

# Les axiomes de la géométrie et leur histoire

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **20 (1967)**

Heft 3

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739389>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LES AXIOMES DE LA GÉOMETRIE ET LEUR HISTOIRE <sup>1</sup>

PAR

**Paul ROSSIER**

---

« Vous ne m'honorez pas comme il faut; vous ne respectez pas mon œuvre en n'acceptant pas les perfectionnements qu'elle a reçus, et qui étaient mon plus cher désir; il n'est pas permis de s'arrêter dans la voie de la logique, il faut aller jusqu'au terme et ne pas laisser, au début de la géométrie, ces lacunes que je n'ai pas su combler et qui me choquent plus que toutes les géométries non euclidiennes, riemanniennes, non archimédiennes, cayleyennes, non pascaliennes, non arguésiennes ou autres. Ceux qui semblent avoir détruit mon œuvre sont ceux qui l'ont vraiment continuée. »

Telles sont les paroles que Jules Tannery prête à un « Euclide ressuscité » désigné par les Académies et les gouvernements comme « inspecteur mondial, dans l'ordre des mathématiques ».

Proposons-nous de donner une image sommaire de ce que pourrait être la partie consacrée aux axiomes de la géométrie, dans le rapport de l'illustre revenant.

La géométrie prit une forme scientifique chez les anciens Egyptiens, Babylo-niens et Chaldéens. Les théoriciens de cette époque eurent l'audace d'extrapoler à l'univers leur modeste science; cela appert de leur cosmologie. Cependant, l'incorrec-tion de certaines de leurs règles d'arpentage montre l'insuffisance de leur sens critique et l'absence trop fréquente chez eux de l'idée de démonstration.

On attribue aux Grecs la découverte de théorèmes importants basés, au moins en partie, sur une démonstration. Thalès <sup>2</sup> sut appliquer la similitude; Pythagore <sup>3</sup> découvrit son théorème; Eudoxe <sup>4</sup> fit usage de méthodes infinitésimales. Ce sont là de belles pierres qui serviront à la construction de l'édifice géométrique. Aucun de ces hommes ne fit de la géométrie un ensemble de propositions liées logiquement et possédant une base commune. Leurs démonstrations sont basées sur des propriétés

<sup>1</sup> Texte remanié d'une conférence à l'Ecole pratique des Hautes Etudes de Paris en mars 1964.

<sup>2</sup> THALÈS, vers — 600.

<sup>3</sup> PYTHAGORE, VI<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ.

<sup>4</sup> EUDOXE, — 406 à — 365.

dont la validité allait de soi; ils ne concevaient pas la possibilité (et encore moins la nécessité) de se poser des questions sur ces propositions, dues au sens commun.

Cette attitude est encore, à juste titre, celle adoptée dans l'enseignement élémentaire. Elle a souvent été celle de quelques philosophes qui ont tenté de reconstruire le monde par leur seule pensée. Quelles que soient la puissance et la profondeur de ces dernières réflexions, elles ne présentent pour notre sujet qu'un intérêt réduit.

L'étude de la valeur de la connaissance scientifique consiste en une analyse critique détaillée et précise des principes sur lesquels repose la discipline étudiée; si celle-ci a pris une forme déductive, l'étude de l'indépendance de ces principes, de la portée de chacune des hypothèses faites, l'élimination de celles qui ne sont pas indispensables, l'examen des édifices logiques que l'on peut construire en modifiant tout ou partie des propositions fondamentales, tels sont les sujets de réflexion des philosophes intéressés par les problèmes d'épistémologie scientifique.

Ce travail de critique constructive n'a pas été réalisé d'un coup; cette œuvre a été, est et sera certainement en constant perfectionnement.

## EUCLIDE

On ne sait presque rien de la vie d'Euclide; il vécut de — 330 à — 275; il enseigna à Alexandrie; il rédigea plusieurs ouvrages dont l'un, les *Eléments* le rendit illustre. Le texte original de cet ouvrage, sorte d'encyclopédie méthodique de géométrie et d'arithmétique, est perdu. Il est cependant bien connu grâce principalement aux nombreux commentaires qu'il suscita. Un grand nombre d'auteurs postérieurs d'ouvrages de géométrie se sont pliés au plan des *Eléments*.

Euclide distingue trois types de propositions fondamentales: les axiomes, les définitions et les postulats.

## AXIOMES D'EUCLIDE

Euclide appelle axiomes les propositions communes aux diverses sciences de la grandeur. Il ne donne pas une définition précise de cette notion.

Il explicite huit axiomes:

- I. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
- II. Si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, on obtient des choses égales.
- III. Si à des choses inégales, on ajoute des choses égales, on obtient des choses inégales.
- IV. Si on soustrait des choses égales de choses égales, on obtient des choses égales.
- V. Les doubles de choses égales sont égaux.

VI. Les moitiés de choses égales sont égales.

VII. Des choses superposables sont égales.

VIII. Le tout est plus grand que la partie.

Les axiomes I-VI et VIII concernent des objets pour lesquels on peut définir l'égalité ou l'inégalité. L'existence de la géométrie projective <sup>1</sup>, dans laquelle ces deux notions ne sont pas indispensables, montre que ces axiomes I-VI et VIII ne constituent pas une base nécessaire à toute géométrie. Ces axiomes sont fondamentaux en arithmétique. Si en géométrie on introduit axiomatiquement (comme en géométrie élémentaire) ou par des définitions (ainsi qu'on le fait en géométrie cayleyenne <sup>2</sup>), des grandeurs auxquelles on veut appliquer les règles de l'arithmétique, il est nécessaire de veiller à la validité des axiomes de l'arithmétique donc, aux yeux d'Euclide, à celle de ses axiomes I-VI et VIII.

L'axiome VII peut être considéré comme une définition de la congruence des figures. Cette définition suppose évidemment l'acquisition antérieure de la notion de superposition. Celle-ci résulte de l'abstraction d'un ensemble d'expériences faites sur des solides. Des tiges, des plaques peuvent être matériellement juxtaposées <sup>3</sup>; l'impénétrabilité des solides interdit pour eux la même opération. La superposition dont fait état l'axiome VII n'est donc pas la coïncidence matérielle; elle exige une extension et une interprétation appropriée de l'expérience.

L'axiome VIII n'appelle guère de remarque tant que le « tout » considéré est fini. Par contre, pour des ensembles ayant un nombre infini d'éléments, il peut être en défaut. En effet, dans ce cas, il est parfois possible d'établir une correspondance biunivoque entre tous les éléments d'un ensemble et une partie d'entre eux; l'exemple des nombres entiers et de leurs doubles est bien connu.

En géométrie, l'axiome VIII exige une définition précise de la notion de supériorité. Des géométries ont été construites dans lesquelles cet axiome n'est pas satisfait; cela est dû au critère choisi de comparaison des grandeurs géométriques.

L'application sans précaution de l'axiome VIII à des grandeurs variant continûment et surtout à des segments, des aires ou volumes infinis peut conduire à des mécomptes.

<sup>1</sup> La géométrie projective est constituée par l'ensemble des propriétés indépendantes des notions de longueur d'un segment, ou d'amplitude d'un angle. Dans cette géométrie, les termes égal, inégal, double, moitié, addition ou soustraction sont vides de sens, du moins à l'origine. Ils peuvent en prendre un par des conventions appropriées.

La géométrie projective, ignorée des Anciens, a été élaborée en majeure partie au XIX<sup>e</sup> siècle.

<sup>2</sup> Voir plus bas: Variété des aspects de la géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle.

<sup>3</sup> Suivant la façon dont elle est comprise, la superposition peut conduire à des relations bien différentes de l'égalité euclidienne. Considérons par exemple des calottes sphériques matérielles donc épaisses, convexes et concaves et disons de deux d'entre elles qu'elles sont « égales » si elles se superposent (ou s'appliquent l'une sur l'autre). Deux calottes « égales » à une troisième ne le sont pas entre elles.

Dans ses *Eléments*, Euclide fait un usage fréquent de comparaisons de grandeurs (segments de droites et d'angles notamment). De ce fait, on a appelé méthode euclidienne (et improprement géométrie euclidienne) l'étude des figures basées sur ces comparaisons de grandeurs géométriques. Au XIX<sup>e</sup> siècle, la méthode projective se constitua à côté de celle d'Euclide, imposant une refonte des bases de l'édifice axiomatique.

#### DÉFINITIONS D'EUCLIDE

Sous le nom de définitions, Euclide explique ce que sont les êtres fondamentaux de la géométrie et cela au moyen des propositions suivantes :

- I. Le point est une chose indivisible.
- II. Une ligne est une longueur sans largeur.
- III. Les extrémités d'une ligne sont des points.
- IV. La ligne droite est une ligne semblable à elle-même en tous ses points.
- V. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
- VI. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
- VII. Un plan est une surface qui est semblable à elle-même pour toutes les droites qui y sont situées.
- VIII. Si deux droites font des angles adjacents congruents entre eux, chacun d'eux est dit droit.
- IX. Les parallèles sont des droites qui ne se rencontrent pas.

Les propositions I-VII énoncent des propriétés des points, lignes, droites, surfaces et plans. Elles ne sont pas des définitions au sens logique du terme car d'autres objets satisfont aux conditions qu'elles énoncent : le point n'est pas seul à être indivisible ; la non-divisibilité est la caractéristique des nombres premiers ; un atome des physiciens anciens, pour ceux d'aujourd'hui, un quantum ou un électron ne sont pas divisibles ; un être vivant supérieur, une machine ne supportent pas de division importante sans perdre leur qualité fondamentale. Ces exemples n'appartiennent pas à la géométrie.

Considérons la notion de point en géométrie plane tangentielle<sup>1</sup> ; elle est confondue avec celle de faisceau et cette figure possède des éléments qui sont des droites. La définition proposée par Euclide pour le point exclut de la géométrie la

<sup>1</sup> La géométrie tangentielle plane a pour objet l'étude des figures planes constituées par des droites ; l'une de ses figures fondamentales est le faisceau de droites, ensemble des droites du plan qui passent par un point.

En géométrie projective, on constate l'identité des propriétés des systèmes de points alignés et de ceux de droites concourantes, à condition d'employer un langage approprié. Cette identité constitue la *dualité*. Cette notion s'étend à l'espace.

notion, pourtant si féconde, de dualité. Sinon, il faudrait pouvoir dire en géométrie plane que la droite, elle aussi, est indivisible; cela est en contradiction avec la notion d'extrémité d'une ligne (définition III).

La définition II exige la notion de longueur pour donner un sens à celle de ligne. La longueur est donc une notion fondamentale. Or les modernes ont découvert des lignes sur lesquelles il est impossible de définir la longueur de l'arc compris entre deux points<sup>1</sup>. Pour donner une valeur à la définition II, il faudrait tout d'abord préciser le sens du mot longueur.

Supposons le point et la droite préalablement définis; alors la « définition » III est un postulat, un théorème, ou la définition de la notion d'extrémité, à moins que la proposition III ne fasse partie des définitions du point et de la droite. Dans la définition IV, le mot extrémité réapparaît dans un sens différent de celui qu'il a sous II.

On pourrait multiplier ces remarques sur l'insuffisance des premières « définitions » d'Euclide. Les propositions ainsi appelées sont des énoncés descriptifs incomplets d'objets ou de dessins de dimensions finies et supposés parfaits. Ce ne sont pas des définitions au sens actuel du terme.

Les deux dernières définitions d'Euclide sont très différentes des précédentes. Admises les notions d'angles adjacents et de congruence des angles, la définition VIII est impeccable. On peut en dire autant de la définition IX, à la réserve près qu'Euclide parle de droites qui « infiniment prolongées » ne se rencontrent pas<sup>2</sup>; il ressort bien du contexte qu'Euclide considère la droite prise en son entier, tous prolongements compris.

La différence entre les sept premières propositions, tentatives de définitions des notions fondamentales et des deux dernières, définitions de relations géométriques importantes, mais non fondamentales, est frappante. Euclide est géomètre, il n'est pas épistémologiste.

#### POSTULATS D'EUCLIDE

Euclide demande qu'on lui accorde certaines propositions qu'il appelle *postulats*. Selon lui elles sont indispensables à l'exposé et au développement de la géométrie.

Énoncés en langage moderne, les six postulats d'Euclide sont les suivants:

- I. Si deux points sont donnés, il existe une unique droite à laquelle appartiennent ces deux points.

<sup>1</sup> Par définition, la longueur d'un arc d'une ligne courbe est la limite de la somme des longueurs des côtés d'une ligne brisée inscrite dans cette courbe, en supposant que la longueur de chacun des segments qui composent cette ligne brisée décroît indéfiniment. On a imaginé des courbes telles que, chaque fois que l'on double le nombre de côtés de la ligne brisée d'extrémités fixes, la longueur précédente est multipliée par un nombre constant, supérieur à un. En doublant indéfiniment le nombre de côtés, on multiplie la longueur de la corde initiale par un nombre croissant au-delà de toute limite.

<sup>2</sup> Euclide sous-entend que ces droites sont coplanaires.

- II. Il existe une droite à laquelle appartient tout segment rectiligne donné.
- III. Il existe un cercle de rayon quelconque, de centre donné quelconque.
- IV. Les angles droits sont congruents entre eux.
- V. Si deux droites en rencontrent une troisième et si elles font d'un côté de la sécante des angles internes dont la somme est inférieure à deux droits, ces deux droites se coupent et cela du côté de la sécante déterminé ci-dessus.
- VI. Deux droites coplanaires n'enferment pas une portion du plan qui les contient.

Ces propositions ont bien le caractère de postulats. Toutes ne peuvent pas être immédiatement énoncées; elles supposent l'établissement antérieur des définitions de diverses notions telles que segment, cercle ou angle droit. Cela est sans inconvénient.

En réalité, dans ses *Eléments*, Euclide fait implicitement usage d'autres postulats qu'il ne cite pas, relatifs notamment à l'ordre des points alignés, à l'existence de certaines figures. Dans divers ouvrages élémentaires, parfois inspirés par les *Eléments*, l'expression « la figure montre » remplace des postulats implicites.

Les postulats IV et V appellent quelques commentaires. Des géomètres modernes ont démontré la congruence des angles droits; Legendre<sup>1</sup> le fait en appliquant un axiome de continuité; Hilbert<sup>2</sup> y parvient en s'appuyant exclusivement sur les propriétés de congruence des figures.

Le postulat V suppose que l'on a préalablement donné un sens à l'addition de deux angles et aux notions d'angles plus petit ou plus grand que deux droits. Sans le dire, Euclide admet que les angles sont des grandeurs. De ce fait, ces termes ont un sens.

Du postulat V, on déduit l'unicité de la parallèle à une droite passant par un point donné; ce théorème est souvent appelé le « postulat d'Euclide » ou le « postulatum ». Moins simple et immédiat que les autres postulats, il a fait l'objet de nombreuses tentatives de démonstration; celles-ci ont conduit à l'élaboration des géométries non euclidiennes; il y a près d'un siècle, on a démontré l'indépendance de ce postulat, la vanité des essais de démonstration et la validité logique des géométries non euclidiennes<sup>3</sup>.

Les postulats V et VI ne sont pas entièrement indépendants. L'élaboration de la géométrie non euclidienne de Riemann<sup>4</sup> le montre.

Compte tenu des immenses progrès de la science accomplis depuis Euclide, les fondements donnés par lui à la géométrie présentent de graves lacunes. Cepen-

<sup>1</sup> Voir plus bas: Legendre et ses *Eléments*.

<sup>2</sup> Voir plus bas: Les « *Grundlagen der Geometrie* » de Hilbert.

<sup>3</sup> Voir plus bas: La crise non euclidienne.

<sup>4</sup> B. RIEMANN, 1826-1866. Dans sa géométrie, Riemann pose que deux droites situées dans un plan se coupent toujours. La sphère donne une image élémentaire de la géométrie riemannienne à condition d'attribuer aux grands cercles le rôle des droites. Or deux grands cercles d'une sphère limitent un fuseau. On a là un exemple de lien entre l'inexistence des non-sécantes et la non-validité du postulat VI.

nant, le simple fait qu'aujourd'hui encore les géomètres estiment indispensable d'exposer et de discuter cette œuvre montre sa valeur et son ampleur.

