Systèmes autogravitants à densité de phase constante dans un domaine fini

Autor(en): **Bouvier, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **21 (1968)**

Heft 2

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-739403

SYSTÈMES AUTOGRAVITANTS A DENSITÉ DE PHASE CONSTANTE DANS UN DOMAINE FINI

PAR

P. BOUVIER

ABSTRACT

For any given initial conditions, a self-gravitating system undergoes at first a short phase of violent relaxation due to collective effects, followed over a much longer span of time by relaxation due to binary collisions between stars of the system. What can be said about a possible state of equilibrium after the violent relaxation stage ? This problem is discussed here for 2- and 3-dimensional systems on lines similar to those followed by Hohl & Feix (1967) for the 1-dimensional case using the so-called waterbag model. The system cannot reach a state of equilibrium by violent relaxation alone; numerical computations performed by several authors, which we shall later complete for the 3-dimensional problem, show that the system does its best to approach equilibrium

RÉSUMÉ

A partir de conditions initiales quelconques, un système autogravitant traverse d'abord une courte phase de relaxation violente due à des effets collectifs, bientôt suivie, sur une longue durée, de la relaxation par collisions binaires entre étoiles du système. Qu'en est-il d'un éventuel état d'équilibre atteint après relaxation violente ? Ce problème est discuté ici pour des systèmes à 2 et 3 dimensions de manière similaire à celle de Hohl et Feix (1967), sur la base du « modèle de l'outre » (waterbag model). Le système ne peut, par relaxation violente seulement, atteindre un état d'équilibre; des explorations numériques effectuées par divers auteurs, que nous compléterons plus tard pour le cas 3-dimensionnel, montrent que le système tente de s'approcher au mieux de l'équilibre.

INTRODUCTION

Le problème traité ici concerne la phase du mélange dynamique, appelée aussi relaxation violente, qui caractérise l'évolution initiale d'un système stellaire. La durée τ_1 de cette phase évolutive est de l'ordre de la période moyenne d'oscillation d'une étoile du système, tandis que ce sera au bout d'un temps τ_2 très supérieur à τ_1 que tendra à s'établir l'équipartition d'énergie par relaxation due à l'effet des chocs binaires entre étoiles du système. Si n est le nombre total des étoiles du système, on a en effet

$$\tau_2/\tau_1 \sim 10^{-2}\, n/\log n \qquad (n \gg 1)\,.$$

Nous voulons examiner ici l'état dans lequel se trouvera le système après le temps τ_1 de relaxation violente au cours de laquelle les étoiles étaient en interaction avec les fluctuations du potentiel $\phi\,(\mathbf{x}, t)$ du système. Si c'est un état d'équilibre, il ne sera que provisoire parce que lentement perturbé par l'effet des chocs sur une durée τ_2; on aura un quasi-équilibre ou [3] équilibre non stationnaire.

Lecar [4], puis Hohl et Feix [3] ont abordé le problème en le réduisant à une seule dimension spatiale; les « étoiles » sont alors des plans parallèles chargés de matière, s'attirant entre eux et pouvant librement se traverser en produisant alors des fluctuations de potentiel. Un tel système donnerait une représentation approximative des mouvements stellaires perpendiculaires au plan galactique dans le voisinage solaire.

La méthode utilisée consiste à intégrer numériquement les équations de mouvement des « étoiles » à partir de diverses conditions initiales au temps $t = 0$; on pourra ensuite examiner à toute époque $t > 0$ la distribution des positions et des vitesses, ce qui revient à contourner la résolution directe de l'équation non linéaire de Liouville.

La méthode de calcul de Lecar est la plus précise, mais celle de Hohl et Feix peut s'appliquer à un nombre plus élevé de plans. Le développement de ces expériences numériques montre une tendance du système à s'approcher d'un état d'équilibre, sans que l'on puisse toutefois affirmer que cet état soit vraiment atteint.

Si d'ailleurs un tel état existait, la fonction de distribution ne devrait plus dépendre des variables de phase x, v que comme fonction de l'intégrale première d'énergie

(1) $$f\,(x, v; \tau_1) = F\,(U)$$

où $$U = \tfrac{1}{2}\, m v^2 + m\phi\,(x, \tau_1)$$

m étant la masse par unité de surface portée par chacun des plans.

