

$$\partial_{l'} A_{i'}^i = A_{k'}^i \Gamma_{i'l'}^{*k'} - A_{l'}^l A_{i'}^k \Gamma_{kl}^{*i} \quad (\text{A})$$

(cf. Rund, *l. c.*, formules (4.6) et (4.6 a)).

Soit $X^i = X^i(x, \dot{x})$ un vecteur contravariant, se transformant selon $X^{i'} = A_{i'}^{i'} X^i$ lors d'une transformation générale de coordonnées $x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, en abrégé

$$x^i = x^i(x'), \quad \text{et} \quad \dot{x}^i = A_{i'}^i \dot{x}^{i'}.$$

En dérivant

$$X^{i'}(x', \dot{x}') = A_{i'}^{i'}(x(x')) X^i(x(x')), \quad \dot{x}^k = A_{k'}^k(x') \dot{x}^{k'}$$

par rapport à $x^{j'}$, on trouve

$$\frac{\partial X^{i'}}{\partial x^{j'}} = (\partial_j A_{i'}^{i'}) A_{j'}^j X^i + A_{i'}^{i'} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} A_{j'}^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^k} (\partial_{j'} A_{k'}^k) \dot{x}^{k'} \right)$$

et, après avoir substitué le résultat (A)

$$\frac{\partial X^{i'}}{\partial x^{j'}} = A_i^{i'} A_j^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{*i} X^k - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l \right) - \Gamma_{k'j'}^{*i'} X^{k'} + \frac{\partial X^{i'}}{\partial x^{k'}} \Gamma_{l'j'}^{*k'} \dot{x}^{l'}$$

Donc

$$D_j X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{*i} X^k - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l \quad (B)$$

est un tenseur, à savoir exactement la dérivée de Cartan du vecteur $X^i(x, \dot{x})$, car

$$\Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l = P_{jl}^k \dot{x}^l = \Gamma_{lj}^k \dot{x}^l = \frac{\partial G^k}{\partial x^j}$$

avec l'expression $G^k = \frac{1}{2} \gamma_{hl}^k \dot{x}^h \dot{x}^l$ de Cartan.

H. Leutwyler. — *La solution statique à symétrie sphérique en théorie pentadimensionnelle.*

1. Généralités.

En théorie unitaire pentadimensionnelle, on suppose que l'espace V_5 est muni d'une métrique riemannienne $d\sigma^2 = \alpha_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$; $x^4 = ct$) où $\alpha_{\mu\nu}$ satisfait à l'hypothèse de cylindricité $\partial_5 \alpha_{\mu\nu} = 0$. Les grandeurs $\alpha_{\mu\nu}$ ne dépendant que des quatre premières variables, cet espace peut être projeté en quatre dimensions par les relations suivantes:

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha_{55} &= -U^2 \\ \alpha_{i5} &= -\beta U^2 \varphi_i & (i, k = 1, 2, 3, 4) \\ \alpha_{ik} &= J g_{ik} - \beta^2 U^2 \varphi_i \varphi_k \end{aligned}$$

φ_i désigne le potentiel électromagnétique, g_{ik} la métrique quadridimensionnelle,

$$\beta = [16 \pi G \varepsilon_0 c^{-4}]^{\frac{1}{2}} = 1,9 \cdot 10^{-27} \text{ Cb sec}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-2} .$$

Cette interprétation est la plus générale de ce type, si on exige que g_{ik} se transforme comme tenseur de V_4 et que φ_i satisfasse à l'invariance de jauge lors des transformations conservant la cylin-