Euclide a la claire vision de la nécessité de poser à l'origine de la science logique un certain nombre de propositions de base. Il distingue les axiomes, dont le caractère dépasse (en général) la géométrie et les propositions strictement géométriques (définitions et postulats).

La partie la plus importante des *Eléments* est l'élaboration de l'ensemble de l'ouvrage. La Bible mise à part, aucune œuvre n'a été éditée, traduite, commentée ou plagiée autant qu'eux.

L'influence d'Euclide fut immense et longtemps, on pensa que les *Eléments* étaient un tel chef-d'œuvre que rien n'y pouvait être changé sans en diminuer la valeur. Cette conception est périmée, mais plus de deux mille ans s'écoulèrent avant que des progrès notables ne fussent accomplis dans le domaine des fondements de la géométrie.

#### LES DISCIPLES D'EUCLIDE

Jusqu'à une époque récente, nombreux furent les géomètres qui n'acceptaient que les progrès dus à l'extension de la science selon le mode euclidien. Les théorèmes découverts depuis Euclide n'apportent rien de neuf dans le domaine des fondements. L'idée d'une science de l'espace différente de celle construite par Euclide n'attire pas l'attention des géomètres. Cela ne signifie pas l'inexistence de tout désir de perfectionner les *Eléments* d'Euclide. Citons les exemples suivants.

Au 1<sup>er</sup> siècle avant Jésus-Christ, Posidonius<sup>1</sup> propose de définir les parallèles par la constance de la distance d'un point quelconque de l'une des deux parallèles à l'autre de ces droites. Cette définition sera souvent reprise. Elle exige une proposition permettant de montrer l'alignement de trois points d'un demi-plan équidistants de la droite limite de ce demi-plan.

Ptolémée<sup>2</sup> porte son attention sur le cinquième postulat; il montre que la somme des angles internes compris entre deux droites et une sécante ne peut être inférieure à deux droits que d'un seul côté de la sécante.

Proclus<sup>3</sup> considère la droite comme le lieu des points immobiles lors d'une rotation ou comme une ligne telle que deux de ses points étant immobiles, tous le sont. Cette proposition est à rapprocher de la définition I d'Euclide. L'idée de baser la géométrie sur la notion de déplacement sera souvent reprise<sup>4</sup>.

Proclus ne semble pas satisfait du cinquième postulat. Il propose de le remplacer par le suivant: sur l'une de deux droites sécantes on peut trouver un point dont la distance à l'autre droite est arbitrairement grande.

<sup>1</sup> POSIDONIUS, — 135 à — 50.

<sup>2</sup> PTOLÉMÉE, II<sup>e</sup> siècle après Jésus-Christ.

<sup>3</sup> PROCLUS, 410-485.

<sup>4</sup> Voir plus bas: Les déplacements et la théorie des groupes.



Au Moyen Age, la théorie des parallèles a été examinée plusieurs fois; au IX<sup>e</sup> siècle Al-Nirizi et au XII<sup>e</sup>, Gérard de Crémone reprennent la définition par l'équidistance. Au XIII<sup>e</sup> siècle, Nasir-Eddin admet que si deux droites  $a$  et  $b$  sont,  $a$  perpendiculaire à une droite  $c$ ,  $b$  oblique sur  $c$ , toute perpendiculaire abaissée d'un point de  $b$  sur  $a$  est de longueur moindre que le segment déterminé sur  $c$  par  $a$  et  $b$ , si elle est menée du côté de  $c$  où l'angle de  $b$  et  $c$  est aigu. Cet énoncé diffère peu du cinquième postulat; il est plus compliqué, car il fait appel à la notion de distance.

Ainsi, sporadiquement, des géomètres essaient de perfectionner l'œuvre du grand maître ancien. Leur échec augmente l'autorité d'Euclide. Il fallut attendre la période classique qui suivit la Renaissance pour voir quelques audacieux remettre en question les fondements de la géométrie.

#### DEUX RÉFORMATEURS: ARNAUD ET LE PÈRE LAMY

Les *Eléments* d'Euclide sont souvent présentés d'une façon formelle qui n'en facilite pas la compréhension. Quelques auteurs ont critiqué cette forme et ont cherché en outre à ordonner les propositions autrement que ne l'avait fait Euclide.

L'un des premiers fut Antoine Arnaud<sup>1</sup>, grand théologien, auteur fécond. Citons de lui la *Logique de Port-Royal* (Paris, 1662) et les *Nouveaux éléments de Géométrie* (Paris, 1668).

Pour Arnaud, « l'axiome est une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve ». Comme exemple, il cite l'axiome VIII d'Euclide: le tout est plus grand que la partie. L'expérience de la science est là pour montrer qu'une proposition peut être très claire et exiger une démonstration; la quadrature du cercle, le théorème de Fermat le montrent bien<sup>2</sup>. La clarté dont parle Arnaud s'appellera plus tard évidence.

Arnaud n'emploie pas le mot postulat, mais celui de demande; pour lui cette notion est très différente de celle d'Euclide: « on se sert de ce mot quand on a quelque chose à faire, qui est si facile qu'on n'a pas besoin de preuve pour démontrer qu'on a fait ce qu'on voulait ». Il donne l'exemple suivant: décrire un cercle de diamètre donné. Dans l'ouvrage, le mot ne revient que rarement et associé à axiome: « axiome ou demande ». Pour les modernes, l'idée est juste de confondre les notions d'axiome et de demande; mais c'est une erreur d'employer deux termes s'ils sont synonymes.

Selon Arnaud, « la définition [...] est la détermination d'un mot qui pourrait former diverses idées, à une idée claire et si distincte qu'elle revienne toujours dans l'esprit lorsqu'on se sert de ce mot ».

<sup>1</sup> A. ARNAUD, 1612-1694.

<sup>2</sup> Il a fallu attendre 1882 pour que soit démontrée l'impossibilité de construire au compas la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle de rayon donné.

FERMAT (1601-1665) a affirmé l'impossibilité de trouver quatre nombres entiers  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $n$ , supérieurs à deux, tels que  $a^n + b^n = c^n$ .

On ne sait pas si ce théorème est vrai.

L'exemple donné est malheureux : « on appelle parallélogramme une figure dont les côtés opposés sont parallèles ».

Pour l'époque, la notion de théorème est bien définie : « On appelle ainsi une proposition dont il faut démontrer la vérité. »

Par contre, le lemme est « une proposition qui n'est au lieu où elle est que pour servir de preuve à d'autres qui suivent ». Dans l'ouvrage, plusieurs des « livres » où sont introduites des notions nouvelles (parallèles, segments proportionnels) commencent par une suite de « lemmes » qui, dans le livre considéré, jouent le rôle de propositions de base, donc d'axiomes au sens moderne du mot.

Le livre premier commence par des « suppositions générales » dont voici l'essentiel.

« Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous savons naturellement. » L'auteur insiste sur cette connaissance « naturelle » donc intuitive : « Nous ne supposerons que ce qui se peut savoir par la seule lumière naturelle, sans l'aide d'aucune science. »

Voyons les suppositions générales relatives à l'espace :

« Je suppose [...] que l'on sache que ce qu'on appelle corps, espace, étendue (car tout cela signifie la même chose) a trois dimensions longueur largeur et profondeur. »

Suivent les définitions des surfaces et des lignes, où l'« on ne considère » que deux ou une dimensions.

Arnaud donne une liste de neuf axiomes relatifs à l'égalité et à l'inégalité. L'ordre est différent, mais le contenu est pratiquement le même que celui des axiomes d'Euclide ; VIII, I, II, IV, III et VI. La définition de la congruence donnée par l'axiome VII d'Euclide est absente. Un axiome est nouveau : « Le tout est égal à toutes les parties prises ensemble. »

Les quatre premiers livres sont consacrés à l'arithmétique. La géométrie apparaît au cinquième intitulé *De l'étendue*.

Arnaud revient sur les propositions données dans les suppositions générales sans apporter d'idées nouvelles. Puis il passe à des « avertissements » : « Les idées d'une surface plate et d'une ligne droite sont si simples qu'on ne ferait qu'embrouiller ces termes en les voulant définir. On peut seulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue. »

« Quoi qu'il n'y ait point au monde d'étendue qui n'ait que longueur et largeur sans profondeur, ou longueur sans largeur et encore moins de point qui n'ait ni longueur, ni largeur, ni profondeur, ce que disent les Géomètres des surfaces, des lignes et des points ne laisse pas d'être vrai parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est véritablement long large et profond, je puisse n'en considérer que la longueur et la largeur, sans faire attention à la profondeur, ou même à la longueur seule sans m'arrêter ni à la largeur, ni à la profondeur. »

Arnaud ne commet donc pas l'erreur d'essayer de définir le plan et la droite ; il admet une notion intuitive et dans le second avertissement, il montre la nécessité de l'abstraction qui doit être effectuée à partir des idées suggérées par l'intuition.

Plus bas, il revient sur la notion de droite : « Il est bon de remarquer ce que nous concevons naturellement être enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre si on veut pour sa définition.

« La ligne droite est la plus courte étendue entre deux de ses points. »

« Et celle qui approche le plus de la droite est aussi la plus courte; ce qui a donné l'occasion à Archimède d'établir ce principe ou Axiome. »

» Si deux lignes sur le même plan ont les extrémités communes et sont courbes ou creuses vers la même part, celle qui est contenue est plus courte que celle qui la contient. »

« Ayant deux points donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre. »

« Et on n'en peut mener qu'une. »

« Si une ligne droite est immédiatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes. »

« Deux lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point. »

« Deux lignes droites qui étant prolongées vers un même côté s'approchent peu à peu, se couperont à la fin. »

La remarque que ces propriétés de la droite peuvent en constituer une définition est digne d'attention; Arnaud cherche évidemment à n'omettre aucune des propriétés dont il fera usage. A nos yeux, ce système d'axiomes est surabondant; ce défaut est moindre que celui d'omission.

Ces quelques extraits des *Nouveaux Eléments de Géométrie* montrent qu'Arnaud a eu parfois une attitude très moderne sur les fondements de la géométrie. Malheureusement, cet ouvrage est critiquable sur de nombreux points. N'insistons pas sur l'ordre des matières: droite et cercle, perpendicularité; parallélisme; cercle et fonctions circulaires; angles, similitude, polygones, triangles et quadrilatères; aires. La confusion est regrettable entre les axiomes et les lemmes; l'unité de méthode est loin de régner dans les divers livres et quelques-uns commencent par des considérations destinées plus à convaincre le lecteur qu'à exercer son sens logique. L'ouvrage est hétérogène. L'auteur dit l'avoir écrit un peu hâtivement. Réalisés avec plus de soin, les *Nouveaux Eléments* d'Arnaud auraient pu constituer un livre important dans l'histoire de la science. Quel eut été le nombre de lecteurs capables d'en apprécier la valeur? L'autorité d'Euclide était encore immense à cette époque.

Arnaud eut un disciple, le R. P. Lamy<sup>1</sup>. L'œuvre de celui-ci porte sur la philosophie, la théologie, les lettres et les sciences. Son livre *Les Eléments de géométrie ou de la mesure de l'étendue* parut en 1685. Il fut réédité et perfectionné à plusieurs reprises<sup>2</sup>.

L'auteur considère que « c'est dans [les] *Eléments* de Monsieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel qui n'est point dans ceux d'Euclide ». Il se propose d'écrire un traité plus complet que celui d'Arnaud.

<sup>1</sup> B. LAMY, 1640-1715.

<sup>2</sup> Nous citons la sixième édition, parue en 1734.

Dans l'« explication des termes », il appelle « *axiome* une vérité claire et constante qu'on connaît sans étude, dont tout le monde convient ». Dire qu'un axiome est connu sans étude est évidemment abusif; par contre l'assentiment général est une condition nouvelle; l'axiome n'est plus une vérité nécessaire.

La « *demande* ou *proposition évidente* [...] n'est pas connue avant qu'on l'étudie »; elle « le devient aussitôt qu'on fait attention ». Un contemporain confondrait les notions d'axiome et de demande.

« Le *lemme* est une proposition qui n'est au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent. » Dans l'ouvrage, les lemmes sont des théorèmes, contrairement à ce que faisait Arnaud.

La « *définition* est une proposition qui détermine l'idée d'un mot; ou qui donne une idée distincte de la chose qu'on veut que ce mot signifie ».

Le R. P. Lamy pose ensuite les dix axiomes suivants: axiome VIII d'Euclide, celui d'Arnaud sur le tout égal à la somme des parties, les numéros I, II, IV et III d'Euclide, une propriété analogue sur la soustraction de choses égales de choses inégales. Il affirme ensuite la nullité du résultat de la soustraction d'une chose d'elle-même. Il complète l'axiome VI d'Euclide en envisageant la moitié, le tiers, etc. de la grandeur considérée. Il termine par l'axiome définissant la congruence par superposition.

Il ne considère pas sa liste d'axiomes comme complète, car, « on pourrait proposer plusieurs autres semblables axiomes; c'est-à-dire plusieurs autres vérités qu'on ne peut ignorer et dont on ne dispute point ». Il cite les deux exemples suivants: « Une chose est vraie par construction quand elle est faite exactement selon une règle dont on était convenu » [...] « Une proposition est incontestable lorsqu'on ne la peut nier sans dire une chose absurde. » Ces exemples montrent que, sous le nom d'axiomes, le P. Lamy groupe des conventions géométriques et des principes de logique, celui du tiers exclu dans le dernier exemple.

L'auteur a une idée nette de ce que sont les théories mathématiques: « On réduit toutes les démonstrations dont on se sert à ce petit nombre de vérités qu'on vient de proposer et aux notions claires et distinctes des choses dont on doit parler. »

Le P. Lamy adopte le plan d'Arnaud. Voici les titres abrégés de ses « livres »:

Des lignes droites et circulaires, Des surfaces planes, Des raisons et proportions des lignes et des figures (ce livre est précédé d'un rappel d'arithmétique), Des solides, De la méthode. Une « introduction aux sections coniques » termine l'ouvrage. Les premiers livres constituent un traité de géométrie élémentaire; le dernier est consacré aux applications de l'algèbre à la géométrie; les constructions à la règle et au compas y sont étudiées.

Dans chaque chapitre où est introduite une notion nouvelle, l'auteur pose de nombreuses « propositions évidentes ». Par exemple, à propos de la droite, il commence par un « avertissement »: « Ces propositions sont contenues dans l'idée de ligne droite [...]. Les Géomètres supposent toutes ces propositions sans le dire.

Je les exprime, parce qu'elles feront que les notions de la ligne droite seront plus claires. » L'auteur a donc le souci d'explicitier toutes les propriétés dont il fera usage.

En abrégé, voici les propriétés fondamentales des droites. Les extrémités d'une droite sont des points. L'intersection de deux droites est un point. Une courbe menée par deux points est plus longue que la droite déterminée par ces deux points. Par deux points, on peut mener une droite et on n'en peut mener qu'une. Une droite peut être prolongée et cela dans deux sens. Deux droites distinctes qui se coupent n'ont que leur point d'intersection en commun. Toute partie de droite est une droite.

Ces propositions montrent une certaine confusion entre la droite et le segment. L'avant-dernière est un théorème, d'ailleurs correctement démontré par l'auteur.

Les autres figures fondamentales, le cercle, les droites perpendiculaires ou parallèles, les angles, les polygones, les plans, les polyèdres, puis les aires, les volumes et leur commensurabilité donnent l'occasion de poser quelques « propositions évidentes » qui jouent le rôle d'axiomes. Le système obtenu est surabondant, mais le P. Lamy a le souci de ne laisser échapper aucune proposition de base.