La distribution $F\,(U)$ se déduit en principe de la distribution initiale $f\,(x, v; 0)$ en résolvant l'équation aux dérivées partielles de Liouville-(-Vlasov)

(2) $$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

combinée à celle de Poisson

(3) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi G \int f\, dv\,.$$

Il y a un cas où l'on peut se dispenser de cette résolution, insurmontable en général, celui où l'on a initialement

$$f(x, v; 0) = \begin{cases} A \quad (\text{const.} > 0) & \text{en} \\ 0 & \text{en dehors de} \end{cases} \mathscr{D}_0 \tag{4}$$

$\mathscr{D}_0$ étant un domaine fini de l'espace (x, v). A l'époque $t = \tau_1$, on aura toujours $F(U) = A$ mais dans un domaine $\mathscr{D}_1$ de même extension en phase que $\mathscr{D}_0$ (théorème de Liouville).

Ce modèle particulier de distribution initiale, qu'on peut appeler « modèle de l'outre » (waterbag model), permet de n'invoquer que la conservation d'extension en phase pour le calcul du modèle d'équilibre non stationnaire à $t = \tau_1$. Cependant, l'énergie totale $E(t = \tau_1)$ se révèle toujours inférieure à l'énergie $E(t = 0)$ de plus [3], $E(\tau_1)$ est un minimum d'énergie de sorte que, partant avec une énergie totale $E(0)$ quelconque, le système qui évolue sous l'effet du mélange des orbites, n'arrivera jamais à un état d'équilibre à $t = \tau_1$. Le calcul numérique montre que l'approche à l'équilibre est d'autant mieux réalisé que la différence d'énergie $E(\tau_1) - E(0)$ est plus faible, et si cette différence est élevée, on assiste généralement à une fragmentation du système [3].

SYSTÈME BIDIMENSIONNEL

Les « étoiles » sont maintenant des tringles rectilignes et parallèles, s'attirant entre elles avec une force inversement proportionnelle à la distance.

R. W. Hockney [2] a procédé à des expériences numériques sur un tel système de 2000 tringles; pour que le système puisse représenter un modèle de galaxie réduite à un disque, il importe d'introduire une rotation d'ensemble permettant à la force d'attraction d'être contrebalancée par la force centrifuge. Hockney a toutefois aussi étudié le cas de rotation nulle; le système subit une implosion radiale avant de se séparer en deux catégories d'étoiles dont la plus nombreuse se condense en un noyau en quasi-équilibre, tandis qu'une minorité d'étoiles d'énergie élevée va former un halo autour du noyau.

En repérant les « étoiles » par des coordonnées polaires de position R, θ auxquelles correspondent respectivement les composantes de vitesse Π, Θ nous avons donc, pour le modèle de l'outre:

$$f(R, \theta, \Pi, \Theta; 0) \begin{cases} = A & \text{en} \\ = 0 & \text{en dehors de} \end{cases} \mathscr{D}_0 \tag{5}$$

$\mathscr{D}_0$ est le domaine à 4 dimensions défini par ses projections sur l'espace des positions et celui des vitesses, à savoir les cercles $R = R_0$ et $w = w_0$ où R_0 est le rayon initial du système et w_0 le module maximum de vitesse en tout point.

La normalisation de f au nombre total N de tringles nous conduit à

$$A = \frac{N}{(\pi R_0 w_0)^2}.$$

D'autre part, en multipliant les deux membres de l'équation de mouvement de l'une des tringles

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt}\right) = -2G \frac{M(R)}{R}$$

par $RdM(R)$ et en intégrant de 0 à M (masse totale par unité de longueur), on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} \int R^2 \, dM(R) - \int (\Pi^2 + \Theta^2) \, dM(R) = -GM^2 .$$

Comme les énergies cinétiques radiale (T_R) et transversale (T_0) sont égales quand il y a isotropie des vitesses nous aurons, dans l'état d'équilibre, la forme suivante pour le théorème du viriel

(6) $$2T_R = \tfrac{1}{2} GM^2 .$$

Posons de façon générale

$$\alpha = \frac{4\, T_R}{GM^2} = \frac{2\, T}{GM^2}$$

toutes les énergies étant prises par unité de longueur.

