

# Enseignement et mathématiques modernes

Autor(en): **Delessert, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Études pédagogiques : annuaire de l'instruction publique en Suisse**

Band (Jahr): **53/1962 (1962)**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-114995>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# PREMIÈRE PARTIE

## Enseignement et mathématiques modernes

Depuis une vingtaine d'années, l'analphabétisme en matière de mathématiques semble passer de mode. Naguère encore, un bel esprit se devait de ne pas distinguer clairement une bissectrice d'un dénominateur commun, et tous les titres de gloire pâlissaient devant celui d'ancien cancre en géométrie. Aujourd'hui l'enseignement mathématique profite en partie de l'engouement universel pour les disciplines scientifiques. Pourtant il rencontre de sérieuses difficultés. Les unes viennent de l'extérieur. Sous prétexte que la mathématique est la prétendue servante des sciences, on n'hésite pas à en faire la domestique de l'industrie et du commerce et la soubrette des jeux de hasard. Elle se trouve ainsi soumise à une foule d'exigences incohérentes, souvent contraires à sa nature propre. Outre cela, l'enseignement mathématique doit résoudre de graves problèmes d'ordre interne. Divers mouvements de réforme tendent à faire pénétrer certaines idées modernes au niveau élémentaire. Les maîtres de mathématiques doivent consacrer une part importante de leur temps et de leurs efforts à compléter leur information, à prendre connaissance des nombreuses conceptions nouvelles et à en dégager les éléments d'une doctrine cohérente. Les profanes ne sont évidemment pas en mesure de se livrer aux mêmes recherches. Ils en sont réduits à adopter une attitude réservée, sinon sceptique à l'égard des solutions modernes apportées aux problèmes de l'enseignement mathématique.

L'aspect technique de ces problèmes est passablement rébarbatif pour les non-initiés. Il ne saurait être abordé ici, d'autant moins qu'il ne convient de le faire que lorsque certains points essentiels touchant le rôle et la nature de l'enseignement actuel des mathématiques sont élucidés. Et cela conduit à formuler une observation qui va jouer par la suite un rôle central.

Comparées aux autres branches figurant au programme secondaire, les mathématiques constituent, par essence, une discipline d'enseignement. L'existence de la langue anglaise n'implique pas nécessairement celle des cours d'anglais. En revanche, tout texte mathématique, qu'il s'agisse d'un manuel scolaire ou d'un article original, se présente sous une forme didactique, variable d'ailleurs suivant le public auquel il est destiné. La presque totalité des mathématiciens s'adonne à l'enseignement. Pascal et Fermat, bien que n'étant pas titulaires d'une chaire de mathématiques, importunèrent néanmoins leurs contemporains par des problèmes insidieux, ce qui est bien le paroxysme de l'état magistral. Sans doute aperçoit-on d'emblée plusieurs branches scolaires qui, sur le plan considéré, sont proches des mathématiques. Il suffit simplement d'observer qu'en opposant celles-ci aux langues vivantes, on fait apparaître en quelque sorte les éléments extrêmes de l'éventail scolaire. La démarche mathématique étant essentiellement didactique, une meilleure connaissance de sa nature profonde peut aider à résoudre les problèmes fondamentaux de l'enseignement. Réciproquement, plusieurs caractères des mathématiques apparaissent nettement à la lumière de certaines remarques touchant l'art d'enseigner.

\* \* \*

Enseigner, c'est faire apprendre. Pour ce qui concerne le domaine scolaire et à condition de passer sur certaines nuances, on peut considérer que l'étude peut se développer à trois niveaux. Au premier, elle consiste à acquérir des mécanismes mentaux, des automatismes que l'on peut comparer à des réflexes conditionnés. C'est ainsi que chacun apprend à parler sa langue maternelle, à lire, à écrire, à compter. Toute connaissance nouvelle s'inscrit alors dans le mécanisme mental sous forme d'un schéma réflexe, de sorte que telle sollicitation précise appelle une réponse bien déterminée. Cette forme d'apprentissage s'adresse aux diverses mémoires, et ce terme évoque bien les consignes permanentes inscrites dans les machines à calculer. Les notions acquises de la sorte ne sont pas liées par des connexions logiques, elles ne sont pas même conscientes en général. Interrogé, l'élève est incapable de justifier ce qu'il avance. Pourquoi quatre est-il compris entre trois et cinq? pourquoi tel verbe se conjugue-t-il de telle manière? Parce que c'est ainsi. On peut alors parler de dressage, de connaissance infraverbale.

A un niveau supérieur, les notions sont acquises par adhérence à un schéma logique. Les objets de la réalité sont mis en correspondance aussi parfaite que possible avec des mots qui les désignent, et les liaisons qu'ils entretiennent effectivement sont symbolisées par des relations logiques et grammaticales. Le langage constitue un système

de référence, un repère auquel sont rapportées les notions apprises. Les informations reçues de la sorte sont donc naturellement liées à un certain état social et culturel. Elles composent le domaine du savoir, de la connaissance verbale.