Ces *Eléments* sont plus complets, plus méthodiques et homogènes que ceux d'Arnaud. Leur succès fut grand puisque leurs éditions s'échelonnent sur un demi-siècle et que la dernière fut publiée près de vingt ans après la mort de l'auteur. Le bouleversement des idées admises qui se produisit durant la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle éclipsa cette œuvre.

#### LES INTUITIFS

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, les *Eléments* d'Euclide et leur caractère formel furent de nouveau critiqués. Un auteur de grand renom, Clairaut<sup>1</sup>, rédigea un ouvrage de conception très différente. Ses *Eléments de Géométrie*<sup>2</sup> étaient destinés à enseigner la géométrie à la marquise du Châtelet.

Clairaut rompt radicalement avec la tradition; il déclare que, pour la géométrie, « les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée [.....]. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes élémentaires qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur [.....]. J'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes [.....] de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir [.....]. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte et n'est propre qu'à obscurcir la vérité. »

<sup>1</sup> A. CLAIRAUT, 1713-1765.

<sup>2</sup> 1<sup>re</sup> éd. 1741.

Ces extraits de la préface donnent le ton de l'œuvre et Clairaut conserve dans tout son ouvrage une unité de méthode remarquable. Il part de problèmes pratiques. Quelques titres le montrent bien :

« Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains. »

« La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre et par conséquent la mesure de la distance entre deux points. »

« Une ligne qui tombe sur une autre sans pencher sur elle d'aucun côté est perpendiculaire à cette ligne. »

Après Clairaut, Louis Bertrand<sup>1</sup> publia son *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*<sup>2</sup>. Le tome deux est consacré à la géométrie. En voici les premières lignes.

« La Géométrie comme toute autre science a sa racine dans les idées communes à tous les hommes : C'est de ce fonds d'idées que les premiers Inventeurs ont tiré les principes et les germes des connaissances dont ils ont fait présent au Genre-Humain. D'où il paraît qu'en toute science, on peut distinguer deux parties ; la première qui consiste en l'assemblage des principes ou notions primitives desquelles cette science dérive ; la seconde qui renferme le développement ou les conséquences de ces principes.

» Par rapport aux principes, comme ils sont dans toutes les têtes, il semble qu'à cet égard la science n'oppose ni résistance ni difficulté à vaincre. Cependant, le choix qu'il faut faire des principes, le degré de netteté et de simplicité auquel il faut les réduire, et la nécessité de les énoncer en termes propres, biens connus, d'une façon claire et précise ; tout cela est fort difficile. »

Dans l'élaboration de son ouvrage, Bertrand renonce à attaquer ces difficultés ; comme Clairaut, il analyse un problème pratique simple et suppose « qu'un Chasseur ayant tué un Daim d'un coup de flèche, voulut savoir à quelle distance il avait atteint sa proie ». De l'analyse des réflexions du chasseur, l'auteur tire quelques propositions fondamentales et, répétant le procédé, il finit par obtenir une base suffisante (et surabondante) pour l'élaboration de la géométrie.

Cependant Clairaut et Bertrand sont très différents sur un point. Le premier refuse d'examiner le problème des fondements et en minimise l'importance, le second reconnaît son existence et en mesure la difficulté.

Ainsi, pour des motifs variés, les géomètres intuitifs renoncent à l'étude du problème des fondements de leur science. Ils ont une attitude qui se rapproche de celle des physiciens.

Nombreux sont les ouvrages de géométrie destinés à l'enseignement élémentaire ou professionnel inspirés par les doctrines des intuitifs. Le problème qu'ont à résoudre leurs auteurs n'appartient pas à la théorie de la connaissance. Au contraire, les mathé-

<sup>1</sup> L. BERTRAND, professeur à l'Académie de Genève, 1731-1812.

<sup>2</sup> 1778. Réédition de la partie géométrique après révision sous le titre *Eléments de géométrie*, 1812.

maticiens actuels attribuent au problème « difficile » de Bertrand une importance capitale.

#### LEGENDRE ET SES « ELÉMENTS »

En 1794, Legendre <sup>1</sup> publia ses *Eléments de Géométrie*. Cet ouvrage fut souvent réédité (29<sup>e</sup> édition 1889); il fut révisé par Blanchet. Il inspira de nombreux ouvrages d'enseignement.

Legendre examine le problème des fondements de la géométrie et porte longuement son attention sur la théorie des parallèles. Il ne se libère pas entièrement de l'autorité d'Euclide.

Le livre I est intitulé *Les principes*; il commence ainsi <sup>2</sup>:

« Définitions.

» I. La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

» L'étendue a trois dimensions longueur, largeur et hauteur.

» II. La ligne est une longueur sans largeur.

» Les extrémités d'une ligne s'appellent points; le point n'a pas d'étendue.

» III. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. »

Quelques pages plus bas, le paragraphe intitulé « Explication des termes et des signes » commence comme suit:

« *Axiome* est une proposition évidente par elle-même.

» *Théorème* est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*. »

Les axiomes de Legendre sont les suivants:

« 1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

» 2. Le tout est plus grand que la partie.

» 3. Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé.

» 4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule droite.

» 5. Deux grandeurs, lignes surfaces ou solides sont égales lorsque étant placées l'une sur l'autre, elles coïncident dans toute leur étendue. »

De ce qui précède, il résulte que Legendre considère la géométrie comme une science des grandeurs.

Les définitions II de la ligne et du point sont celles données sous I, II et III par Euclide. La définition III de la droite est sans intérêt car elle suppose connue la notion préalable de longueur; elle n'est d'ailleurs jamais employée.

<sup>1</sup> A. M. LEGENDRE, 1752-1833. A. BLANCHET, 1813-?

<sup>2</sup> Nous suivons la 6<sup>e</sup> édition (1806).

Legendre donne une définition nouvelle de l'axiome qui jouit longtemps d'une grande faveur: « proposition évidente par elle-même ». L'évidence est une notion qui ne résiste pas à la critique; on lui doit bien des mécomptes; ce qui est évident pour l'un ne l'est pas pour l'autre. « Les choses évidentes », dira plus tard Oswald, « ce sont celles que l'on admet sans réfléchir »<sup>1</sup>.

Selon Legendre, un théorème est une vérité. L'armature de la géométrie est constituée de théorèmes, ainsi la géométrie est vraie. Il y a là une attitude caractéristique de l'époque antérieure à la mise au point des géométries non euclidiennes.

Les axiomes de Legendre et ceux d'Euclide (postulats compris) ont de nombreux points communs. L'ordre des matières est différent; les axiomes 1 de Legendre et I d'Euclide, le 2 et le VIII sont identiques; les axiomes 4 et 5 sont le postulat I et l'axiome VII. L'axiome 3 apporte une idée moins bien exprimée antérieurement par Arnaud.

De ce qui précède, il résulte clairement que, dans l'étude des fondements de la géométrie, Legendre ne fait pas de progrès notable. Par contre, il fait œuvre nouvelle dans la théorie des parallèles.

En 1845, Blanchet publie des *Eléments de géométrie par A. M. Legendre avec additions et modifications*. Dans l'édition suivante (1849), Blanchet ajoute à son propre texte (293 pages) celui de la 15<sup>e</sup> édition de Legendre (271 pages) destiné « aux personnes qui adoptent le traité de Legendre sans aucun changement ».

Dans ses définitions initiales, Blanchet se sépare de Legendre:

- « I. Tout corps occupe dans l'espace indéfini un lieu déterminé qu'on appelle *volume*.
- » II. La surface d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.
- » III. Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé une *ligne*.
- » IV. Un point est le lieu où deux lignes se coupent.
- » V. On conçoit les volumes, les surfaces, les lignes indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.
- » VI. On donne le nom de figure aux volumes, aux surfaces et aux lignes.
- » VII. La géométrie a pour objet la mesure des figures, et l'étude de leurs propriétés.
- » VIII. La ligne droite est une ligne indéfinie qui est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. »

« On doit regarder comme évident que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue. »

<sup>1</sup> W. OSWALD, 1853-1912. *L'énergie*, 1912.



La définition II de la « surface d'un corps » ne peut pas être prise comme définition générale des surfaces: elle ignore les surfaces à un seul côté, qui, à l'époque de Blanchet, venaient d'être découvertes par Mœbius <sup>1</sup>.

La dernière phrase citée montre chez son auteur une forme de pensée intéressante et nouvelle: « On doit regarder comme évident. » La proposition n'est plus évidente par elle-même. Dans la suite, Blanchet s'écarte de cette attitude et reprend textuellement l'« Explication des termes et des signes » de Legendre. Ses axiomes sont ceux de son maître.

\* L'influence de Legendre (et de Blanchet) fut considérable et son autorité s'étendit sur plus d'un siècle; les éditions successives des *Eléments* de Legendre ne tiennent aucun compte de la véritable métamorphose subie par la géométrie pendant cette période. \*

#### DELBOEUF ET SES « PROLÉGOMÈNES » <sup>2</sup>

En 1860, Delboeuf publie un ouvrage consacré à une étude critique de la géométrie et à une tentative d'élaboration d'une géométrie élémentaire nouvelle.

Un premier livre est consacré à un problème philosophique, « l'unité dans la science ». On y trouve la définition suivante: *La géométrie (proprement dite) a pour objet les déterminations ou figures idéales de l'espace.*

A l'époque, la validité logique de la géométrie lobatchevskienne n'avait pas été reconnue et Delboeuf pose la question suivante: « Y aurait-il possibilité, en partant d'hypothèses autres que les axiomes reconnus, de construire une science enchaînée, quoique fausse, comme il arrive dans les sciences naturelles ? A cet argument force est de répondre *oui* sans pouvoir établir par le fait la justesse de notre réponse si il ne s'était pas trouvé quelqu'un qui s'est chargé de poser ce fait. Partant d'une idée qui avait été émise par Gauss, M. Lobatchevski a essayé de fonder une géométrie dans la supposition que *la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux droits.* »

Suit un exposé sommaire de quelques propriétés de géométrie lobatchevskienne.

Le livre II est intitulé *Principes purs de géométrie*. Il commence comme suit:

« En géométrie, comme dans toute science, il faut distinguer deux choses: le fondement et la forme; les vérités et la manière dont elles sont enchaînées; le système et la méthode.

<sup>1</sup> A. F. MÖBIUS, 1790-1868. Le « ruban » de Mœbius est construit comme suit. Soit un rectangle de papier ABCD, où A et C sont des sommets opposés. Courbons-le de façon à superposer les sommets A et C d'une part, B et D d'autre part. La surface ainsi obtenue ne peut pas être tout ou partie de la limite d'un corps car elle ne possède qu'un seul côté. On s'en convainc facilement en la badigeonnant avec une couleur.

<sup>2</sup> J. DELBOEUF (1831-1896), *Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats*. Un second ouvrage du même auteur est sa *Géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide*, 1897.

« La forme se ramène à un nombre déterminé de principes logiques, ne donnant aucune connaissance réelle, le fond, à certaines vérités premières, objectives, points d'appui de la science. Les premiers sont les *axiomes* de la géométrie; les seconds sont les *postulats* ou *hypothèses*. »

Le premier chapitre est consacré aux méthodes, le second à une critique des propositions fondamentales des ouvrages classiques, des *Eléments* de Legendre et de Blanchet notamment.

Le livre III, *Critique générale et solution*, contient entre autres un chapitre intitulé « Fondements nouveaux de la géométrie ». L'auteur tente de donner la définition des figures fondamentales contenant des attributs suffisamment généraux pour en déduire les propositions admises précédemment comme axiomes. Malheureusement, ces attributs sont trop vagues pour que la méthode soit satisfaisante. Donnons un exemple <sup>1</sup>:

« *Définition.* — La droite est une ligne homogène, c'est-à-dire dont les parties, prises indifféremment, sont semblables entre elles ou ne diffèrent qu'en longueur.

» Nous démontrerons ses propriétés en partant du *concept* de ligne homogène.

» THÉORÈME I. — Une droite est déterminée quand on donne l'une quelconque de ses parties.

» Car la majoration de cette partie reproduit la droite.

» Si l'on fait attention à la manière dont cette portion, quand on la majore, reproduit la droite, on verra que ce sont précisément les deux points limites de cette portion qui décrivent la ligne entière, et qu'ils ne décrivent qu'elle seule, l'un de ces points au moins passant à chaque instant par une portion nouvelle, de plus en plus écartée de l'autre point. »

Dans ce texte, pour un géomètre moderne, autant de phrases, autant d'affirmations gratuites, donc d'axiomes. L'auteur tire tout cela de l'homogénéité de la droite !

Delbœuf qui, comme nous l'avons vu, connaît l'existence de la géométrie « imaginaire » de Lobatchevski et la considère comme fautive, se doit de l'éliminer. Il le fait en introduisant la notion de direction: « on nomme *direction* d'une droite la position de cette droite autour d'un de ses points. »

Cette notion le conduit au théorème suivant: « La somme des changements de direction de tous les côtés, moins un, d'un polygone est égale à la direction de ce côté. »

Ici encore, ni les changements de direction, ni leur somme ne sont définis. Le « théorème » n'est donc qu'une affirmation gratuite de la propriété de la somme des angles extérieurs d'un polygone.

Plus bas, les parallèles sont définies comme ayant la même direction et le théorème suivant est énoncé: « Deux parallèles font avec une sécante des angles correspondants égaux.

» Cette proposition est évidente. »

<sup>1</sup> Nous abrégeons et omettons certaines digressions.

De l'ouvrage de Delbœuf, on peut retenir une critique féconde des travaux antérieurs; par contre, l'intérêt principal de sa contribution à l'étude des fondements est de montrer combien le problème est encore mal posé à son époque.

#### LA CRISE NON EUCLIDIENNE

De tout temps, on a pressenti que la théorie des parallèles était le point faible de la géométrie d'Euclide; nous avons vu quelques essais de perfectionnements tentés dans l'antiquité ou le Moyen Age. Dès le XVII<sup>e</sup> siècle, Borelli<sup>1</sup> reprend et précise la définition par équidistance des parallèles. Wallis<sup>2</sup> suppose l'existence de triangles semblables non congruents; à partir de là, il démontre le cinquième postulat<sup>3</sup>.

Le problème des parallèles prend une tournure toute différente avec Saccheri<sup>4</sup>. L'année de sa mort, il publie un ouvrage intitulé *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Le titre est significatif; Saccheri croit « sauver » Euclide.

Il étudie le quadrilatère birectangle isocèle ABCD, où les angles ABC et BCD sont droits et où les côtés AB et CD sont congruents; il montre que les angles en A et D sont congruents et il fait trois hypothèses: ces angles sont droits (comme l'enseigne Euclide), obtus ou aigus. En se basant sur le fait qu'il est possible de construire un segment plus long que tout segment donné, il montre que l'hypothèse de l'angle obtus doit être éliminée. Il est moins heureux dans le cas de l'angle aigu; il l'exclut en considérant qu'il répugne à la nature de deux droites particulières d'une certaine figure de posséder une perpendiculaire commune à l'infini. Saccheri ne voit pas qu'il y a là un postulat encore moins clair que le cinquième<sup>5</sup>.

Cependant, l'attitude de Saccheri est d'un grand intérêt par le fait qu'il suppose tout d'abord la possibilité des trois hypothèses des angles droits, aigus ou obtus. C'est là un fait considérable. L'attitude ancienne qui fait de la géométrie une sorte de science unique, parfaite et définitive est abandonnée. Saccheri n'a cependant pas suffisamment d'imagination pour créer une géométrie non euclidienne.

Lambert<sup>6</sup> a rédigé en 1766 une *Theorie der Parallellinien*, publiée seulement en 1786 où il étudie le quadrilatère trirectangle; il fait aussi trois hypothèses sur le quatrième angle: droit, aigu ou obtus. Comme Saccheri, il exclut ce dernier cas en se basant sur l'infinité de la droite. Dans le cas de l'angle aigu, il montre l'existence d'une unité absolue de longueur. De l'inexistence physique de cette unité, il conclut au rejet de l'hypothèse de l'angle aigu; il est ainsi conduit à la validité de la théorie euclidienne. Lambert a une idée nette de la géométrie non euclidienne. Il a laissé

<sup>1</sup> G. A. BORELLI, 1608-1671.