Dans le cas du modèle de l'outre considéré ici, nous trouvons à $t = 0$, l'énergie cinétique

(7) $$T_0 = 2\pi^2 Am \int_0^{R_0} RdR \int_0^{w_0} w^3 \, dw = \tfrac{1}{4} M w_0{}^2 .$$

L'énergie potentielle par unité de longueur est donnée par

$$W_0 = \tfrac{1}{2} \int \phi \, dM(R)$$

où, pour un cylindre homogène, nous avons une densité

$$\rho = \frac{M}{\pi R_0{}^2}$$

et un potentiel égal à

$$\phi(R) = GM \frac{R^2}{R_0{}^2} \qquad si \ \phi(0) = 0$$

par conséquent,

(8) $$W_0 = \tfrac{1}{4} GM^2$$

et l'énergie initiale totale s'élève, par addition de (7) et (8) à:

$$E_0 = \tfrac{1}{4}(M w_0^2 + GM^2) = \tfrac{1}{4}(2\alpha_0 + 1)\, GM^2 . \tag{9}$$

Dans l'hypothèse d'un état d'équilibre atteint par relaxation violente en un temps τ_1, nous pourrons écrire

$$f(R, \theta, \Pi, \Theta; \tau_1) = F(U, J) \tag{10}$$

où U et J sont les intégrales respectives d'énergie et de moment angulaire

$$U = \tfrac{1}{2} m (\Pi^2 + \Theta^2) + m\phi(R, \tau_1)$$

$$J = mR\Theta$$

m étant la masse par unité de longueur portée par chacune des tringles. Passons, en un point donné R, θ des variables Π, Θ aux variables U, J:

$$d\Pi\, d\Theta = \frac{1}{m^2 R\Pi}\, dU\, dJ$$

les limites de J seront $\pm J_*$ où J_* est le moment angulaire maximum à U donné, et dont le carré vaut

$$J_x^2 = 2m\, R^2 (U - m\phi)$$

U varie de $m\phi$ à une valeur maximum $m\varepsilon$. Notons que, comme pour le problème à une dimension, le système est fermé en ce sens que le potentiel croît indéfiniment avec R (comme $\log R$) et qu'il n'y a pas d'évasion possible.

La densité de masse a pour valeur

$$\rho(R) = A \int_{m\phi}^{m\varepsilon} dU \int_{-J_*}^{+J_*} (J_*^2 - J^2)^{-\frac{1}{2}}\, dJ = Am\pi(\varepsilon - \phi)$$

et l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\phi}{dR}\right) = 4\frac{GM}{R_0^3\, w_0^3}(\varepsilon - \phi) \tag{11}$$

où $M = Nm$, masse totale par unité de longueur.

Introduisons les grandeurs sans dimension x, ψ définies par

$$kR = x , \qquad \varepsilon - \phi = \beta\, w_0^2\, \psi$$

où β est une constante et

$$(kR_0)^2 = 4GM/w_0^2 .$$

(11) se réduit alors à l'équation de Bessel d'ordre zéro

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\psi}{dx}\right) + \psi = 0 \tag{12}$$

d'où
$$\psi = J_0(x)$$

à un facteur constant près, inclus dans β.

Les conditions aux limites sont les suivantes:

au centre: $x = 0$,

$$\varepsilon = \phi(0) + \beta w_0^2$$

$$\left(\frac{d\phi}{dR}\right)_0 = +k\beta w_0^2 J_1(0) \equiv 0$$

au bord: $x = x_1 = kR_1 = 2.405$, premier zéro de $J_0(x)$

$$\varepsilon = \phi(R_1) = \log(2GM) \quad \text{(raccord de potentiel)}$$

$$2GM/R_1 = \left(\frac{d\phi}{dR}\right) = \beta w_0^2 kJ_1(x_1) \quad \text{(raccord du champ)} \tag{13}$$

Calculons les énergies par unité de longueur au temps τ_1; la symétrie circulaire s'est conservée et nous avons:

$$2T_R = 2\pi A \int_0^{R_1} R\,dR \int_{m\phi}^{m\varepsilon} dU \int_{-J_*}^{+J_*} (J_*^2 - J^2)^{-\frac{1}{2}}\,\Pi^2\,dJ \tag{14}$$
$$= 4\,I_0\,\beta^2\,\alpha_0\,M\,w_0^2 = 8\,I_0\,\beta^2\,\alpha_0^2\,GM^2$$

ou

$$I_0 = \int_0^{x_1} (J_0(x))^2\,x\,dx = 0.779 .$$

On vérifie facilement que $2T_\theta = 2T_R$, donc $T_1 = 2T_R$.

