

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Band:** 13 (1960)  
**Heft:** 4

**Artikel:** La solution statique à symétrie sphérique en théorie pentadimensionnelle  
**Autor:** Leutwyler, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-738524>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

et, après avoir substitué le résultat (A)

$$\frac{\partial X^{i'}}{\partial x^{j'}} = A_i^{i'} A_j^j \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{*i} X^k - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l \right) - \Gamma_{k'j'}^{*i'} X^{k'} + \frac{\partial X^{i'}}{\partial x^{k'}} \Gamma_{l'j'}^{*k'} \dot{x}^{l'}$$

Donc

$$D_j X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{*i} X^k - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l \quad (B)$$

est un tenseur, à savoir exactement la dérivée de Cartan du vecteur  $X^i(x, \dot{x})$ , car

$$\Gamma_{lj}^{*k} \dot{x}^l = P_{jl}^k \dot{x}^l = \Gamma_{lj}^k \dot{x}^l = \frac{\partial G^k}{\partial x^j}$$

avec l'expression  $G^k = \frac{1}{2} \gamma_{hl}^k \dot{x}^h \dot{x}^l$  de Cartan.

**H. Leutwyler.** — *La solution statique à symétrie sphérique en théorie pentadimensionnelle.*

### 1. Généralités.

En théorie unitaire pentadimensionnelle, on suppose que l'espace  $V_5$  est muni d'une métrique riemannienne  $d\sigma^2 = \alpha_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $x^4 = ct$ ) où  $\alpha_{\mu\nu}$  satisfait à l'hypothèse de cylindricité  $\partial_5 \alpha_{\mu\nu} = 0$ . Les grandeurs  $\alpha_{\mu\nu}$  ne dépendant que des quatre premières variables, cet espace peut être projeté en quatre dimensions par les relations suivantes:

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha_{55} &= -U^2 \\ \alpha_{i5} &= -\beta U^2 \varphi_i & (i, k = 1, 2, 3, 4) \\ \alpha_{ik} &= J g_{ik} - \beta^2 U^2 \varphi_i \varphi_k \end{aligned}$$

$\varphi_i$  désigne le potentiel électromagnétique,  $g_{ik}$  la métrique quadridimensionnelle,

$$\beta = [16 \pi G \varepsilon_0 c^{-4}]^{\frac{1}{2}} = 1,9 \cdot 10^{-27} \text{ Cb sec}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-2} .$$

Cette interprétation est la plus générale de ce type, si on exige que  $g_{ik}$  se transforme comme tenseur de  $V_4$  et que  $\varphi_i$  satisfasse à l'invariance de jauge lors des transformations conservant la cylin-

dricité. L'invariant  $J$  est le seul arbitraire qui doit encore être fixé.

Comme équations du champ nous posons  $R_{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu}) = 0$ ,  $R_{\mu\nu}$  désignant le tenseur de Ricci formé à l'aide des symboles de Christoffel de la métrique  $\alpha_{\mu\nu}$ . Nous effectuons les calculs en  $V_5$  sans faire usage de l'interprétation quadridimensionnelle. Avec  $J = 1$ , on trouve la théorie de Thiry [1], tandis que les équations de Jordan en l'absence de l'électromagnétisme s'obtiennent en posant  $J = U^{\alpha-1}$ ,  $\alpha = \pm (1 - 2\zeta/3)^{-1/2}$ ,  $\varkappa = U^\alpha$ ,  $\zeta$  étant la constante arbitraire qui apparaît dans le principe variationnel posé par Jordan [2] et  $\varkappa$  désignant sa quinzième variable. Si  $\zeta > 3/2$ , les équations de Jordan ne peuvent être obtenues qu'en partant d'une solution complexe purement formelle des équations  $R_{\mu\nu} = 0$ .

En outre, le cas  $J = U^{-1}$  doit être exclu du système de Jordan, parce qu'il entraînerait  $\zeta = -\infty$ . En l'absence de l'électromagnétisme, les équations  $R_{\mu\nu} = 0$  admettent la solution  $U = \text{const.}$  qui correspond à la théorie de Klein-Kaluza dont les équations sont identiques à celles de la théorie de la relativité générale. En présence d'un champ électromagnétique, le système  $R_{\mu\nu} = 0$  n'admet pas la solution  $U = \text{const.}$  et on ne trouve pas exactement les équations de la théorie « naïve » obtenues en partant de la théorie  $U = \text{const.}$  de Klein-Kaluza.