<sup>2</sup> J. WALLIS, 1616-1703.

<sup>3</sup> DEHN démontrera en 1900 la nécessité où se trouvait Wallis de faire usage de la continuité.

<sup>4</sup> G. SACCHERI, 1667-1733.

<sup>5</sup> En géométrie cayleyenne parabolique, deux droites ont une perpendiculaire commune à l'infini

<sup>6</sup> J. H. LAMBERT, 1728-1777.

à Lobatchevski<sup>1</sup> et à Bolyai<sup>2</sup> la gloire d'en faire un sujet d'étude méritant un effort prolongé. Il fallait pour cela l'audace d'un Gauss<sup>3</sup>; celui-ci, après avoir découvert les résultats principaux, renonça à les publier, « par crainte des cris des Béotiens » !

Ainsi, durant la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, naît cette géométrie quelque peu monstrueuse pour l'époque, qui est qualifiée de non euclidienne ou de lobatchevskienne.

Cet être vigoureux se refuse à succomber sous la contradiction. Lobatchevski montre qu'à condition de choisir suffisamment grande l'unité absolue de longueur, les mesures terrestres et astronomiques n'interdisent pas de choisir la nouvelle géométrie comme base d'une physique terrestre et cosmique. Quant à la contradiction attendue et cherchée par d'autres, il montre qu'on ne la trouvera pas dans la trigonométrie sphérique puisque celle qu'il a élaborée ne diffère pas de celle basée sur la théorie classique des parallèles. Un peu plus tard, Beltrami<sup>4</sup> montrait que si la géométrie non euclidienne plane est contradictoire, il existe une contradiction entre deux propriétés d'une certaine surface de révolution, la pseudo-sphère; celle-ci partage avec la sphère la possibilité d'admettre sur elle des déplacements dépendant de trois paramètres. Peu après, Klein<sup>5</sup> tirait de la géométrie cayleyenne la même solidarité logique et l'étendait à l'espace. Poincaré<sup>6</sup> donna ensuite une autre preuve de cette relation. La vanité de l'espoir de voir disparaître l'intruse qu'était la géométrie non euclidienne était bien établie.

Ainsi, au milieu du siècle passé, la géométrie classique d'Euclide a perdu son monopole; elle n'est plus nécessairement vraie. Elle est « commode » comme le dira Poincaré. Devant sa turbulente sœur cadette, la géométrie antique, sorte de chapitre de la métaphysique, a perdu son caractère d'universalité; il faudra en reconstruire les bases et, dans cette œuvre, Euclide et Lobatchevski auront tous deux droit de présence. C'est tout un monde nouveau qui s'ouvre devant l'homme de science.

L'importance de la crise ouverte par la découverte de la géométrie non euclidienne ne fut pas immédiatement comprise. Par elle était donnée la preuve de la capacité de l'esprit humain de construire une doctrine opposée à la géométrie classique; celle-ci était considérée par beaucoup comme une sorte de nécessité de l'esprit, comme un à priori inéluctable. Si, jusqu'alors, science et philosophie avaient pu se développer sans conflits graves, désormais ces deux disciplines devaient s'obliger à des concessions réciproques. La science ne pouvant détruire sa propre œuvre, la philosophie devait désormais compter avec elle, et prenait un caractère dialectique.

<sup>1</sup> N. LOBATCHEVSKI, 1792-1856.

<sup>2</sup> Wolfgang BOLYAI (1775-1856) s'intéressa à la théorie des parallèles; son fils Jean BOLYAI (1802-1860) obtint plusieurs résultats de géométrie non-euclidienne).

<sup>3</sup> K. F. GAUSS, 1777-1855.

<sup>4</sup> E. BELTRAMI, 1835-1900.

<sup>5</sup> F. KLEIN, 1849-1925.

<sup>6</sup> H. POINCARÉ, 1854-1912.

Il nous est facile aujourd'hui de décrire cette transformation; il n'en était pas de même à l'époque où des philosophes tels que Hegel<sup>1</sup> tentaient la reconstruction du monde par la seule puissance de l'esprit, cet esprit auquel Kant<sup>2</sup> avait voulu imposer à priori une forme euclidienne de l'espace !

La découverte de la géométrie lobatchevskienne déclancha des mouvements divers; quelques-uns eurent une influence sur le problème des fondements.

#### VARIÉTÉ DES ASPECTS DE LA GÉOMÉTRIE AU XIX<sup>e</sup> SIÈCLE

Au commencement du XIX<sup>e</sup> siècle, l'état de la géométrie peut être résumé comme suit: Euclide et sa méthode règnent incontestablement, parfois quelque peu enrichis, par Legendre, Carnot<sup>3</sup> et quelques auteurs plus anciens. La géométrie analytique de Descartes<sup>4</sup> est en plein épanouissement; elle caractérise la géométrie « moderne » de l'époque, opposée aux méthodes anciennes. La géométrie descriptive, enseignée par Monge<sup>5</sup> et Lacroix<sup>6</sup> donne l'occasion aux élèves des grandes écoles d'appliquer des méthodes nouvelles à des figures plus complexes que celles envisagées par les Anciens. La géométrie différentielle, où avait brillé Euler<sup>7</sup>, s'étendait avec Meusnier<sup>8</sup>, Monge et Gauss.

L'étude des surfaces, celles des quadriques notamment, n'était pas toujours facile au moyen des similitudes, à la façon d'Euclide.

La géométrie non euclidienne allait germer dans les cerveaux de Gauss, des deux Bolyai et de Lobatchevski.

Poncelet<sup>9</sup>, élève de Monge, occupa ses loisirs de prisonnier de guerre à Saratow à étudier la méthode des projections et à en éprouver la fécondité; il aboutit au célèbre *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822. Dans cet ouvrage, apparaît un état d'esprit nouveau. Aux procédés euclidiens de démonstration, Poncelet substitue certaines transformations; il généralise ainsi aux coniques et aux quadriques des propriétés classiques du cercle et de la sphère. Son audace le pousse à appliquer avec bonheur un certain « principe de continuité » lui permettant de faire jouer aux figures imaginaires un rôle analogue à celui des êtres géométriques réels. Peu après, Gergonne<sup>10</sup> montre tout l'intérêt de la dualité.

Les géomètres disciples de Poncelet étaient peu soucieux de rigueur et toute méthode féconde était bonne pour eux, du fait même de sa fécondité. On

<sup>1</sup> G. W. F. HEGEL, 1770-1831.

<sup>2</sup> E. KANT, 1724-1804.

<sup>3</sup> L. CARNOT, 1753-1823.

<sup>4</sup> R. DESCARTES, 1596-1650.

<sup>5</sup> G. MONGE, 1746-1818.

<sup>6</sup> S. F. LACROIX, 1765-1843.

<sup>7</sup> L. EULER, 1707-1783.

<sup>8</sup> J. B. MEUSNIER, 1754-1793.

<sup>9</sup> J. V. PONCELET, 1788-1867.

<sup>10</sup> J. D. GERGONNE, 1771-1859.

était conscient de la nécessité de construire la géométrie projective à partir de propriétés projectives, c'est-à-dire conservées par une projection centrale. Ce fut l'œuvre de von Staudt<sup>1</sup> qui, en 1847, publie sa *Geometrie der Lage*, complétée près de dix ans plus tard par ses *Beiträge zur Geometrie der Lage*. La construction fondamentale de v. Staudt est celle du groupe harmonique de points ou de droites au moyen du quadrilatère ou du quadrangle complet. L'application d'un théorème dû à Desargues<sup>2</sup> sur les triangles perspectifs<sup>3</sup> est fondamentale en ces matières.

L'œuvre de v. Staudt a dû être reprise et précisée, notamment en ce qui concerne la continuité. Même en analyse, cette notion n'avait pas atteint, à cette époque, une perfection suffisante.

La géométrie élaborée par v. Staudt n'est ni euclidienne ni non euclidienne. Un nouvel aspect de l'édifice géométrique était ainsi mis en évidence.

Sur d'autres points, on apporta encore des perfectionnements de détail. En 1827, Mœbius montrait par la méthode des coordonnées barycentriques la possibilité d'opérer analytiquement sur des éléments infiniment éloignés sans recours à des passages à la limite, mais en annulant une certaine expression algébrique simple. De ce fait, l'infini de la géométrie prenait un caractère très différent de celui qu'il possède en analyse.

Par des méthodes étendant celles de la géométrie analytique classique, Plücker<sup>4</sup> introduisait dans la science la géométrie tangentielle; il montrait qu'en prenant comme élément fondamental la droite de l'espace, on était conduit à des figures nouvelles dont plusieurs avaient déjà été l'objet de travaux de détail. Mais surtout, Plücker montrait la possibilité de construire une géométrie analytique satisfaisant à la dualité alors que, dans les exposés antérieurs, le point jouait un rôle privilégié.

Un mathématicien de premier rang, malheureusement disparu trop jeune, Riemann, apporta à la géométrie deux contributions importantes. En 1854, il présentait un mémoire *Sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie*, dont le titre à lui seul est significatif: la géométrie est basée sur des hypothèses. Dans ce travail, Riemann propose de renoncer à toute notion de parallélisme et de poser axiomatiquement que deux droites coplanaires possèdent toujours une intersection à distance accessible. Cela impose l'obligation de renoncer à l'axiome de l'infinité de la longueur de la droite; les géomètres sont ainsi conduits à une géométrie non euclidienne nouvelle dans laquelle l'hypothèse de « l'angle obtus », éliminée par Saccheri, Lambert et Legendre, est valable.

<sup>1</sup> C. v. STAUDT, 1798-1867.

<sup>2</sup> G. DESARGUES, 1591-1662.

<sup>3</sup> Si les sommets de deux triangles sont alignés sur un point, leurs côtés homologues se coupent en trois points alignés.

<sup>4</sup> J. PLÜCKER, 1801-1868.

En géométrie différentielle, Gauss avait montré que les propriétés des figures tracées sur des surfaces sont liées à celles des coefficients de l'élément linéaire, forme quadratique des différentielles de deux variables<sup>1</sup>. Dans son mémoire, Riemann propose d'examiner des figures dont l'élément linéaire dépend de plus de deux variables. Autrement dit, il envisage l'étude d'hypersurfaces extérieures à l'espace habituel ou tridimensionnel.

Cette géométrie multidimensionnelle était dans l'air. En mécanique des corps déformables et en dynamique des solides, les physiciens avaient vu apparaître des «moments d'inertie» qui variaient comme la quatrième ou la cinquième puissance du rapport de similitude. Dans son *Calcul extensif*<sup>2</sup>, Grassmann<sup>3</sup> avait construit un calcul géométrique qui s'étendait à des figures à plus de trois dimensions. Cayley<sup>4</sup> étendait à l'hyperm espace les méthodes de la géométrie analytique en faisant dépendre la position d'un point de plus de trois coordonnées indépendantes. Schläfli<sup>5</sup> rédigeait plusieurs mémoires sur les figures élémentaires de l'espace multidimensionnel. Helmholtz<sup>6</sup> examinait la question en physicien. Un peu plus tard des géomètres italiens, Veronese<sup>7</sup>, Segre<sup>8</sup> notamment, appliquaient des méthodes non analytiques à l'étude de ces figures.

L'élaboration de la géométrie multidimensionnelle faisait éclater une fois de plus le cadre ancien. Les géomètres imaginaient et étudiaient des espaces à plus de trois dimensions.

Les premières phrases de nombreux ouvrages classiques: « l'étendue se présente sous trois dimensions », ne représentaient plus qu'un cas particulier. La construction par la pensée débordait les résultats de l'intuition. En outre, cette nouvelle discipline se montrait féconde; elle permettait notamment de mieux comprendre les propriétés de certaines figures de notre espace habituel.

En plein milieu du siècle, en 1852, un jeune candidat à l'Ecole polytechnique de Paris, Laguerre<sup>9</sup> découvrait un lien intime entre la mesure d'un angle et le birapport des deux côtés de cet angle avec deux droites imaginaires conjuguées passant par le sommet, droites dites isotropes et déjà découvertes par Poncelet. Cette découverte

<sup>1</sup> En géométrie analytique du plan, on montre que le carré de la distance de deux points est égal à la somme des carrés des différences d'abscisses et d'ordonnées. Cela est l'expression analytique du théorème de Pythagore. Si on ne mesure pas les coordonnées avec la même unité sur les deux axes, chacun des termes précédents est multiplié par une constante appropriée. Si enfin les axes ne sont pas rectangulaires, le produit des différences de coordonnées apparaît. Si on appelle  $dx$  et  $dy$  ces différences, le carré de la longueur a la forme  $adx^2 + bdx dy + cdy^2$ . Cette expression est appelée une forme quadratique.

<sup>2</sup> Ausdehnungslehre, 1844.

<sup>3</sup> H. GRASSMANN, 1809-1877.

<sup>4</sup> A. CAYLEY, 1821-1895.

<sup>5</sup> L. SCHLÄFLI, 1814-1895.

<sup>6</sup> H. V. HELMHOLTZ, 1821-1894.

<sup>7</sup> G. VERONESE. 1854-1917.

<sup>8</sup> C. SEGRE, 1863-1914.

<sup>9</sup> F. LAGUERRE, 1834-1886.

enrichit considérablement la géométrie projective et permit d'exprimer les propriétés angulaires en langage projectif. Du point de vue de la géométrie tangentielle, les droites isotropes constituent une conique dégénérée.

En 1869, Cayley eut l'idée d'étendre aux angles et aux segments la définition de l'angle liée au théorème de Laguerre; pour cela il attribua dans le plan un rôle particulier à une conique non dégénérée, l'absolu du plan. Il élaborait ainsi une géométrie métrique dite cayleyenne dans laquelle la dualité est valable pour les propriétés métriques.

En 1872, Klein découvrait que, si la conique absolue est réelle, la géométrie cayleyenne a même structure que celle de Lobatchevski; si elle est imaginaire, on obtient une géométrie de Riemann; enfin si cette conique dégénère tangentiellement, on est conduit à une géométrie euclidienne. La géométrie euclidienne n'est ainsi qu'un cas particulier d'une géométrie plus générale, celle imaginée par Cayley. Plus tard, Lie<sup>1</sup> démontrera que si l'on veut conserver les propriétés des déplacements, il est impossible de pousser plus loin que Cayley la généralisation des notions de longueur et d'angle.

Ainsi, au XIX<sup>e</sup> siècle, la géométrie antique se trouva dépouillée de son monopole: les géométries non euclidiennes, qu'elles soient lobatchevskiennes ou riemanniennes, la géométrie projective et son prolongement naturel, la géométrie cayleyenne, la géométrie multidimensionnelle, tout obligeait à repenser de nouveau la structure et les bases de l'édifice.

Un mathématicien distingué, défenseur passionné d'Euclide, Houel<sup>2</sup> comprit l'importance de la géométrie non euclidienne. En 1867, il publiait un *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie*, reproduction développée d'un mémoire paru en 1863. Houel est sévère pour les auteurs de son temps<sup>3</sup>: « Rien ou peu s'en faut n'a été changé à la routine scolaire. Les nouveaux auteurs n'ont fait qu'entasser sur les mêmes fondements vermoulus quelques débris tombés des hauteurs de l'édifice géométrique. »

Comme on le verra plus bas, ce sont les tenants de l'évidence, Legendre et Blanchet, qui sont visés.

Houel pense que « les questions pendantes relatives aux premiers principes semblent attendre encore leur solution définitive ».

« Le but principal du présent travail », dit-il encore, « est de mettre en lumière la supériorité d'Euclide sur la plupart des auteurs contemporains pour tout ce qui touche l'exposition des premiers principes de Géométrie. »

Plus bas, il parle du « faux point de vue métaphysique où l'on s'est placé en considérant la Géométrie comme une science de pur raisonnement et ne voulant admettre parmi ses axiomes que des vérités *nécessaires* et du domaine de la logique abstraite. »

Houel base le premier livre de la géométrie sur trois propriétés:

<sup>1</sup> S. LIE, 1842-1899.