D'autre part

$$W_1 = \pi \int_0^{R_1} \phi\rho\,R\,dR = \frac{1}{4G}\int_0^{R_1} \phi\,\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\phi}{dR}\right)dR$$

$$= \frac{1}{4G} \phi(R_1) R_1 \left(\frac{d\phi}{dR}\right)_1 - \frac{1}{4G} \int_0^{R_1} R \left(\frac{d\phi}{dR}\right)^2 dR$$

d'où, avec $\phi(0) = 0$, donc $\phi(R_1) = \beta w_0{}^2$

$$W_1 = -\left[x_1 J_1(x_1) + I_1\right] \beta^2 \alpha_0{}^2 GM^2 \tag{15}$$

x_1 étant, rappelons-le, le premier zéro de $J_0(x)$ et

$$I_1 = \int_0^{x_1} (J_1(x))^2 x dx .$$

L'on a d'ailleurs $I_1 = I_0$ en vertu de la propriété

$$xJ_0 = \frac{d}{dx}(xJ_1)$$

des fonctions de Bessel.

Changeons de variable en posant $x = \gamma y$, où γ est une constante arbitraire; I_0 n'est pas modifié et (15) devient

$$W_1 = -\left[\gamma y_1 J_1(\gamma y_1) + I_0\right] \beta^2 \alpha_0{}^2 GM^2 \tag{15'}$$

avec $\gamma y_1 = 2.405$.

La condition de raccord de champ (13) s'écrit maintenant

$$2GM = \beta w_0{}^2 \gamma y_1 J_1(\gamma y_1) \tag{13'}$$

par élimination de γ, nous avons par conséquent

$$W_1 = -(I_0 \beta^2 \alpha_0{}^2 + \beta\alpha_0) GM^2$$

et l'énergie totale a pour valeur

$$E_1 = T_1 + W_1 = (7 I_0 \beta^2 \alpha_0{}^2 - \beta\alpha_0) GM^2 . \tag{16}$$

En exigeant que soit vérifié le théorème du viriel dans l'état d'équilibre à $t = \tau_1$, nous devons avoir

$$\alpha_1 \equiv \frac{2 T_1}{GM^2} = 1$$

d'où

$$\beta^2 \alpha_0{}^2 = \frac{1}{16 I_0}$$

de sorte que la différence d'énergie totale, en unités GM^2, soit d'après (9) et (16),

$$E_1 - E_0 = \frac{7}{16} - \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{I_0}}\right) - \tfrac{1}{2}\,\alpha_0 \tag{17}$$

est bien négative quel que soit α_0, ayant une valeur minimum en valeur absolue pour $\alpha_0 = 0$ (implosion radiale). De plus, l'énergie E_1, qui s'écrit maintenant

$$E_1 = \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{4\sqrt{I_0}}\right) GM^2$$

ne dépend pas de α_0, c'est-à-dire des conditions initiales; il s'agit d'un minimum d'énergie, selon toute vraisemblance.

SYSTÈME TRIDIMENSIONNEL

L'état initial du modèle de l'outre sera défini ici par une distribution uniforme des points de phase dans un domaine $\mathscr{D}_0$ à six dimensions se projetant dans l'espace des positions sur la sphère de rayon R_0 et dans celui des vitesses sur la sphère de rayon w_0. La symétrie sphérique du système réduit les variables importantes à la seule distance au centre r et aux deux composantes respectivement radiale u et transversale v, de sorte que $u^2 + v^2 = w^2$.

$$\begin{aligned} f(r, u, v; 0) &= A \quad \text{(const. } > 0\text{) en} \\ &= 0 \quad \text{en dehors de} \end{aligned} \; \mathscr{D}_0\,. \tag{18}$$

La normalisation à N, nombre total d'étoiles, toutes de même masse m, nous amène à

$$A = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{N}{R_0{}^3\, w_0{}^3}$$

Désignons par M la masse totale Nm du système; le calcul des énergies initiales donnera:

$$T_0 = 16\pi^2 A \frac{m}{2} \int_0^{R_0} r^2\, dr \int_0^{W_0} w^4\, dw = \frac{3}{10} M w_0{}^2 \tag{19}$$

$$W_0 = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R_0} \tag{20}$$

d'où le rapport

$$\alpha_0 = \frac{2\,T_0}{-\,W_0} = \frac{R_0\, w_0^{\,2}}{GM}$$

et l'énergie initiale totale

$$(21) \qquad E_0 = T_0 + W_0 = -\tfrac{3}{5}\left(\frac{1}{\alpha_0} - \tfrac{1}{2}\right) M w_0^{\,2}$$

on a $E_0 < 0$ tant que $\alpha_0 < 2$. Si $\alpha_0 > 2$, le système peut être initialement instable et se fragmenter par la suite.

