Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Band: 22 (1969)

Heft: 3

Artikel: Étude par résonance magnétique d'alliages à haute susceptibilité

Anhang: Appendice A

Autor: Dupraz, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739163

APPENDICE A

CALCUL DE $\chi_+ (\omega = 0) \equiv \chi_z$

Ce calcul, qui montre que le modèle est bien cohérent, ne présente pas de difficultés particulières; tout est dans la manière convenable de grouper les termes afin de mettre en évidence les simplifications possibles.

Cas particulier : $\delta_{ie} = \delta_{ei} = 0$

Il est utile de définir les quantités suivantes:

$$\omega_i' = \omega_i + a + i\delta_{iL}$$

$$\omega_e' = \omega_e + b + i\delta_{eL}$$

Alors les définitions (II-17) deviennent:

$$\varepsilon_i = \omega_i + a - i\delta_{iL} = \omega_i'$$

$$\zeta_i = \frac{g_i}{g_e} b + i\lambda_{ie}\beta\delta_{iL} = \lambda_{ie}\beta \left(\frac{1}{\beta} g_i \mu_B M_z + i\delta_{iL} \right)$$

mais selon (II-2) $M_z = \beta (f_z + \lambda_{ie} m_z)$, d'où:

$$\zeta_i = \lambda_{ie}\beta (\omega_i + a + i\delta_{iB}) = \lambda_{ie}\beta\omega_i'$$

$$\eta_i = \frac{1}{\lambda_{ie}} \left(\frac{g_i}{g_e} b + i\lambda_{ie}\beta\delta_{iL} \right) = \frac{1}{\lambda_{ie}} \zeta_i = \beta\omega_i'$$

La susceptibilité $\chi_+ (\omega = 0)$ donnée par (II-18) s'écrit:

$$\chi_+ (\omega = 0) = \frac{\eta_i (\varepsilon_e + \zeta_e) + \eta_e (\varepsilon_i + \zeta_i)}{\varepsilon_i \varepsilon_e - \zeta_i \zeta_e} = \frac{\beta\omega_i' \omega_e' (1 + \lambda_{ie}\alpha) + \alpha\omega_i' \omega_e' (1 + \lambda_{ie}\beta)}{\omega_i'\omega_e' - \lambda_{ie}^2 \alpha\beta\, \omega_i'\omega_e'} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta + 2\lambda_{ie}\alpha\beta}{1 - \lambda_{ie}^2 \alpha\beta}$$

On retrouve donc la susceptibilité statique donnée par (II-7) grâce à une simplification par la quantité $\omega_i'\omega_e'$.

Cas général : δ_{ie} *et* $\delta_{ei} \neq 0$

L'idée est de faire apparaître les quantités ω'_i et ω'_e de façon à effectuer une simplification semblable au cas précédent. On obtient alors pour les définitions (II-17):

$$\varepsilon_i = \omega'_i + i\delta_{ie} + i\lambda_{ie}\alpha\delta_{ei}$$

$$\zeta_i = \lambda_{ie}\beta\left[\frac{1}{\beta}g_i\mu_B M_z + i(\delta_{ie}+\delta_{iL})\right] + i\delta_{ei}$$

$$\zeta_i = \lambda_{ie}\beta(\omega_i + a + i\delta_{iL}) + i\lambda_{ie}\beta\delta_{ie} + i\delta_{ei}$$

$$\zeta_i = \lambda_{ie}\beta\omega'_i + i\lambda_{ie}\beta\delta_{ie} + i\delta_{ei}$$

$$\eta_i = \frac{1}{\lambda_{ie}}\left[\zeta_i - i(1+\lambda_{ie}\alpha)\,\delta_{ei}\right] = \beta\omega'_i + i\beta\delta_{ie} - i\alpha\delta_{ei}$$