<sup>2</sup> J. HOUEL, 1823-1886.

<sup>3</sup> Nous citons la deuxième édition de l'*Essai critique*, 1887.



- « On demande de pouvoir
- » 1. Mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point quelconque.
  - » 2. Prolonger indéfiniment suivant sa direction une ligne droite finie.
  - » 3. Décrire un cercle d'un point quelconque comme centre et avec une distance quelconque (comme rayon). »

Il explicite douze axiomes et ne les distingue pas des postulats. Les premiers de ces axiomes sont les huit d'Euclide; il complète ceux relatifs aux inégalités, par l'indication « dans le même sens ». Les trois derniers axiomes sont les postulats d'Euclide non cités dans les demandes ci-dessus: la congruence des angles droits, le cinquième postulat et celui affirmant l'impossibilité pour deux droites d'entourer un espace.

Cela fait, Houel établit à la manière d'Euclide les trente-deux premières propositions des *Eléments*. L'ouvrage se termine par neuf notes.

Dans la première, intitulée « Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes », on lit: « La construction d'une telle science se compose essentiellement de deux parties distinctes: l'une qui est fondée sur l'observation et l'expérience, consiste à rassembler les faits et à conclure par induction les lois et les principes qui serviront de base à la science; l'autre, qui n'est qu'une branche de la Logique générale, s'occupe de combiner ces principes fondamentaux, de manière à déduire la représentation des faits observés et à prédire en outre des faits nouveaux [.....].

» On voit ainsi quel est le rôle, dans l'établissement des principes, de la partie de la science qui s'occupe de leur combinaison, abstraction faite de leur origine expérimentale et des rapports de leurs conséquences avec les faits réels. C'est elle qui doit constater d'abord si les principes sont compatibles entre eux, et ensuite si ils sont irréductibles à un moindre nombre. »

Dans la même note, Houel montre comment, à partir d'expériences faites sur les déplacements des solides, peuvent être élaborées les notions fondamentales de droite et de plan.

Houel explique la possibilité de construire la géométrie à la façon d'Euclide mais selon Lobatchevski. Clairement, il expose la nécessité du choix entre ces deux théories et montre sommairement que « les conclusions ont donné à la vérification de l'hypothèse euclidienne une valeur et une portée incomparablement supérieures à ce que l'on peut obtenir d'analogue pour les autres sciences physiques. Ce n'est pas ainsi, on le sait, que l'expérience a parlé aux premiers inventeurs de la Géométrie, qui, comme le font beaucoup de modernes, ont confondu les données expérimentales avec celles de la raison pure. L'hypothèse euclidienne a été admise au nom de ce que l'on appelle l'*évidence* [.....]. Il nous est impossible d'admettre cette entité, si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut ».

Dans deux autres notes, Houel revient sur la géométrie lobatchevskienne et sur les travaux de Legendre. Il a bien assimilé les idées de son temps; il a une attitude moderne sur les propositions fondamentales de la science, sur la compatibilité,

l'indépendance des systèmes d'axiomes et, dans la pratique, il admet, en y changeant quelques détails, le système d'Euclide; son admiration pour le grand géomètre interdit à Houel d'appliquer ses propres principes aux *Eléments*.

Houel constate le peu de succès de ses propositions concernant l'enseignement de la géométrie.

Les progrès de cette science au XIX<sup>e</sup> siècle n'ont eu que peu d'influence sur les ouvrages, par ailleurs riches, rédigés par des mathématiciens de valeur. Un exemple typique est le *Traité de géométrie* de Rouché<sup>1</sup> et Comberousse<sup>2</sup>. Dans la table des matières on voit le mot « postulatum » et à la page correspondante on lit :

« Scholie »

« On admet que par un point pris hors d'une ligne droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite. »

Dans une note consacrée à la géométrie non euclidienne où sont exposés les principaux résultats de Legendre et terminée par un texte de Poincaré, il est fait allusion au « postulatum d'Euclide », mais sans l'énoncer explicitement.

On trouve une autre allusion aux définitions fondamentales à propos de la droite: « On remarquera que nous n'avons pas défini le mot *longueur*; c'est que l'idée de longueur est une de ces notions premières qu'on ne sait ramener à aucune autre. » Les auteurs limitent pratiquement à ce qui précède l'exposé des principes. Tel était l'état de la science en 1865.

Voici un autre exemple qui montre la persistance de l'influence de Legendre. Andoyer<sup>3</sup> a rédigé un *Cours de géométrie* où on lit<sup>4</sup>:

« Un axiome est une proposition évidente.

» Un théorème est une proposition dont la vérité n'apparaît clairement qu'à la suite d'un raisonnement appelé *démonstration*.

» Deux points déterminent une droite.

» La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

» Par un point pris en dehors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite. »

A cet axiome est ajouté le commentaire suivant:

« Cette proposition connue sous le nom de *Postulatum d'Euclide* résulte de l'idée même que nous avons du plan. »

Dans sa *Géométrie plane*<sup>5</sup>, Hadamard<sup>6</sup> essaie de moderniser certaines définitions. L'une des premières est la suivante: « On nomme *surface* la partie commune à deux régions contigües de l'espace<sup>7</sup> »

<sup>1</sup> E. ROUCHÉ, 1832-1910. Première édition, 1865; nous citons la huitième édition, 1912.

<sup>2</sup> C. DE COMBEROUSSE, 1821-1897.

<sup>3</sup> H. ANDOYER, 1862-1929.

<sup>4</sup> Première édition, 1894. Nous citons la huitième édition, 1908.

<sup>5</sup> Première édition, 1898. Nous citons la quatrième édition, 1911.

<sup>6</sup> J. HADAMARD, 1865-1963.

<sup>7</sup> Sur l'insuffisance de cette définition, voir plus haut: Legendre et ses *Eléments*.

La contigüité est donc une notion fondamentale. Au niveau des éléments, elle a un caractère métrique et même différentiel. Elle est d'une nature trop compliquée pour que la définition ci-dessus soit acceptable; elle est à rapprocher des descriptions données par Euclide sous le nom de définition. Cette contigüité réapparaît à propos des lignes et des points.

La notion d'axiome est présentée comme suit:

« Parmi les propositions, il en est que l'on admet comme évidentes sans démonstration. On les appelle des *axiomes*. » Ainsi l'évidence est encore la caractéristique de l'axiome; mais, pour Hadamard, elle ne s'impose pas; elle est admise.

Le seul exemple d'axiome que discute l'auteur est celui des parallèles. Il l'énonce sous la forme suivante: « Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite. » En note, l'auteur ajoute: « Cet axiome est connu sous le nom de *Postulatum d'Euclide*. En réalité il doit être considéré comme faisant partie de la définition des notions fondamentales. »

Prise rigoureusement cette affirmation exclut la possibilité de toute géométrie non euclidienne. Dans un appendice intitulé « Sur le postulatum d'Euclide » l'auteur s'explique très clairement. Il donne un exposé sommaire de la géométrie lobatchevskienne et insiste sur le rôle des déplacements en géométrie et de leurs groupes: « Parmi les groupes [de déplacements], il y en a de *non euclidiens* et il y en a *d'euclidiens* [.....]. Si nous avons été conduits à développer la conception d'Euclide et non celle de Lobatchevski, c'est que nos sens [.....] nous montrent le postulatum comme sensiblement exact. »

Si dans le corps de l'ouvrage Hadamard a une attitude critiquable à l'égard des fondements (est-ce la sienne ou celle des programmes trop souvent traditionalistes par excès ?), dans la note au sujet des parallèles, il donne un exposé excellent. Il ne dit malheureusement pas que cette attitude doit être étendue à tous les axiomes. Il n'insiste pas sur le fait qu'une proposition reconnue par nos sens comme « sensiblement exacte » ne prend le caractère d'un axiome qu'à la suite d'une convention qu'il faut expliciter.

#### MÉRAY ET SES « NOUVEAUX ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE »

En 1874, Méray<sup>1</sup> publia un ouvrage d'un caractère très différent de tous ceux qui l'avaient précédé, les *Nouveaux Éléments de géométrie*.

Voici comment l'auteur expose son propos:

« J'ai changé la base première des raisonnements en substituant d'autres faits aux axiomes reçus. En cela j'ai cherché surtout à ôter aux débuts de la géométrie leur caractère aride et tout à fait scolastique, et à leur donner des allures plus franches et mieux ordonnées [.....]. »

<sup>1</sup> C. MÉRAY, 1835-1911.

« Peut-être me reprochera-t-on d'avoir augmenté le nombre des propositions énoncées sans démonstration et d'avoir sacrifié une partie de la rigueur absolue que l'on se complait généralement à attribuer à la géométrie. A cela je répondrai que les axiomes particuliers à telle ou telle question et même généraux, sont en réalité plus nombreux que ne semble l'indiquer le petit nombre des propositions qu'il est d'usage d'énoncer comme telles [.....]. A supposer même que j'eusse donné comme axiomes quelques propositions susceptibles d'une démonstration quelconque, je soutiendrais que cet inconvénient n'est rien, s'il permet d'épargner aux commençants la difficulté de s'assimiler et de retenir une suite de raisonnements décousus et détournés [.....]. Il y a peu de présomption à vouloir perfectionner une chose dont le fond n'a pas été touché depuis le temps d'Euclide. »

Ces principes posés, voyons comment les applique Méray et lisons l'introduction.

« La géométrie est la science des corps envisagés seulement au point de vue de leur forme, de leur étendue et de leur positions relatives. Comme les autres sciences, elle se compose de vérités ou propositions de deux sortes: les unes nous viennent de l'expérience combinée avec l'abstraction, et nous sont ordinairement devenues si familières, que nous les trouvons évidentes; les autres, beaucoup plus nombreuses, se tirent de celles-ci par le raisonnement et sont à proprement parler, la véritable matière de la géométrie rationnelle.

« Les vérités du premier genre se nomment des *axiomes*; celles du second, des *théorèmes*. Il règne naturellement un certain arbitraire dans la distinction entre les axiomes et les théorèmes. »

Les notions de point et de ligne sont exposées comme suit:

« Le *point* géométrique correspond à l'idée que nous nous faisons d'un corps très petit, dont nous ne considérons que la position dans l'espace [.....]. L'idée de ligne nous vient des objets très allongés. »

Méray renonce à définir les notions fondamentales; les axiomes sont suggérés par l'expérience et explicités par abstraction; plus trace d'évidence absolue ou de vérité nécessaire.

Parmi les axiomes retenus par Méray, un seul rappelle un énoncé antérieur d'Euclide ou de Legendre, le premier, relatif à la transitivité de l'égalité. Les autres sont très différents; beaucoup concernent les propriétés des déplacements, des translations et des rotations notamment. Citons en quelques-uns:

« Par un même point quelconque de l'espace, on peut faire passer une infinité de droites, mais une seule par deux points donnés. »

« Par un même point de l'espace on peut faire passer une infinité de plans; un nombre illimité de ces plans passent par un second point donné quelconque et tous contiennent entièrement la droite qui joint ces deux points. »

« Quand deux plans distincts ont quelque point commun, ils en ont plus d'un et se coupent suivant une ligne. »

Méray a-t-il étudié la géométrie projective ? Nous n'en savons rien, mais les deux premiers axiomes cités font allusion à la gerbe de droites et au faisceau de plans, figures fondamentales de cette géométrie.

Dans l'élaboration des divers chapitres de son ouvrage, Méray applique systématiquement le même plan ; il étudie les phénomènes capables de suggérer les axiomes ; il explicite ceux-ci et construit ensuite. L'ouvrage de Méray présente une autre nouveauté : il traite simultanément du plan et de l'espace, éliminant ainsi des répétitions fastidieuses fréquentes dans des ouvrages classiques.

Méray est conduit à poser successivement plus de quarante axiomes. Il est conscient du problème de leur indépendance mais, conformément aux principes pédagogiques admis, il n'étudie pas cette question. Il ne pose pas, comme l'avait fait Houel avant lui le problème de la compatibilité de la géométrie.

Les *Nouveaux Eléments* n'eurent pas de succès ; ils rompaient avec la tradition millénaire d'Euclide et avec l'autorité, vieille de quatre-vingts ans, de Legendre. Méray est le premier auteur qui, indépendamment d'Euclide, ait posé à l'origine de sa géométrie un certain nombre de principes sur la construction de sa science et qui, tout au long de l'ouvrage, les a appliqués méthodiquement. Méray a eu une attitude moderne ; son isolement, l'absence d'un groupe de disciples qui auraient propagé et développé ses idées font que son œuvre est rapidement tombée dans l'oubli ; elle n'en est pas moins remarquable par son caractère révolutionnaire.

#### LES DÉPLACEMENTS ET LA THÉORIE DES GROUPES

La notion de déplacement est intuitive ; dans ses *Nouveaux Eléments* Méray a montré la possibilité de baser une géométrie sur elle.

L'idée de groupe, souvent présente implicitement dans des travaux plus anciens, prend avec Galois <sup>1</sup> une forme précise. Le destin tragique de cet auteur, la nouveauté de ses idées, le manque de perspicacité des mathématiciens de son temps font que, durant plusieurs dizaines d'années, la notion de groupe resta stérile.

En 1865, Helmholtz analyse en physicien les notions d'espace et de déplacement ; il explicite quelques propositions fondamentales qu'il appelle postulats. Helmholtz donne une définition de l'espace à  $n$  dimensions : une variété continue (sous-entendu de points) à  $n$  paramètres (ou coordonnées) <sup>2</sup>.

Le postulat dit « de distance » par Helmholtz est le suivant : Soient  $A$  et  $B$  deux points de coordonnées  $x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A$  et  $x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B$ . Par un déplacement, transfor-

<sup>1</sup> E. GALOIS, 1811-1832.

<sup>2</sup> Quelques travaux de HELMHOLTZ sur les fondements de la géométrie ont été traduits en français, dans les publications suivantes :

*Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, V, 1868.

*Revue des cours scientifiques*, VII, 1870.

*Revue scientifique de la France et de l'étranger*, XII, 1877.

*Correspondance de Gauss et Schumacher*, 1895.

mons- les en  $A'$  et  $B'$  de coordonnées  $y_1^A, y_2^A, \dots, y_n^A, y_1^B, y_2^B, \dots, y_n^B$ ; il existe une fonction  $\delta$  de ces variables, appelée *distance* telle que

$$\delta(x_1^A, x_2^A, \dots, x_n^A, x_1^B, x_2^B, \dots, x_n^B) = \delta(y_1^A, y_2^A, \dots, y_n^A, y_1^B, y_2^B, \dots, y_n^B).$$

Un troisième axiome de Helmholtz est celui de la liberté des déplacements: il comporte plusieurs propositions dont voici la première: « Tout point peut être déplacé dans toutes les directions. »

Cela suppose que le mot direction a un sens ou qu'elle est une notion fondamentale.

Une seconde proposition axiomatique liée à la précédente par Helmholtz est la suivante:

« Dans le plan, aucune figure ne peut subir de déplacement si deux de ses points sont invariables. »

Cela suppose connue la notion de plan. Helmholtz définit les rotations comme des cas particuliers de déplacements; dans une rotation plane, un point est invariable; dans l'espace, deux le sont.

Helmholtz termine par un postulat dit de *monodromie*; il comporte deux propositions:

- « 1) Il existe une rotation (dite complète), distincte de l'identité, qui fait coïncider une figure avec elle-même.
- » 2) Dans toute rotation complète, tout point mobile de la figure décrit une courbe fermée. »

Comme on le voit, Helmholtz rompt avec la géométrie classique. Son groupe de postulats n'est pas suffisant pour permettre l'élaboration de la géométrie. L'intérêt de sa contribution est surtout d'avoir vu la non-nécessité, encore trop souvent admise il y a un siècle, de la forme donnée par Euclide à la géométrie. Dans l'esprit d'Helmholtz, sans que la chose ait été explicitée, les déplacements constituent un groupe, c'est-à-dire que la transformation résultant de deux déplacements successifs d'une figure est encore un déplacement, que l'opération inverse d'un déplacement est un déplacement et, bien évidemment, qu'une figure invariable peut être considérée comme ayant subi un déplacement nul.