L'évolution de f, régie par l'équation de Liouville dans l'espace de phases à 6 dimensions pendant la durée τ_1 de relaxation violente, conservera la symétrie sphérique et si un état d'équilibre est atteint, on pourra poser

$$(22) \qquad f(r, u, v; \tau_1) = F(U, J),$$

de même qu'en (1) et en (10), où

$$U = \tfrac{1}{2}\, m\,(u^2 + v^2) + m\phi\,(r, \tau_1) \qquad et \qquad J = mrv$$

sont les intégrales premières d'énergie et de moment angulaire respectivement. La densité de masse a pour expression

$$\rho\,(r, \tau_1) = 2\pi m \int_0^{w_e} v\, dv \int_{-\sqrt{w_e^2 - v^2}}^{+\sqrt{w_e^2 - v^2}} f(r, u, v; \tau_1)\, du$$

où $w_e(r)$ est une vitesse maximum.

Notons qu'ici, contrairement aux cas à 1 et à 2 dimensions, le système est ouvert, car $\phi\,(r, \tau_1) - \phi\,(0, \tau_1)$ tend vers une valeur finie quand $r \to \infty$ et une étoile de vitesse $\geqq w_e$ peut aller à l'infini (évasion), son énergie totale devenant nulle. En un point donné, r, θ du système, passons des variables u, v aux variables U, J; nous trouvons sans peine

$$dudv = \frac{1}{m^2\, ru}\, dUdJ$$

et les limites du domaine $\mathscr{D}_1$ issu de $\mathscr{D}_0$ et de même mesure, seront

$$r = R_1$$

$$J = J_* = r\sqrt{2m\,(U - m\phi)},$$

moment angulaire maximum à r, U fixes

$$U = U_* = m\varepsilon\,,$$

énergie maximum, telle que

$$F(U,J) = 0 \qquad \text{dès que} \qquad U \geqq U_* .$$

Il en résulte, pour la densité de masse

$$\rho(r) = 4\pi A \frac{1}{r} \int_{m\phi}^{m\varepsilon} dU \int_0^{J_*} (J_*^2 - J^2)^{-\frac{1}{2}} \, J dJ = \frac{3}{\pi\sqrt{2}} \frac{M}{R_0^{\,3} \, w_0^{\,3}} (\varepsilon - \phi)^{\frac{3}{2}}$$

l'équation de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = 6\sqrt{2}\, G \frac{M}{R_0^{\,3} \, w_0^{\,3}} (\varepsilon - \phi)^{\frac{3}{2}} \tag{23}$$

devient, en terme des grandeurs sans dimension ξ, ψ définies par

$$kr = \xi , \qquad \epsilon - \phi = \beta \, w_0^{\,2} \, \psi$$

et avec

$$(kR_0)^2 = 6 \, (2\beta)^{\frac{1}{2}} \, \alpha_0^{\,-1}.$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}\right) + \psi^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{24}$$

qui est l'équation d'Emden pour un polytrope d'indice 3/2.

Conditions aux limites:

$$\text{au centre, } \xi = 0 , \quad \psi(0) = 1 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = \phi(0) + \beta w_0^{\,2} ,$$

ce qui montre que 2β mesure le carré du rapport de la vitesse de chute libre du bord au centre du modèle final à la vitesse maximum w_0 du modèle initial.

En outre,

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_0 = 0$$

Au bord,

$$\xi = \xi_1 = kR_1 = 3.6537 \ldots$$

$$\psi(\xi_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = \phi(R_1) = -G \frac{M}{R_1}$$

raccord de potentiel

$$G \frac{M}{R_1{}^2} = \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_1 = -\beta w_0{}^2 k \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_1 \tag{25}$$

raccord de champ

$$\text{avec} \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_1 = -0.2033 \ldots$$

L'équation d'Emden (24) admettant une constante d'homologie, soit γ, nous pouvons multiplier ψ par γ et ξ par $\gamma^{-\frac{1}{4}}$ ce qui revient, en maintenant R_1 et M fixes, à multiplier la densité centrale par $\gamma^{-\frac{3}{2}}$ et l'échelle de longueur k^{-1} par $\gamma^{\frac{1}{4}}$.

