Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Band: 18 (1965)

Heft: 3

Artikel: Sur l'attraction gravitationelle d'une configuration sphérique

Autor: Bouvier, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739233

Séance du 3 juin 1965

P. BOUVIER — Sur l'attraction gravitationnelle d'une configuration sphérique.

On connaît les deux théorèmes dus à Newton:

1. Une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur les points de son intérieur.
2. Une couche sphérique homogène attire les points extérieurs comme si toute la masse était réunie à son centre.

Leur démonstration peut se faire par voie géométrique élémentaire ou bien en invoquant l'équation de Laplace vérifiée en tout point non situé sur la couche.

Nous proposons ici une autre démonstration de ces deux théorèmes.

Envisageons d'abord dans le plan n points équidistants disposés sur un cercle de rayon a et de centre 0; le point j ($j = 1, 2, ..., n$) est doté de la masse m_j et nous posons $\sum_j m_j = m$.

Soit A un point à distance $OA = r$ du centre.

Numérotons les points dans le sens positif à partir de la direction $0A$ et désignons par α l'angle donnant la position du point n relativement à $0A$ dans le sens négatif.

Le potentiel — V du point A dû aux n points du cercle sera la somme des potentiels dus à chaque point isolément et l'on écrira

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_j \frac{m_j}{s_j}$$

avec des unités rendant égale à un la constante de la gravitation. Or nous avons

$$s_j^2 = a^2 + r^2 - 2\,ar \cos\left(2\pi \frac{j}{n} - \alpha\right)$$

Introduisant les polynomes de Legendre, nous devrons distinguer deux cas, selon que r est inférieur ou supérieur à a.

Ecrivant V_{int} ou V_{ext} pour V suivant que A est intérieur ou extérieur au cercle de rayon a, nous trouvons respectivement

$$V_{int} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l \left\{\cos\left(2\pi \frac{j}{n} - \alpha\right)\right\}$$

$$V_{ext} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l \left\{\cos\left(2\pi \frac{j}{n} - \alpha\right)\right\}$$

En faisant tourner le plan d'un angle infinitésimal $d\varphi$ autour de la direction $0A$, le cercle de rayon a décrit un fuseau sphérique d'ouverture $d\varphi$. Au point j faisons correspondre l'élément d'aire

$$a^2 \sin \theta_j \, d\theta_j \, d\varphi \quad ou \quad \theta_j = 2\pi \frac{j}{n} - \alpha$$

et la masse infinitésimale $dm_j = \sigma\, a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ où σ est une densité superficielle, constante par hypothèse.

Conservant les expressions obtenues ci-dessus pour les V, nous passons à la limite $n \to \infty$ de sorte que les masses dm_j recouvrent finalement tout le fuseau. Dans ces conditions, on écrira

$$\alpha \to 0\,, \ \theta_j \to \theta\,, \ dm_j \to dm = \sigma\, a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

et la somme sur l'indice j devient une intégrale sur θ, de 0 à 2π; intégrant en outre sur φ de 0 à π nous obtiendrons, en vertu de la propriété d'orthonormalité des P_l

$$V_{int} = \frac{4\pi\,\sigma\, a^2}{a} = \frac{m}{a} = const.$$

$$V_{ext} = \frac{m}{r}$$

ces deux expressions traduisent bien les théorèmes de Newton dont on fera l'extension, par superposition de couches minces, à une sphère pleine dont la densité de masse est fonction de la seule distance au centre.

Notons encore que le potentiel de la couche sphérique homogène infiniment mince de rayon a varie de façon continue quand on traverse cette couche, tandis que la force d'attraction par unité de masse subit une discontinuité. En effet, tant que $r < a$ l'attraction est nulle, $g_{\mathrm{int}} = 0$ et si $r > a$, elle vaut en valeur absolue

$$g_{\mathrm{ext}} = m/r^2 \,.$$

Enfin lorsque $r = a$, l'attraction subie par le point A de la part d'une zone infiniment étroite d'angle polaire θ vaudra, après projection sur OA,

$$dg = \frac{dm}{s^2} \sin\frac{\theta}{2}$$

où $dm = 2\pi a^2 \sigma \sin\theta d\theta$, $s = 2a \sin\frac{\theta}{2}$; après intégration sur θ de 0 à π, on obtient

$$g = m/2a^2 \quad = \tfrac{1}{2}\,(g_{\mathrm{int}} + g_{\mathrm{ext}})_a$$

Manuscrit reçu le 23 juin 1965.