## 2. Le champ métrique à symétrie sphérique créé par une masse neutre.

En ce cas, la métrique est orthogonale par rapport à la cinquième coordonnée:  $\alpha_{i5} = 0$ . La solution des équations  $R_{\mu\nu} = 0$  qui s'obtient par intégration directe peut être représentée sous la forme

$$(2) \quad d\sigma^2 = -R^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{-\varepsilon} \left[ d\lambda^2 + (\lambda^2 - 1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \\ + S^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\mu (dx^4)^2 - T^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\nu (dx^5)^2$$

Dans cette expression on a posé

$$\mu = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon^2}{4}}, \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2} \mp \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon^2}{4}}$$

où  $|\varepsilon| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Par une transformation de l'échelle en  $x^4$  et en  $x^5$  les constantes  $S$  et  $T$  peuvent être éliminées. Donc cette solution ne contient que deux paramètres,  $R > 0$  et  $\varepsilon$ . Si nous choisissons l'interprétation menant aux équations de Jordan, nous retrouvons les solutions de Heckmann [2] correspondant à  $\zeta < 3/2$  en transformant la variable  $\lambda$  en une nouvelle variable  $r$ , telle que  $g_{22} = -r^2$ . La discussion de ces solutions est reproduite en [2], aussi nous bornons-nous à discuter le cas  $J = U^{-1}$ , qui ne peut pas être obtenu à partir des équations de Jordan.

Avec  $J = U^{-1}$  on trouve:

$$(3) \quad ds^2 = -R^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{-\sigma} \left[ d\lambda^2 + (\lambda^2 - 1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \\ + \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{\sigma} (dx^4)^2$$

où l'on a posé

$$\sigma = \frac{3\varepsilon}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon^2}{4}}$$

donc  $-1 \leq \sigma \leq +1$ . Pour  $\sigma = +1$  nous avons  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0$ , donc  $U = \text{const}$ . Cette solution doit être identique à celle de Schwarzschild. En effet il vient  $r/R = \lambda + 1$  et

$$(4) \quad ds^2 = - (1 - 2R/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ + (1 - 2R/r) (dx^4)^2 .$$

Puisque  $R > 0$  cette solution représente un champ de Schwarzschild pour une masse positive, la constante d'intégration  $R$  étant liée à la masse par  $R = Gm/c^2$ .

Pour  $\sigma = -1$  nous avons  $r/R = \lambda - 1$ ,

$$(5) \quad ds^2 = - (1 + 2R/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ + (1 + 2R/r) (dx^4)^2$$

qui représente la solution de Schwarzschild pour une masse négative. Entre ces deux valeurs de  $\sigma$  il y a une série de solutions qui ne peut être discutée qu'à partir des lois du mouvement valables pour des particules d'épreuve. En première approximation, le champ métrique

est pour toute valeur de  $\sigma$  un champ de Schwarzschild. Si les équations du mouvement étaient représentées par des géodésiques de la métrique quadridimensionnelle en l'absence d'un champ électromagnétique, le calcul des trois effets observables serait identique à celui de la relativité générale.

### 3. La solution en présence d'un champ électromagnétique.

Dans le cas électrostatique nous avons  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \neq \varphi_4$ . Il semble difficile d'obtenir la solution du champ métrique en présence d'un champ électromagnétique par intégration directe. Nous l'avons obtenue à partir du champ neutre par la méthode suivante :

On cherche une solution statique cylindrique, c'est-à-dire pour laquelle  $\partial_4 \alpha_{\mu\nu} = \partial_5 \alpha_{\mu\nu} = 0$ . Les composantes du tenseur métrique sont donc constantes dans les surfaces de coordonnées  $(x^4, x^5)$ . A partir d'une solution donnée, on obtient donc une nouvelle solution en soumettant l'espace à une rotation, à coefficients constants, du système de coordonnées dans la surface  $(x^4, x^5)$ , représentée par

$$(6) \quad \begin{aligned} x^4 &= a_4^4 x^{4'} + a_5^4 x^{5'} \\ x^5 &= a_4^5 x^{4'} + a_5^5 x^{5'} \end{aligned}$$

où les coefficients  $a_4^4$ , etc. ne dépendent pas du lieu. La nouvelle métrique  $\alpha_{\mu\nu}'$  obtenue par une telle rotation ne dépendra ni de  $x^{4'}$  ni de  $x^{5'}$  mais ne sera généralement plus orthogonale par rapport à la cinquième coordonnée, tandis que l'orthogonalité de l'espace quadridimensionnel est conservée. C'est donc une solution de la forme que nous cherchons. Le fait que les solutions obtenues par de telles rotations représentent la solution générale du problème sera considéré plus loin.