Le dénominateur $D = \varepsilon_i\varepsilon_e - \zeta_i\zeta_e$ de $\chi_+\,(\omega{=}0)$ s'écrit:

$$D = \omega'_i\omega'_e(1-\lambda_{ie}^2\alpha\beta) + i\omega'_i\cdot\delta_{ei}(1-\lambda_{ie}^2\alpha\beta) + i\omega'_e\cdot\delta_{ie}(1-\lambda_{ie}^2\alpha\beta) -$$

$$-(\delta_{ie}+\delta_{ei}\lambda_{ie}\alpha)(\delta_{ei}+\delta_{ie}\lambda_{ie}\beta) + (\delta_{ie}\lambda_{ie}\beta+\delta_{ei})(\delta_{ei}\lambda_{ie}\alpha+\delta_{ie})$$

$$D = \omega'_i\omega'_e(1-\lambda_{ie}^2\alpha\beta) + i\omega'_i\omega'_e(1-\lambda_{ie}^2\alpha\beta)\left(\frac{\delta_{ei}}{\omega'_e} + \frac{\delta_{ie}}{\omega'_i}\right)$$

Le numérateur $N = \eta_i(\varepsilon_e+\zeta_e) + \eta_e(\varepsilon_i+\zeta_i) = N_i + N_e$ s'écrit

$$N_i = \left[\beta\omega'_i + i(\beta\delta_{ie}-\alpha\delta_{ei})\right]\left\{\omega'_e(1+\lambda_{ie}\alpha) + i\left[(1+\lambda_{ie}\beta)\,\delta_{ie} + (1+\lambda_{ie}\alpha)\,\delta_{ei}\right]\right\}$$

Il est utile pour calculer $N_i + N_e$ de remarquer que le terme $(\beta\delta_{ie}-\alpha\delta_{ei})$ change de signe à l'opération $i \to e$ et $e \to i$, tandis que le terme $[(1+\lambda_{ie}\beta)\,\delta_{ie} + (1+\lambda_{ie}\alpha)\,\delta_{ei}]$ est invariant, d'où:

$$N = N_i + N_e = \omega'_i\omega'_e(\alpha+\beta+2\lambda_{ie}\alpha\beta) +$$

$$+ i\omega'_i\omega'_e\left(\frac{\beta}{\omega'_e} + \frac{\alpha}{\omega'_i}\right)\left[(1+\lambda_{ie}\beta)\,\delta_{ie} + (1+\lambda_{ie}\alpha)\,\delta_{ei}\right] +$$

$$+ i\omega'_i\omega'_e(\beta\delta_{ie}-\alpha\delta_{ei})\left[\frac{1}{\omega'_i}(1+\lambda_{ie}\alpha) - \frac{1}{\omega'_e}(1+\lambda_{ie}\beta)\right]$$

$$\chi_+(\omega=0) = \frac{N}{D} = \frac{R+iT+iV}{S+iU}$$

$$R = \alpha + \beta + 2\lambda_{ie}\alpha\beta$$

$$S = 1 - \lambda_{ie}^2\alpha\beta$$

$$T = \left(\frac{\beta}{\omega'_e} + \frac{\alpha}{\omega'_i} \right) [(1 + \lambda_{ie}\beta)\, \delta_{ie} + (1 + \lambda_{ie}\alpha)\, \delta_{ei}]$$

$$U = (1 - \lambda_{ie}^2 \alpha\beta) \left(\frac{\delta_{ei}}{\omega'_e} + \frac{\delta_{ie}}{\omega'_i} \right)$$

$$V = (\beta\delta_{ie} - \alpha\delta_{ei}) \left[\frac{1}{\omega'_i} (1 + \lambda_{ie}\alpha) - \frac{1}{\omega'_e} (1 + \lambda_{ie}\beta) \right]$$

On remarque que $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}}$ n'est rien d'autre que la susceptibilité statique; il faut donc vérifier l'identité suivante:

$$\frac{R + i\,T + i\,V}{S + i\,U} \overset{?}{=} \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}} \quad \text{ou encore } S\,T + S\,V \overset{?}{=} R\,U$$

En explicitant tous les termes dans la dernière relation, on constate qu'ils s'annullent tous deux à deux et l'on obtient bien une identité. On a ainsi démontré que:

$$\chi_+ (\omega = 0) \equiv \frac{\alpha + \beta + 2\lambda_{ie}\alpha\beta}{1 - \lambda_{ie}^2 \alpha\beta} = \chi_z$$

Remarque:

A aucun moment dans ce calcul nous n'avons fait de simplification provenant de la loi de bilan détaillé. Ainsi le résultat ci-dessus en est totalement indépendant.