Imposons successivement deux déplacements à une figure; puis permutons ces deux opérations; en général la position finale de la figure dépend de l'ordre dans lequel ont été effectuées les deux transformations. Si la position finale est indépendante de cet ordre, les deux déplacements sont dits *commutatifs* et si tous les déplacements d'un ensemble sont commutatifs, cet ensemble est dit lui-même commutatif. Ainsi, en général, une translation et une rotation ne sont pas commutatives, mais les rotations planes de centre fixe le sont. Un ensemble de déplacements qui jouissent des propriétés de composition, d'existence du déplacement inverse et qui contient le déplacement nul est un sous-groupe du groupe des déplacements. Par exemple, dans le plan, les rotations de centre donné constituent un sous-groupe du groupe des déplacements de ce plan.

Si un sous-groupe du groupe des déplacements est tel que tout point  $A$  peut être atteint par un point quelconque au moyen d'un déplacement de ce sous-groupe, celui-ci est dit *transitif*; il est *intransitif* dans le cas contraire. Ainsi, dans le plan, les translations constituent un sous-groupe transitif du groupe des déplacements mais non le sous-groupe des rotations de centre donné.

Dès 1870 environ, Lie <sup>1</sup>, puis Poincaré et Hilbert appliquent systématiquement la théorie des groupes à la géométrie.

Lie pose tout d'abord les axiomes suivants :

- « 1. L'espace est une variété ou ensemble de points où l'on peut établir un système de coordonnées tel que trois coordonnées déterminent un point.
- » 2. Il existe une transformation des ensembles de points de l'espace dite déplacement. Les déplacements constituent un groupe.
- » 3. Un point  $P$  de l'espace restant invariable, il existe un déplacement qui permet de faire coïncider une droite issue de  $P$  avec une autre droite passant par  $P$  ou un plan passant par  $P$  avec un autre plan contenant le point  $P$ . »

Cet axiome est dit « de voisinage ».

Dans une seconde théorie, Lie remplace l'axiome de voisinage par un autre dont voici l'essentiel :

« Dans un déplacement, si un point  $O$  est fixe, le lieu des points où peut être déplacé un point  $M$  est une surface  $\sigma$  qui ne passe pas par  $O$ , mais passe par  $M$ . Autour de  $O$ , on peut limiter une portion finie d'espace qui contient la surface  $\sigma$  à son intérieur. Le point  $M$  peut atteindre tout point de  $\sigma$  par un déplacement continu.

Indépendamment de Lie, Poincaré <sup>2</sup> a fait une étude de la géométrie plane basée sur la théorie des groupes. Il pose les axiomes suivants :

« Le plan est une variété de points à deux dimensions. »

« Les déplacements constituent un groupe réel de transformations infinitésimales dépendant de trois paramètres. »

« Deux points invariables d'une figure fixent cette figure. »

Les travaux de Lie furent repris par Hilbert. Celui-ci démontra que la différentiabilité des fonctions, utilisée par son prédécesseur n'est pas indispensable et que la continuité suffit pour élaborer la théorie groupale de la géométrie.

La notion de groupe a un caractère abstrait; elle impose à la géométrie inspirée par elle une forme très éloignée de celle que lui avaient donnée les auteurs classiques. Elle donne un moyen de distinguer les géométries euclidienne et non euclidienne; si le groupe des déplacements contient un sous-groupe transitif, celui-ci est celui des translations et la géométrie est euclidienne; s'il n'existe aucun sous-groupe transitif, la géométrie est non euclidienne.

<sup>1</sup> *Theorie der Transformationsgruppen*, 3 vol., 1888, 1890 et 1893.

<sup>2</sup> « Des fondements de la géométrie », retraduction française d'un article paru dans *The Monist*, 1898.

TRAVAUX DE PASCH<sup>1</sup>

En 1882, Pasch publiait un ouvrage consacré à une élaboration aussi soignée que possible des premières notions de géométrie générale, projective ou classique<sup>2</sup>. Il avait traité le sujet dans ses cours depuis 1873.

Il insiste sur le caractère empirique de l'origine de la géométrie et se propose de construire méthodiquement cette science en cherchant l'accord avec les phénomènes naturels observables.

En 1909, le même auteur publiait un ouvrage consacré aux fondements de l'analyse<sup>3</sup>. Durant les décennies, son sens critique s'est affiné et la seconde édition de ses *Leçons*, parue en 1912, apporte de nombreux compléments; elle précise la pensée de l'auteur et son expression, sans changer le caractère de l'ouvrage.

Notre propos n'est pas de refaire avec Pasch l'analyse des phénomènes qui conduisent aux notions initiales et à leurs propriétés. Traduisons un peu librement quelques alinéas de sa préface:

« Ces propriétés des figures sont exprimées par diverses propositions. Quelques-unes d'entre elles sont démontrées, c'est-à-dire qu'elles sont imposées par d'autres propositions qui, elles, doivent être énoncées préalablement. Nous appelons théorèmes les propositions démontrées et axiomes les autres. Insistons sur le fait que tout ce qui appartient au fondement des théorèmes doit figurer dans les axiomes et cela sans exception. »

Dans le corps de l'ouvrage la même pensée est exprimée avec plus de détails:

« La science mathématique a pour objet d'établir des relations entre les notions mathématiques; ces relations doivent être en accord avec l'expérience; pour la plupart, ces relations ne sont pas déduites immédiatement de l'expérience mais « démontrées » [.....]. Après élimination des théorèmes démontrés, il subsiste un groupe de propositions, les axiomes; d'eux se déduisent tous les théorèmes. Ces axiomes reposent sur des observations qui remontent à des temps immémoriaux, indéfiniment répétées, exprimables plus clairement que les autres et avec lesquelles les hommes sont familiarisés à tel point et depuis si longtemps que leur origine a disparu dans l'oubli; cette origine est devenue objet de discussion.

« Les axiomes doivent embrasser tout le matériel empirique qu'élaborera le mathématicien; une fois leur liste établie, le recours aux sens est exclu. »

Ainsi la notion d'axiome a perdu ses caractères anciens; un axiome est une proposition suggérée par l'expérience et qui permet la démonstration des théorèmes. Toute idée d'évidence, de vérité nécessaire, de propriété contenue dans l'image que nous nous faisons de l'espace ou des figures, d'absolu imposé à notre esprit anté-

<sup>1</sup> M. PASCH, 1843-1930.

<sup>2</sup> *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Première édition, 1882.

<sup>3</sup> *Grundlagen der Analysis*.



rieurement à toute réflexion, tout cela a disparu. L'axiome est une proposition que l'on n'a pas pu démontrer. Pasch ne discute pas les problèmes d'indépendance des axiomes, ni ceux de leur compatibilité. Son attitude d'empiriste l'éloigne de ces questions.

Pasch classe les axiomes selon les figures auxquelles ils se rapportent. L'observation des objets matériels suggère la notion de segment de droite. Les premiers axiomes posés par Pasch concernent les segments.

Pour introduire la notion de droite il pose les huit propositions suivantes :

- D 1<sup>1</sup>. Entre deux points on peut construire un segment et un seul.
- D 2. On peut toujours trouver un point intérieur à un segment donné.
- D 3. Si le point  $C$  est intérieur au segment  $AB$ , le point  $A$  est extérieur au segment  $BC$ .
- D 4. Si le point  $C$  est intérieur au segment  $AB$ , tous les points du segment  $AC$  sont intérieurs au segment  $AB$ .
- D 5. Si le point  $C$  est intérieur au segment  $AB$ , un point n'appartenant à aucun des segments  $AC$  et  $BC$  n'appartient pas au segment  $AB$ .
- D 6.  $A$  et  $B$  étant deux points quelconques, on peut trouver un point  $C$  tel que  $B$  soit intérieur au segment  $AC$ .
- D 7. Si le point  $B$  est intérieur aux segments  $AC$  et  $AD$ , le point  $C$  est intérieur au segment  $AD$  ou  $D$  intérieur au segment  $AC$ .
- D 8. Si le point  $B$  est intérieur au segment  $AC$  et  $A$  intérieur au segment  $BD$ , le point  $A$  est intérieur au segment  $CD$ .

Ces huit axiomes conduisent à une définition de la droite qui revient à ceci : ensemble des points  $X$  tel que les points  $A$  et  $B$  étant donnés,  $A$  est entre  $X$  et  $B$  ou  $B$  entre  $X$  et  $A$ .

Dans la deuxième édition, l'auteur donne plus de précision aux cinq premiers axiomes ; il les remplace par les suivants :

- D' 1. Un segment étant donné, on peut trouver deux points qui sont des points extrêmes du segment.
- D' 2. Si deux points sont des points extrêmes d'un segment, aucun autre point n'est extrême sur ce segment.
- D' 3. On peut toujours trouver un point extrême à un segment.
- D' 4. Un point extérieur à un segment n'est pas un point intérieur à ce segment.
- D' 5. Deux points quelconques étant donnés, il existe un segment dont ils sont points extrêmes.

<sup>1</sup> Pasch désigne ses axiomes sans les lettres D, P, C ; nous les ajoutons pour distinguer ceux relatifs à la droite, au plan et à la congruence.

- D' 6. Si deux points sont les points extrêmes d'un segment, ils ne le sont pas pour un autre segment.
- D' 7. Si  $C$  est un point intérieur au segment  $AB$ , le point  $A$  n'est pas intérieur au segment  $BC$ .
- D' 8. Si  $C$  et  $D$  sont deux points intérieurs au segment  $AB$  tels que  $D$  n'appartient pas au segment  $AC$ ,  $D$  est intérieur au segment  $BC$ .

Les axiomes D 3 et D 4 (première façon) sont des théorèmes de la géométrie basée sur les axiomes 1-8 (deuxième façon).

Les axiomes du plan sont les suivants :

- P 1. Par trois points on peut mener une surface.
- P 2. Il existe un plan qui contient tous les points de la droite menée par deux points appartenant à un plan et il contient aussi le segment déterminé par ces deux points.
- P 3. Si deux plans,  $\alpha$  et  $\beta$  ont un point commun, on peut trouver un autre point contenu dans un plan qui contient lui-même un point quelconque de chacun des deux plans  $\alpha$  et  $\beta$ .
- P 4. Dans un plan soient trois points  $A, B, C$ , liés deux à deux par les segments  $AB, AC$  et  $BC$ . Soit un segment  $DE$  qui contient un point du segment  $AB$ ; le segment  $DE$  ou l'un de ses prolongements contient un point de l'un des segments  $AC$  ou  $BC$ .

Après l'élaboration de nombreuses conséquences des propositions précédentes, conséquences de caractère projectif ou affiné<sup>1</sup>, Pasch introduit la notion de congruence au moyen des axiomes suivants :

- C 1. Les figures  $AB$  et  $BA$  sont congruentes.
- C 2. A la figure  $ABC$ , on peut ajouter un point  $B'$  et un seul tel que 1°  $AB$  et  $AB'$  sont des figures congruentes et 2°  $B'$  appartient au segment  $AC$ , ou  $C$  au segment  $AB'$ .
- C 3. Si  $C$  est intérieur au segment  $AB$  et si les figures  $ABC$  et  $A' B' C'$  sont congruentes, le point  $C'$  est intérieur au segment  $A' B'$ .
- C 3. Si le point  $C_1$  est intérieur au segment  $AB$  et si l'on prolonge le segment  $AC_1$  du segment  $C_1 C_2$  congruent à  $AC_1$ , puis le segment  $C_1 C_2$  du segment  $C_2 C_3$  congruent à  $C_1 C_2$ , et ainsi de suite, on obtient un segment  $C_n C_{n+1}$  qui contient  $B$ .

<sup>1</sup> Par géométrie affine, on entend l'ensemble des figures liées aux relations projectives (incidence et ordre) et au parallélisme. La géométrie affine ignore les relations générales de congruence : cependant, deux figures liées par une translation sont congruentes en application des principes de la géométrie affine.

- C 5. Si dans la figure  $ABC$  les segments  $AB$  et  $BC$  sont congruents, les figures  $ABC$  et  $BAC$  sont congruentes.
- C 6. Si deux figures sont congruentes, leurs parties homologues le sont aussi.
- C 7. Si deux figures sont congruentes à une troisième, elles sont congruentes entre elles.
- C 8. Si de deux figures congruentes l'une est enrichie d'un point propre, la seconde peut être complétée par un point propre tel que les figures composées soient congruentes.
- C 9. Soient données deux figures  $AB$  et  $FGH$ , celle-ci non contenue dans un segment; supposons  $AB$  et  $FG$  congruents. Par  $A$  et  $B$ , menons un plan; dans celui-ci, on peut trouver deux points  $C$  et  $D$  tels que les figures  $ABC$  et  $ABD$  sont congruentes à la figure  $FGH$  et le segment  $CD$  a un point commun avec le segment  $AB$  ou son prolongement.
- C 10. Deux figures  $ABCD$  et  $ABCE$  dont les points n'appartiennent pas à un plan ne sont pas congruentes.

Le fait que Pasch est revenu sur ses premiers axiomes et a estimé judicieux de les préciser montre bien le caractère provisoire qu'il attribue à son œuvre. Il fait allusion à son perfectionnement possible et, en deuxième édition, il propose même au lecteur « cet exercice utile de rechercher les axiomes encore manquants ».

L'œuvre de Pasch, comme celle de Méray qui l'a précédée de peu, est une tentative de donner un système complet d'axiomes; la notion d'ordre, généralement négligée avant lui, y joue un rôle important. D'ailleurs l'axiome P 4, mis en évidence par lui, porte son nom.

Dans son désir de fonder simultanément les éléments et la géométrie projective, Pasch renonce à la notion de parallélisme. Ils se complique ainsi la tâche, et la géométrie projective atteindra un stade axiomatique plus satisfaisant avec les travaux d'Enriques<sup>1</sup>.

Ainsi que nous l'avons remarqué, Pasch n'aborde pas la question de l'indépendance de ses axiomes ni celle de leur compatibilité. Il en donne une classification qui les lie aux figures fondamentales. Dans le même groupe, on trouve des axiomes de natures très différentes. Tous les axiomes relatifs à la droite concernent l'ordre des points. Les axiomes P 1-P 3 sont consacrés à des relations d'incidence tandis que P 4 est lié à l'ordre. En outre, P 3 limite à trois le nombre des dimensions de l'espace. Pasch a bien vu le rôle de la transitivité de la congruence à laquelle il consacre l'axiome C 7. La réflexivité et la symétrie de la congruence lui ont échappé. L'axiome C 4 fait emploi de la notion de congruence; son importance est grande: il porte en germe la continuité, sous une forme appropriée à la géométrie élémentaire. Plus tard, il sera appelé axiome d'Archimède. Un axiome de continuité est indis-

<sup>1</sup> Voir plus bas: Enriques et la géométrie projective.

pensable à la géométrie projective mais sous une forme non métrique. Pasch l'a vu et a consacré quelques pages aux applications de l'axiome suivant, mieux approprié à la géométrie projective :

Sur un segment  $AB$ , supposons que l'on puisse marquer des points  $A_1, A_2, A_3, \dots$  en nombre infini tels que  $A_1$  soit entre  $A$  et  $B$ ,  $A_2$  entre  $A_1$  et  $B$ ,  $A_3$  entre  $A_2$  et  $B$  et ainsi de suite; il existe un point  $C$  du segment  $AB$  (éventuellement confondu avec  $B$ ) tel que si le point  $D$  est choisi sur  $AB$  entre  $A$  et  $C$ , tous les points de la suite  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ne sont pas entre  $A$  et  $D$ , alors qu'aucun point de cette suite ne se trouve entre  $B$  et  $C$ .

Les « Leçons » de Pasch débordent le domaine de la géométrie élémentaire. A son époque, la notion moderne d'axiome est acquise, tant par lui que par Méray.