Sans restreindre la généralité nous posons  $S = T = 1$  et  $\alpha_{44\infty}' = 1$ ,  $\alpha_{55\infty}' = -1$ ,  $\alpha_{45\infty}' = 0$ , ces conditions pouvant toujours être réalisées par un choix convenable de l'échelle en  $x^4$  et en  $x^5$  et par une transformation de jauge, qui se réduit à une constante additive à  $\varphi_4$ . La transformation (6) doit donc être orthogonale par rapport à la métrique pseudo-euclidienne. Une telle transformation est représentée par  $a_4^4 = (1 - q^2)^{-\frac{1}{2}} = a_5^5$ ;  $a_5^4 = q (1 - q^2)^{-\frac{1}{2}} = a_4^5$ .

Il vient

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha_{11}' &= \alpha_{11}, \quad \alpha_{22}' = \alpha_{22}, \quad \alpha_{33}' = \alpha_{33} \\ \alpha_{44}' &= (1 - q^2)^{-1} (\alpha_{44} + q^2 \alpha_{45}) \\ \alpha_{45}' &= q (1 - q^2)^{-1} (\alpha_{44} + \alpha_{55}) \\ \alpha_{55}' &= (1 - q^2)^{-1} (q^2 \alpha_{44} + \alpha_{55}) \end{aligned}$$

Introduisant (2) dans (7) nous obtenons

$$(8) \quad d\sigma^2 = -R^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{-\varepsilon} \{ d\lambda^2 + (\lambda^2 - 1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} + \\ + (1 - q^2)^{-1} \left[ \left\{ \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\mu - q^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\nu \right\} (dx^4)^2 + 2q \left\{ \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\mu - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\nu \right\} dx^4 dx^5 + \left\{ q^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\mu - \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^\nu \right\} (dx^5)^2 \right]$$

avec  $-1 < q < +1$ ,  $|\varepsilon| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $R > 0$ .

Le coefficient de la rotation,  $q$ , représente la constante d'intégration qui serait obtenue en intégrant l'équation  $R_{45} = 0$  qui correspond à l'équation de Laplace pour le potentiel électromagnétique I;  $q$  est donc en relation avec la charge du champ.

Cette solution n'est pas la solution générale du problème, bien que le nombre des constantes d'intégration corresponde au nombre qui serait obtenu par intégration directe. Il existe encore 3 types de solutions, qui sont obtenues par des rotations à coefficients complexes appliquées à la solution neutre pour  $|\varepsilon| > 2/\sqrt{3}$ . Ces solutions peuvent être représentées

1° par

$$(9) \quad d\sigma^2 = -R^2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{-\varepsilon} \{ d\lambda^2 + (\lambda^2 - 1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} + \\ + \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left[ \left\{ \cos \left[ \gamma \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] - 2q \sqrt{1 + q^2} \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] \right\} (dx^4)^2 - \right. \\ \left. - 2(1 + 2q^2) \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] dx^4 dx^5 - \right. \\ \left. - \left\{ \cos \left[ \gamma \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] + 2q \sqrt{1 + q^2} \sin \left[ \gamma \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] \right\} (dx^5)^2 \right]$$

où l'on a posé

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{4} - 1} \quad \text{pour} \quad -\infty < q < +\infty; \quad |\varepsilon| > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2<sup>o</sup> par

$$\begin{aligned}
 (10) \quad d\sigma^2 = & - e^{\frac{2\lambda_0}{\lambda+\lambda_0}} \left\{ d\lambda^2 + (\lambda + \lambda_0)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \\
 & + e^{-\frac{\lambda_0}{\lambda+\lambda_0}} \left[ \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \mp 2q \sqrt{1+q^2} \sin \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \right\} (dx^4)^2 \right. \\
 & \quad \left. \pm 2(1+2q^2) \sin \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} dx^4 dx^5 \right. \\
 & \quad \left. - \left\{ \cos \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \mp 2q \sqrt{1+q^2} \sin \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \right\} (dx^5)^2 \right] \\
 & \text{pour } -\infty < \lambda_0 < +\infty ; \quad -\infty < q < +\infty .
 \end{aligned}$$