Nous déterminons alors les deux constantes β, γ par la condition (25) du raccord de champ qui devient

$$G \frac{M}{R_1{}^2} = -\beta w_0{}^2 k\gamma \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_1 \tag{26}$$

et par la condition du viriel

$$\alpha_1 \equiv \frac{2\, T_1}{-W_1} = 1\,. \tag{27}$$

Avec les valeurs numériques relatives au polytrope d'indice 3/2, (26) nous donne

$$\beta \alpha_0{}^2 \gamma^{\frac{4}{3}} = 1.10\,. \tag{28}$$

Les énergies à l'équilibre ont pour expression

$$T_1 = 16\pi^2 \sqrt{2}\, A m^{-\frac{3}{2}} \int_0^{R_1} r^2\, dr \int_{m\phi}^{m\varepsilon} (U - m\phi)^{\frac{3}{2}}\, dU$$

$$= \frac{18\sqrt{2}}{5} \frac{M}{R_0{}^3\; w_0{}^3} \int_0^{R_1} r^2\, dr\, (\varepsilon - \phi)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 5} J\, \beta^{7/4}\, \alpha_0^{\frac{3}{2}} \gamma^{7/4}\, M w_0{}^2$$

où

$$J = \int_0^{\xi_1} \xi^2 \psi^{\frac{5}{2}}\, d\xi = 1.490$$

$$-W_1 = \frac{6}{7} G \frac{M^2}{R_1} = \frac{3^{\frac{3}{2}}\, 2^{7/4}}{7\, \xi_1} \beta^{7/4} \alpha_0{}^{\frac{3}{2}} \gamma^{7/4}\, M w_0{}^2\,.$$

La condition (27) fournit la relation

$$\beta^{\frac{3}{2}} \alpha_0{}^3 \gamma^{7/4} = \frac{30\sqrt{2}}{7\xi_1, J} \tag{29}$$

De (28) et (29) on tire

$$\gamma = 1.15 \qquad \text{(indépendant de } \alpha_0\text{)}$$

puis

$$\beta\alpha_0{}^2 = 0.91$$

par suite l'énergie totale

$$E_1 = \tfrac{1}{2} W_1 = -\, 0.335\, \alpha_0{}^{-1}\, M w_0{}^2. \tag{30}$$

et la différence d'énergie totale, en unités $Mw_0{}^2$, vaudra, selon (21) et (30)

$$E_1 - E_0 = -0.335\, \alpha_0{}^{-2} + 0.60\, \alpha_0{}^{-1} - 0.30\,. \tag{31}$$

Elle se présente comme un trinôme du deuxième degré en $\alpha^-{}_0{}^1$, restant négatif quel que soit α_0. Le mélange dynamique des orbites conduit donc bien toujours à une énergie finale E_1 plus basse que l'énergie initiale E_0 et la valeur de E_1 est vraisemblablement un minimum d'énergie.

La différence $E_1 - E_0$ est minimum en valeur absolue pour

$$\alpha_0 = 1.12\,.$$

L'évolution par voie numérique d'un tel système a été suivie par M. Hénon [1 en utilisant une méthode de Campbell qui ramène dans une certaine mesure le problème au cas unidimensionnel: le système est représenté par N couches sphériques concentriques s'attirant entre elles et pouvant se traverser librement. Les conditions initiales supposaient une distribution maxwellienne des vitesses de même dispersion en tout point; elles diffèrent donc un peu des conditions du « modèle de l'outre » considéré ici. Un programme d'exploration numérique est actuellement en préparation pour étudier l'évolution du système dans les conditions du présent travail.

Observatoire de Genève,

[1] HÉNON, M. *Ann. d'Ap.*, *27*, 83 (1964) et *Colloque internat. d'Astrophysique*, Liège, 1966, p. 227.
[2] HOCKNEY, R. W. *Symposium on Computer Simulation of Plasma and Many-body problems*, Williamsburg Va., 1967.
[3] HOHL, F. et M. FEIX. *Ap. J.*, *147*, 1164, 1967.
[4] LECAR, M. *Colloque internat. d'Astrophysique*, Liège, 1966, p. 243.

Manuscrit reçu le 12 juin 1968.