Les axiomes proposés par Pasch furent étudiés par Peano qui appliqua sa méthode symbolique à l'étude de leur indépendance. Il fut ainsi conduit à apporter à ce système quelques modifications qui ne changent pratiquement rien au fond. Les procédés de Peano présentent l'avantage, commun aux logiques symboliques, d'éliminer les appels inconscients à l'intuition, donc le recours à des axiomes non explicites.

Dans ses *Principes de géométrie*<sup>1</sup>, comme Pasch, il part de notions suggérées par l'observation des objets matériels. Il est plus rigoureux que son devancier et réduit quelques-uns des axiomes de Pasch à des propositions plus simples, il montre la dépendance de plusieurs d'entre eux.

Avec Peano, le problème de l'indépendance des axiomes fait donc un progrès important. Le système retenu par lui fut souvent pris comme base de la géométrie. En particulier, Schur en fit grand usage.

#### VERONESE ET SES « FONDEMENTS »

En 1891, Veronese<sup>2</sup> publiait un gros ouvrage consacré aux fondements de la géométrie multidimensionnelle<sup>3</sup>; il est composé de cinq parties. Dans une longue préface, l'auteur expose ses idées générales; une introduction, qui occupe plus du tiers du livre, est consacrée aux principes des mathématiques, à l'élaboration des notions de nombre, de continuité, d'infini, etc. Suivent deux parties consacrées, la première à la construction de la géométrie ordinaire tridimensionnelle, la seconde à celle de l'espace quadri- et multidimensionnel. Des appendices terminent l'ouvrage; l'un d'eux donne un important exposé de l'évolution des idées sur les principes de la géométrie.

<sup>1</sup> G. PEANO, 1858-1932. *I principi di geometria logicamente esposti*, 1889.

<sup>2</sup> G. VERONESE, 1854-1917.

<sup>3</sup> *Fondamenti di geometria a piu dimensioni e a piu specie unitarette-linee, esposti in forma elementare*. Traduction allemande de A. SCHEPP sous le titre « Grundzüge der Geometrie ».

Pour donner un aperçu de la pensée de l'auteur, nous allons résumer la première partie de la préface.

« La géométrie multidimensionnelle est un objet de discussion, si ce n'est de dispute, entre mathématiciens et philosophes. Les vues sur cet objet ont été faussées par l'opinion, souvent émise, de la nécessité de la méthode analytique pour l'étude de cette géométrie. Nous nous proposons d'élaborer la géométrie multidimensionnelle comme on le fait couramment pour l'espace ordinaire.

» Les applications de la géométrie à l'étude des déplacements des solides matériels exigent la limitation à trois du nombre des dimensions; c'est là un fait accidentel qui doit être éliminé d'une étude générale des principes.

» Cette étude pose le problème des axiomes de la géométrie, question délicate, liée à l'étude de la mécanique.

» Les objets de pensée sont de deux natures; quelques-uns possèdent une représentation matérielle extérieure au monde de l'esprit, d'autres pas. Le point, par exemple, appartient à la première catégorie, le nombre à la seconde.

» Les objets de la seconde espèce sont dits *formes* et les sciences qui les concernent sont *formelles*; exemple: la logique et les mathématiques pures. Dans une telle science, la vérité d'une proposition résulte de l'accord de la pensée avec elle-même.

» Les sciences dont l'objet est l'étude d'êtres ayant une existence extérieure à notre pensée sont *expérimentales*. La vérité d'une proposition ressortissant d'une science expérimentale repose sur un double critère: l'accord avec l'expérience et l'accord avec les lois de la pensée.

» La base d'une science formelle gît dans les principes d'action de l'esprit et dans des définitions ou hypothèses; la démonstration d'une proposition est une combinaison d'actes intellectuels.

» Dans le cas des sciences expérimentales, l'accord nécessaire de la pensée et des objets extérieurs repose sur des propositions suggérées par l'observation et qui ne sont pas déductibles les unes des autres. Ces propositions sont des *axiomes*.

» En géométrie, nous considérons des corps matériels et nous étendons leurs propriétés à d'autres objets dont nous ne posons que l'existence abstraite. De ce fait, la géométrie est une science de caractère mixte. Certains axiomes sont admis quoiqu'ils dépassent notre expérience, sans cependant la contredire. Ces axiomes, moins immédiats que les premiers, sont des postulats ou des hypothèses.

» Il est bien entendu que l'on ne compte pas parmi les axiomes d'une science expérimentale ceux de la logique; ils sont à la base de toutes les sciences.

» L'exactitude des sciences formelles tient à leur nature; celle des sciences expérimentales est d'autant mieux réalisée si: 1<sup>o</sup> leurs axiomes sont plus simples et intuitifs, 2<sup>o</sup> leurs objets peuvent être rapidement et facilement remplacés par des formes abstraites permettant un développement déductif de la discipline considérée. Cela est partiellement le cas en géométrie; de ce fait, cette science est de caractère mathématique.

» Nous sommes ainsi conduits à distinguer la géométrie, science déductive, de l'ensemble de ses applications; certains axiomes sont nécessaires à ce dernier domaine sans être essentiels à la science pure. »

» La notion d'hypothèse introduite ci-dessus mérite un examen. Dans les sciences mathématiques, une hypothèse (un postulat) est satisfaisante à condition de n'introduire aucune contradiction, ni avec les principes et les opérations de la logique, ni avec les hypothèses précédentes ou leurs conséquences.

» Une hypothèse est inutile et doit être exclue si elle peut être déduite de propositions antérieures.

» Une hypothèse est *fausse* si elle implique une contradiction.

» Une hypothèse peut être stérile; elle n'a que peu ou pas de valeur; elle n'en est pas moins possible et admissible.

» Toute nouvelle hypothèse doit être éprouvée de façon à obtenir la certitude que les opérations élaborées antérieurement lui sont applicables, s'il y a lieu.

» Une hypothèse  $A$  est indépendante d'une autre hypothèse  $B$  si ni  $A$ , ni le contraire de  $A$  ne peuvent être déduits de  $B$ .

» Des conséquences nombreuses, non contradictoires, déduites d'une hypothèse n'impliquent pas l'inexistence d'une contradiction éventuelle. La science mathématique jouit d'un préjugé subjectif de vérité; celui-ci ne suffit pas pour fonder la science de façon satisfaisante.

» Quand un groupe d'axiomes ou de postulats peuvent-ils être admis? Nous pensons que, au moins dans les cas simples, l'application de la logique doit assez rapidement conduire à des contradictions, s'il en existe. Cependant, l'histoire montre des cas d'aveuglement où l'on a cru éliminer la contradiction par l'introduction de nouvelles hypothèses, elles-mêmes fausses, au moins en partie.

» Dans les sciences mathématiques, le refus d'une hypothèse doit être basé sur une preuve mathématique; toute hypothèse acceptable du point de vue logique est admissible; son refus ne peut pas reposer sur une argumentation de caractère non mathématique, du ressort de la philosophie par exemple. Le problème des fondements de la science mathématique est lié à celui des bases de notre pensée; il a des contacts avec la philosophie. Les sciences mathématiques jouissent de l'immense avantage d'être indépendantes des discussions des philosophes sur la notion de vérité. Cependant, il ne faut pas réduire la mathématique et la géométrie à un symbolisme, mais bien en étudier les fondements de manière philosophique; cela consiste à se faire une idée nette de la nature des choses, sans exclure les méthodes qui partent de points de vue moins vastes que ceux des philosophes.

» L'activité des mathématiciens repose sur le fait irréfutable de l'esprit ou de la conscience; son principe directeur est la contradiction. Les mathématiciens sont les adversaires des systèmes philosophiques qui conduisent à des contradictions ou à des restrictions inutiles en matière mathématique ou géométrique. Le mathématicien

est un philosophe en ce sens que, par son activité, il rend service à la philosophie. Les philosophes tirent profit d'une mathématique bien faite.

» L'aide apportée à la mathématique par l'observation empirique est grande; mais pour être utilisable, ce matériel doit être soumis à une élaboration critique qui dépasse l'empirisme. Comme le remarque Cayley, si nous n'avions pas la notion abstraite de droite, nous ne pourrions pas affirmer l'inexistence des droites dans la nature.

» L'indépendance des axiomes est précieuse; cependant, elle est très difficile à démontrer. En outre, un simple changement d'ordre peut éventuellement modifier un axiome de l'ensemble admis antérieurement.

» La méthode analytique suppose la connaissance préalable de divers sujets de géométrie et d'un grand nombre de théories étrangères à cette science; elle est artificielle et indirecte; elle permet d'étudier des systèmes d'axiomes; elle ne donne pas la solution du problème des fondements. En comparaison des immenses progrès de la géométrie moderne, la méthode analytique est restée stationnaire, au moins sur les questions fondamentales. Par exemple, selon cette méthode, la distance de deux points est un nombre. Géométriquement parlant, la distance est représentable par un nombre; la méthode analytique ne dit pas ce qu'est une distance; celle-ci n'est pas un nombre, pas plus qu'une droite, un plan ou un espace à trois dimensions ou plus ne sont des équations. »

Ce qui précède donne un aperçu de l'attitude de Veronese. L'application est moins heureuse. L'ouvrage est touffu; les digressions, souvent fort intéressantes, sont nombreuses; le souci de rigueur est constant.

Après une discussion approfondie, Veronese donne la définition suivante:

« Les objets de pensée qui possèdent comme attributs l'unité, les parties, l'ordre et la position ou qui peuvent être comparés selon ces attributs sont des formes mathématiques abstraites, même si l'on ne considère pas certains de leurs attributs. »

Ces formes sont l'objet d'hypothèses qui sont résumées dans les deux suivantes:

« Il existe une forme dite fondamentale, qui sert à la détermination de toutes les autres.

» Les formes sont identiques entre elles.

» La forme fondamentale est le système à une dimension, invariable relativement à la position de ses parties et qui est déterminée par le nombre minimum de ses éléments. »

La brièveté de notre exposé peut conduire à une injustice; les hypothèses ci-dessus résultent d'une analyse dont le texte constitue l'introduction de l'ouvrage.

Passons à la partie géométrique. Les axiomes (propositions strictement géométriques) de Veronese sont les suivants:

« I. *Il existe différents points. Tous les points jouissent des mêmes propriétés.*

- » II. *Il existe un système unidimensionnel et continu de points, la droite. Une droite est déterminée par deux de ses points. Hors d'une droite il existe des points. Avec un point d'une droite, un point extérieur à celle-ci détermine une droite.*
- » III. *Si deux droites ont un point commun A, il existe un segment AB de la première identique <sup>1</sup> à un segment AB' de la seconde et les multiples de AB sont identiques à ceux de AB'.*
- » IV. *Si un côté d'un triangle devient infiniment petit, la différence des deux autres côtés devient elle aussi infiniment petite.*
- » V. *Soient deux paires de demi-droites de même origine AB et AC, A' B' et A' C' et, sur elles, deux paires de points B et C, B' et C' telles que les segments AB et A' B' soient identiques, ainsi que AC et A' C' ; si les segments BC et B' C' sont identiques, les figures formées par les deux demi-droites le sont aussi. »*

A ces propositions géométriques, Veronese adjoint des axiomes pratiques.

- » I'. *Selon les observations faites à ce jour, à une approximation élevée, il ne passe par un point qu'une seule parallèle à une droite donnée.*
- » II'. *Un corps peut se déplacer sans déformation.*
- » III'. *Les points de l'espace intuitif constituent une figure tridimensionnelle. »*

En plus de ces axiomes, Veronese envisage diverses hypothèses.

Les premières impliquent le passage de la géométrie, science expérimentale, à la géométrie théorique; elle substitue des hypothèses aux premiers axiomes.

La cinquième introduit le point impropre de la droite en posant que la droite est une ligne fermée.

Les hypothèses de l'inexistence, de l'unicité et de la multiplicité dans le plan des non-sécantes à une droite sont exposées; les géométries riemannienne, euclidienne et lobatchevskienne ne sont donc pas exclues. Les axiomes appropriés sont énoncés.

Entre autres tentatives intéressantes de Veronese, citons celle de l'élaboration d'une géométrie non archimédienne, c'est-à-dire d'une géométrie ou l'axiome d'Archimède (axiome  $C_4$  de Pasch) n'est pas valable. Hilbert et Klein donneront plus tard des modèles plus simples que celui de Veronese.

L'étendue et la richesse de l'ensemble des sujets traités par Veronese sont beaucoup plus considérables que cela n'apparaît dans le résumé précédent bref et incomplet.

Veronese appliqua ses principes à l'élaboration d'un ouvrage de géométrie destiné à l'enseignement secondaire <sup>2</sup>, l'un des premiers à satisfaire aux exigences modernes de rigueur.

<sup>1</sup> Veronese vise la congruence des segments.

<sup>2</sup> *Elementi di geometria*, 1897.



## ENRIQUES ET LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Dès 1894, Enriques s'intéressa aux fondements de la géométrie projective. V. Staudt l'avait précédé en cette matière, mais ses travaux antérieurs d'un demi-siècle, ne répondaient pas aux exigences de rigueur accrues avec le temps. L'ouvrage principal d'Enriques, une lithographie (1894), n'attira pas l'attention; en 1898, en librairie, ses *Leçons de géométrie projective*<sup>1</sup> eurent un grand succès.

Les figures fondamentales de la géométrie projective se classent en trois groupes.

Les formes de la première espèce sont les suivantes:

- ensemble des points d'une droite (ponctuelle);
- ensemble des droites d'un plan issues d'un point (faisceau de droites);
- ensemble des plans de l'espace passant par une droite (faisceau de plans).

Les formes de deuxième espèce sont au nombre de quatre:

- ensemble des points d'un plan;
- ensemble des droites d'un plan;
- ensemble des droites de l'espace issues d'un point (gerbe de droites);
- ensemble des plans de l'espace passant par un point (gerbe de plans).

Enfin les points ou les plans de l'espace constituent les formes de troisième espèce.

Toutes les formes d'une même espèce obéissent aux mêmes axiomes. De ce fait, comme il ne peut être question de points parallèles et que la congruence (ou égalité) ne s'applique pas aux faisceaux de la même façon qu'aux segments, la géométrie projective ignore les relations de parallélisme et de congruence des figures.

Les axiomes de la géométrie projective sont de trois types: association, ordre et continuité. Voici la forme que leur donne Enriques. Il distingue trois axiomes d'appartenance:

- « I. Deux éléments d'une forme de troisième espèce déterminent une forme de première espèce à laquelle appartiennent ces éléments.
- » II. Trois éléments d'une forme de troisième espèce qui n'appartiennent pas à une forme de première espèce déterminent une forme de deuxième espèce à laquelle ils appartiennent.
- » III. Dans une forme de troisième espèce, un élément et une forme de première espèce non incidents déterminent une forme de deuxième espèce à laquelle ils appartiennent. »

Ces axiomes établissent des liens entre des formes d'espèces différentes.

Pasch ne s'était pas libéré des sujétions de l'ordre euclidien. Enriques élargit la notion d'ordre en posant l'axiome suivant:

<sup>1</sup> *Lezioni di geometria proiettiva*. Traduction française par LABÉRENNE, 1930.

- « IV. *Les éléments d'une forme de première espèce peuvent être liés par une relation d'ordre telle que*
- » 1° *un élément quelconque A d'une forme de première espèce peut être pris comme premier élément ;*
  - » 2° *Cela fait, selon l'ordre choisi, de deux éléments B et C, l'un précède l'autre ;*
  - » 3° *Si B précède C et C précède D, B précède D ;*
  - » 4° *Entre B et C, il existe une infinité d'éléments de la forme ;*
  - » 5° *Il n'existe pas de dernier élément ;*
  - » 6° *Il existe deux ordres sur une forme de première espèce ; ils sont dits opposés ;*
  - » 7° *Deux ordres d'une forme qui ont des premiers éléments différents, A et B sont identiques si l'un est lié à l'autre par une permutation circulaire amenant A en B. »*

Le théorème fondamental de la géométrie projective reste indémontrable sans le recours à une relation étrangère à l'incidence et l'ordre. Enriques introduit alors l'axiome de continuité suivant, manifestement inspiré de celui de la coupure de Dedekind :

- « V. *Supposons tous les éléments d'un segment AB classés en deux catégories telles que :*
- » 1° *l'élément A appartient à la première catégorie et B à la seconde ;*
  - » 2° *selon un ordre donné, tout élément de la première catégorie précède tout élément de la seconde.*
- » *Alors il existe un élément C tel que tout élément du segment AB qui précède C appartient à la première catégorie et que tout élément du segment AB qui suit C appartient à la seconde catégorie. »*

Par la nature même de la géométrie projective, Enriques est conduit à classer les axiomes selon le type de la relation qu'ils déterminent et non selon les figures.