3<sup>o</sup> par

$$\begin{aligned}
 (11) \quad d\sigma^2 = & - R^2 e^{2\varepsilon \operatorname{arccotg} \lambda} \left\{ d\lambda^2 + (\lambda^2 + 1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \\
 & + e^{-\varepsilon \operatorname{arccotg} \lambda} \left[ \left\{ \cos [2\delta \operatorname{arccotg} \lambda] - 2q \sqrt{1+q^2} \sin [2\delta \operatorname{arccotg} \lambda] \right\} (dx^4)^2 \right. \\
 & \quad \left. - 2(1+2q^2) \sin [2\delta \operatorname{arccotg} \lambda] dx^4 dx^5 \right. \\
 & \quad \left. - \left\{ \cos [2\delta \operatorname{arccotg} \lambda] + 2q \sqrt{1+q^2} \sin [2\delta \operatorname{arccotg} \lambda] \right\} (dx^5)^2 \right]
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\delta = \pm \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}}, \quad \text{pour } -\infty < \varepsilon < +\infty, \quad -\infty < q < \infty .$$

Les quatre types (8), (9), (10), (11) représentent la solution générale du problème. Ceci peut être prouvé par la méthode suivante: le système d'équations  $R_{\mu\nu} = 0$  consiste en 5 équations indépendantes: (a)  $R_{11} = 0$ , (b)  $R_{22} = 0$ , (c)  $R_{44} = 0$ , (d)  $R_{55} = 0$  et (e)  $R_{45} = 0$ . Ces équations déterminent les quatre fonctions  $\alpha_{11}(r)$ ,  $\alpha_{44}(r)$ ,  $\alpha_{55}(r)$  et  $\alpha_{45}(r)$ ;  $\alpha_{22}(r)$  peut être choisi arbitrairement, fixant le choix de la variable  $x^1$ . (a), (c), (d), (e) sont du deuxième ordre et suffisent en principe pour déterminer la solution. L'équation (b), n'étant qu'une restriction imposée aux solutions de (a), (c), (d), (e), est surabondante. Si nous développons les quatre fonctions par rapport à  $1/r$ , les deux premiers coefficients des développements peuvent être donnés arbitrairement, les autres étant alors déterminés à l'aide des équations différentielles (a), (c), (d), (e). Or, l'équation (b) impose une restriction à ces deux premiers coefficients. Il faut donc seulement démontrer que les constantes d'intégration des solutions (8), (9),

(10), (11) peuvent être choisies telles que les deux premiers termes des développements de ces solutions prennent toutes les valeurs possibles compatibles avec la restriction (b). Cette vérification peut être faite en effectuant à l'aide de (1) une projection sur  $V_4$  des solutions (8), (9), (10), (11) ainsi que de l'équation (b).

#### 4. Remarque.

La traduction de (8), (9), (10), (11) en quatre dimensions montre que le potentiel  $\varphi_4$  varie comme  $1/r$  à grande distance du centre, mais prend une valeur finie pour  $r = 0$ . De là résulte que l'énergie du champ électrique, obtenue en intégrant dans tout l'espace tridimensionnel la densité de l'énergie donnée par la composante  $\tau_{44}$  du tenseur de Maxwell, a une valeur finie. En théorie « naïve » équivalente à  $\alpha_{55} = \text{const.}$ , cette énergie diverge, puisque le potentiel est en  $1/r$  même pour  $r \rightarrow 0$ .

Je tiens à remercier M<sup>me</sup> M.-A. Tonnelat dont les suggestions et les conseils m'ont été précieux et le professeur A. Mercier pour l'aide qu'il m'a fournie.

1. THIRY, Y., thèse, Paris, 1951.
2. JORDAN, P., *Schwerkraft und Weltall*. Braunschweig, 1952.

### Séance du 15 décembre 1960

**J.-D. Bersier et G. Bocquet.** — *Les méthodes d'éclaircissement en vascularisation et en morphogénie végétales comparées.*

Depuis 1948, le Conservatoire botanique de la Ville de Genève a présenté en anatomie florale une série de travaux qui tous utilisent une des techniques dites d'« éclaircissement ». Les organes végétaux (les fleurs spécialement) sont rendus transparents et étudiés sous la loupe binoculaire. Les rapports entre les différents tissus sont ainsi facilement mis en évidence dans les trois dimensions. Il s'ensuit que cette technique s'applique spécialement bien à l'étude de la vascularisation et de l'organogénèse comparées (Baehni et Bonner 1948, 1949