Aucune question n'est posée par lui sur la compatibilité de son système d'axiomes ou l'indépendance de ceux-ci.

A la même époque, F. Schur montrait la possibilité de construire la géométrie projective en remplaçant la notion fondamentale de continuité par celle de déplacement, donc celle de congruence <sup>1</sup>.

#### LES « GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE » DE HILBERT <sup>2</sup>

En 1899 parut un ouvrage de Hilbert consacré aux *Fondements de la géométrie* dont le succès fut considérable <sup>3</sup>. Il expose sa position comme suit : « Nous pensons

<sup>1</sup> V. Voir ci-dessous.

<sup>2</sup> D. HILBERT, 1862-1943.

<sup>3</sup> *Grundlagen der Geometrie*, première édition, 1899; neuvième édition, 1962. Traduction française de LAUGEL, d'après la première édition, parue en 1900, sous le titre « Les principes fondamentaux de la géométrie » ; une nouvelle traduction, mise à jour, est en préparation.

trois différents systèmes de choses; nous nommons points les objets du premier système [...], droites ceux du second [...], et plans ceux du troisième [...].

» Entre les points, les droites et les plans, nous pensons des relations que nous exprimons par des termes tels que être sur, appartenir, congruent (ou égal), parallèle, continu. Le sens exact et approprié au but des mathématiques de ces termes est donné par les axiomes de la géométrie.

» Les axiomes peuvent être classés en groupes. Ces groupes correspondent chacun à une opération fondamentale de notre intuition. »

Cela fait, Hilbert énonce vingt axiomes. Les voici <sup>1</sup>.

*Appartenance.* — I<sub>1</sub>. Il existe une droite liée à deux points donnés à laquelle appartiennent des deux points.

I<sub>2</sub>. Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points.

I<sub>3</sub>. Sur toute droite, il existe au moins deux points; il existe au moins trois points non alignés.

I<sub>4</sub>. Il existe un plan lié à trois points non alignés auquel appartiennent ces trois points. A tout plan appartient au moins un point.

I<sub>5</sub>. Il n'existe pas plus d'un plan auquel appartiennent trois points non alignés.

I<sub>6</sub>. Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, tous les points de la droite appartiennent à ce plan.

I<sub>7</sub>. Si deux plans ont un point commun, ils en ont au moins deux.

I<sub>8</sub>. Il existe au moins quatre points non coplanaires.

*Ordre.* — II<sub>1</sub>. Si un point  $B$  est entre  $A$  et  $C$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés, distincts les uns des autres, et  $B$  est entre  $C$  et  $A$ .

II<sub>2</sub>. Relativement à deux points  $A$  et  $B$ , il existe au moins un point  $C$  de la droite  $AB$  tel que  $B$  est entre  $A$  et  $C$ .

II<sub>3</sub>. De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

II<sub>4</sub>. Soient trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un plan et une droite  $d$  ne passant par aucun de ces points, mais bien par un point du segment  $AB$ ; la droite  $d$  a un point commun avec le segment  $AC$  ou avec le segment  $BC$ .

*Congruence.* — III<sub>1</sub>. Soient  $A$  et  $B$  deux points d'une droite,  $A'$  un point de cette droite ou d'une autre. Sur la droite contenant  $A'$ , il existe un point  $B'$  tel que les segments  $AB$  et  $A'B'$  sont congruents.

La relation de congruence est réflexive:

$$AB \equiv AB \quad \text{et} \quad AB \equiv BA .$$

<sup>1</sup> Nous donnons le texte définitif admis par HILBERT dès 1937, date de la dernière édition de son ouvrage, parue de son vivant, la septième. Les auteurs français citent souvent les énoncés de Laugel établis d'après la première édition ou des textes plus récents; ils diffèrent notablement des suivants.

III<sub>2</sub>. La relation de congruence est transitive.  $AB \equiv CD$  et  $AB \equiv EF$  impliquent  $CD \equiv EF$ .

III<sub>3</sub>. Soient  $AB$  et  $BC$  d'une part,  $A'B'$  et  $B'C'$  d'autre part deux paires de segments appartenant chacune à une droite et chacune sans points communs. Si  $AB$  est congruent à  $A'B'$  et  $BC$  à  $B'C'$ , les segments  $AC$  et  $A'C'$  sont congruents.

III<sub>4</sub>. Dans un plan  $\alpha$  soit un angle  $(hk)$  et, dans un plan  $\alpha'$ , considérons une droite  $a'$  et un de ses côtés. Soit  $h'$  une demi-droite portée par  $a'$  et  $O'$  son origine. Dans le plan  $\alpha'$ , il existe une unique demi-droite  $k'$  telle que les angles  $(hk)$  et  $(h'k')$  soient congruents et telle que l'intérieur de l'angle  $(h'k')$  appartienne au côté choisi de  $a'$ .

La relation de congruence des angles est réflexive:

$$(hk) \equiv (hk) \equiv (kh) .$$

III<sub>5</sub>. Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que les segments  $AB$  et  $A'B'$  d'une part,  $AC$  et  $A'C'$  d'autre part soient respectivement congruents, ainsi que les angles  $BAC$  et  $B'A'C'$ . Alors les angles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont congruents.

*Parallélisme.* — IV. Dans le plan, il n'existe pas plus d'une droite passant par un point donné et qui ne coupe pas une droite donnée de ce plan.

*Continuité.* — V<sub>1</sub>. Sur une droite, soient deux segments  $A_0A_1$  et  $A_0B$  tels que  $A_1$  soit entre  $A_0$  et  $B$ . Sur cette droite, construisons une suite de points distincts  $A_2, A_3, \dots, A_n$  telle que les segments  $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  soient congruents entre eux. Il existe au moins un entier  $n$  tel que  $B$  est entre  $A_0$  et  $A_n$ .

V<sub>2</sub>. Si l'on admet les axiomes de l'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède, l'ensemble des points d'une droite n'est susceptible d'aucune extension.

La comparaison de ces énoncés avec ceux d'Euclide est frappante; comme chez Méray et Pasch, toute notion de grandeur, toute prétention à des définitions, toute allusion à la vérité ou la nécessité des axiomes ont disparu. La classification de Hilbert conduit à des groupements de théorèmes par l'ensemble des axiomes nécessaires à leur démonstration.

Hilbert innove encore sur un autre sujet. Il établit la compatibilité de son système en montrant que toute contradiction de la géométrie implique l'existence d'une disparité analogue en arithmétique. Puis, au moyen de géométries abstraites appropriées, il montre l'indépendance des plus importants de ses axiomes. Il aborde encore de nombreuses questions relatives au rôle de certains théorèmes, aux constructions. Les résumer nous entraînerait trop loin.

Avec Hilbert et sa « méthode axiomatique », le problème « fort difficile » posé par Bertrand des fondements de la géométrie est ramené à de justes proportions. Sous réserve de conditions de compatibilité et d'indépendance, le choix des axiomes est arbitraire. Si la géométrie doit servir à la représentation des phénomènes physiques, ce choix est conditionné par des données empiriques. Le rôle de l'observation ou de l'intuition se limite à cela.

L'influence de Hilbert fut grande. Durant le dernier demi-siècle, sa méthode axiomatique fut appliquée à l'ensemble des sciences mathématiques. Les géomètres de notre siècle qui s'intéressent au problème du fondement de leur science se réfèrent à lui, que ce soit pour perfectionner son œuvre ou en remplacer certaines parties par d'autres constructions logiques.

#### TRAVAUX DE SCHUR, HJELMSLEV ET GONSETH

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, Schur<sup>1</sup> s'intéressa au problème des fondements des géométries projective, non euclidienne et élémentaire. Il élimine le plus possible la continuité des démonstrations des théorèmes, mais il admet la congruence, même en géométrie projective. Après diverses études de détail, il publie en 1909 une vue d'ensemble sur ses recherches dans ses *Grundlagen der Geometrie*.

Il retient un système d'axiomes inspiré de celui de Pasch; le segment et l'ordre y jouent un rôle essentiel. Dans ses axiomes, il pose un certain nombre d'existences; il limite ses recherches à l'espace ordinaire en posant que, hors de cet espace, il n'existe aucun point. Il admet un groupe d'axiomes sur les déplacements, donc la congruence. Il a besoin d'un axiome dit « du compas »: Soient  $O$ ,  $A$  et  $B$  trois points alignés tels que  $A$  appartienne au segment  $OB$ ; il existe un triangle rectangle  $OAC$  dont l'hypoténuse  $OC$  est congruente à  $AB$ .

Le but que se propose Hjelmlev<sup>2</sup> est de construire la géométrie plane en attribuant un rôle important à la symétrie. Il s'efforce de réduire au minimum l'emploi des axiomes d'ordre. Il distingue la géométrie « ordinaire » (ou lobatchevskienne) dans laquelle deux droites non sécantes n'ont qu'une unique perpendiculaire commune et le cas « singulier » (ou euclidien) où elles en ont une infinité. Finalement, il admet le système d'axiomes suivant:

Unicité de la droite par deux points; transitivité de la congruence des segments; existence de deux segments, portés par une droite, ayant une extrémité en un point de cette droite et congruents à un segment donné; existence de la symétrie orthogonale, du retournement d'un triangle isocèle autour de sa hauteur, du milieu d'un segment et l'unicité de ce milieu; non-alignement des milieux des côtés d'un triangle.

L'auteur renonce à toute étude de l'indépendance de ce système.

Dans son ouvrage consacré au problème de l'espace, M. Gonseth<sup>3</sup> insiste sur le caractère dialectique de la science géométrique, c'est-à-dire sur la nécessité de remettre constamment sur le métier l'étude des fondements de toute science géométrique destinée à donner une image de la réalité physique, car de nouvelles expériences peuvent remettre en question tout ou partie des résultats acquis.

<sup>1</sup> F. SCHUR, 1856-1932.

<sup>2</sup> J. HJELMSLEV, 1873-1950. « Neue Begründung der ebenen Geometrie », *Math. Ann.*, 64, 1907.

<sup>3</sup> F. GONSETH, 1891- . *La géométrie et le problème de l'espace*, 1945-1955.

## QUELQUES OPINIONS DE PHILOSOPHES

Pour la plupart, les philosophes de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle restèrent étrangers au mouvement de rénovation des fondements de la géométrie qui se produisit à cette époque. Ils s'en tiennent aux opinions classiques de Legendre et ne se dégagent pas de l'autorité de ce géomètre. L'essai de Delboeuf n'apporta rien de nouveau. Voici quelques citations extraites d'ouvrages d'enseignement.

Dans ses *Leçons de Philosophie*<sup>1</sup> Rabier<sup>2</sup> s'exprime comme suit :

« Bien qu'indémontrables, les axiomes ne nous paraissent pas arbitraires, ils nous semblent évidents et nécessaires. Ils ne sauraient avoir d'autre fondement que l'expérience. Seulement l'expérience dont il s'agit n'est pas l'expérience externe sensible, c'est l'expérience interne ou *intuition*. »

L'axiome, dit Boirac<sup>3</sup> est une « *vérité qui énonce un rapport nécessaire entre des grandeurs ou quantités quelconques* ; il n'est pas seulement évident et indémontrable, il est universel.

« Au moins en géométrie la définition ne suffit pas toujours à faire connaître toutes les propriétés primitives d'une figure et l'intuition peut en découvrir d'autres [.....]. Ces principes [.....] ont été appelés tantôt axiomes [.....], tantôt postulats [.....]. »

Boirac critique l'évidence car, dit-il, « elle se réduit à l'*absence d'une seconde idée capable de contredire la première*. Mais en droit cette inconcevabilité du contraire n'est pas un signe infaillible de vérité. »

Pour l'abbé Durand<sup>4</sup>, « les axiomes sont des propositions nécessaires, évidentes, indémontrables [.....]. Les postulats sont des vérités évidentes comme les axiomes [.....]. La géométrie n'a besoin que d'un ou deux postulats [.....]. On ne déduit rien de l'axiome, mais on déduit tout en vertu de l'axiome. Supprimez la vérité de l'axiome, la démonstration est absolument impossible. »

La critique de l'évidence est reprise par Milhaud<sup>5</sup> qui dans son *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*<sup>6</sup> écrit : « L'évidence des axiomes vient-elle du caractère *contradictoire* de leurs négatives ? La nécessité qu'ils comportent est-elle la nécessité logique ? Les propositions qui servent de point de départ aux démonstrations ne peuvent se démontrer. Leur évidence n'est pas celle qui relève du principe de contradiction. Elle est de même nature que celle qui accompagne l'observation. »

<sup>1</sup> Première édition, 1884. Nous citons la sixième édition, 1919.

<sup>2</sup> E. RABIER, 1846-1932.

<sup>3</sup> E. BOIRAC, 1851-1917. *Cours élémentaire de philosophie*, première édition, 1889. Nous citons la deuxième édition, 1890.

<sup>4</sup> Abbé E. DURAND, 1856-1932. *Eléments de philosophie scientifique et de philosophie morale*, première édition, 1894. Nous citons la troisième édition, (1900).

<sup>5</sup> G. MILHAUD, 1858-1918.

<sup>6</sup> Première édition, 1894 ; nous citons la troisième édition, 1912.

Dans la suite de l'ouvrage, l'auteur fait usage de la géométrie non euclidienne. Il donne un exemple de perfectionnement de la pensée philosophique basé sur un progrès de la science.

Ainsi, dans l'étude d'un problème important de philosophie des sciences, les philosophes ne furent d'aucun secours au géomètres. En de telles matières la connaissance approfondie du sujet est indispensable à toute étude critique.

#### CONCLUSION

L'exposé précédent montre avec quelle lenteur les idées sur les bases de la géométrie ont évolué d'Euclide à l'époque moderne. Serait-ce que le génie d'Euclide a écrasé ses commentateurs et ses critiques ? Cet homme serait-il le produit du milieu exceptionnel que fut Alexandrie de son temps ? Quelles sont les causes de la floraison de tentatives nouvelles apparues depuis un siècle ? Contentons-nous de poser ces questions.

La mise au net de la méthode axiomatique par Hilbert a vidé le problème du fondement des sciences de raisonnement de son caractère inquiétant. Est-ce à dire que tous les problèmes philosophiques liés à ces questions sont résolus ? Loin de là. Le problème de la compatibilité logique de ces sciences a reçu une solution partielle en ce sens que cette qualité est indémontrable. Les géomètres seront-ils conduits à reprendre un jour tous leurs travaux à pied d'œuvre par la découverte d'une contradiction ? Une telle éventualité, rendue improbable par deux millénaires de recherche, ne peut être rigoureusement exclue.

L'adéquation de la géométrie à la physique peut lui imposer d'autres modifications. La physique actuelle fait un usage étendu du discontinu. Faudra-t-il bannir le continu de la partie de la géométrie dont les physiciens font usage et ne considérer la « géométrie continue » que comme une approximation d'autant mieux appropriée à la représentation de la réalité physique que le nombre des particules présentes est plus considérable ? Cette appropriation conduira-t-elle à attribuer une probabilité à la validité des théorèmes ? La claire vision du passé est peut-être de nature à faciliter l'évolution future de la science, lorsqu'elle s'avérera nécessaire.

Manuscrit reçu le 2 novembre 1966.

---