On parvient enfin au niveau transverbal, celui de la compréhension. Par sa nature même, il est exclu de définir, de caractériser complètement ce type de connaissance. A la rigueur, on peut tenter de l'évoquer à l'aide de métaphores ou d'analogies souvent bien imparfaites. On le décrit généralement comme une identification du sujet et de l'objet, un contact immédiat et fulgurant. On compare volontiers le savoir à la connaissance des phénomènes lumineux que peut avoir un être congénitalement privé de la vue; la compréhension correspondrait alors à une brusque restitution de la vision. Ces explications suffisent amplement à ceux qui ont au moins une fois compris quelque chose. Quant aux autres, ce serait pure fatuité de croire qu'ils changeront leurs habitudes à la seule lecture de ces lignes. Il faut noter cependant que le langage est un répertoire d'informations anciennes et que toute communication verbale est en partie un enregistrement différé, un constat de décès. En revanche, la compréhension est une adaptation continue, immédiate à la réalité. Elle libère de l'ancien; elle est, de nature, perpétuellement jeune et vivante.

La simple mise en évidence de ces trois modes de connaissance est déjà lourde de conséquences pour l'enseignement, mais il faut renoncer à les développer ici. On peut remarquer toutefois que le dressage, le savoir et la compréhension ne sont ni indépendants, ni interchangeables. L'acquisition du langage se fait essentiellement au niveau infraverbal. Quant à la compréhension, elle ne peut généralement naître qu'à partir d'un certain savoir, qu'il s'agit de dépasser et souvent de réduire à un rôle subalterne. D'une façon plus précise encore, les connaissances infraverbale, verbale et transverbale sont les trois composantes d'une même fonction mentale. Le but de toute instruction digne de ce nom est la formation d'une personne équilibrée par le développement et la combinaison harmonieuse de ces trois modes d'appréhension. Il s'en faut de beaucoup que les conditions d'enseignement actuelles favorisent l'accomplissement de cette tâche. La lourdeur de l'appareil scolaire, la part croissante de l'administration dans la besogne de chaque maître conduisent à des solutions statistiques, donc massivement sociales des problèmes de l'instruction. Les plans d'étude, les organisations scolaires visent donc presque uniquement le savoir qui, fondé sur le langage, est naturellement réceptif à toute réglementation de type social. L'attrait de la facilité, le goût de la simplification excessive et l'intellectualisme — ce crime contre l'esprit qui, ramenant tout au plan verbal, nie l'appréhension transverbale et méprise l'apprentissage infraverbal

— accusent encore le phénomène. Le maître qui désire restituer à son enseignement la plénitude de sa vocation première le fait presque en fraude et avec mauvaise conscience.

\* \* \*

Toute tentative de définir les mathématiques doit tenir compte de leur aspect manifestement didactique, et par suite préciser à quel niveau de connaissance elle se situe. Sur le plan infraverbal, les mathématiques sont un recueil de recettes et de procédés considérés comme naturels, évidents, efficaces ou simplement commodes, comportant en particulier l'art de compter, les quatre opérations avec la table de multiplication, la majeure partie de ce que les élèves connaissent sur les fractions ordinaires, le calcul littéral, les équations et le calcul logarithmique. On les acquiert par une longue accoutumance, à la suite d'innombrables répétitions. Elles ne brillent ni par la simplicité, ni par la cohérence; elles se contentent de définitions et de justifications très évasives, lorsqu'elles ne s'en passent pas complètement. Ainsi l'on introduit généralement l'addition comme l'opération permettant de remplacer plusieurs nombres donnés par un nombre contenant à lui seul autant d'unités que les nombres donnés ensemble. Ce qui revient à dire qu'additionner c'est additionner, pour ceux qui savent ce que c'est. Toutefois il serait néfaste de sous-estimer ces mathématiques infraverbales. Elles constituent un fond indispensable pour la suite et une part non négligeable de la science du mathématicien chevronné. On peut affirmer en effet que le progrès personnel en mathématiques consiste en partie à refouler au niveau infraverbal le plus grand nombre de faits utiles mais secondaires.

Passant au deuxième niveau, on peut définir la mathématique comme la science des théories mathématiques. Actuellement, une théorie mathématique est une construction verbale édifiée sur un ensemble de principes compatibles admis à titre d'hypothèses: cette partie du langage à laquelle peut se rallier tout esprit éclairé, les règles de la logique formelle classique, quelques notions fondamentales ou termes mathématiques non définis posés a priori, enfin des axiomes relativement indépendants déterminant l'usage grammatical et logique des notions fondamentales. La théorie proprement dite est l'ensemble des propositions qui résultent de l'usage correct des principes. On peut se représenter une théorie mathématique comme une toile d'araignée se développant autour d'un centre constitué par les principes communs (langage et logique) et les principes mathématiques propres à cette théorie (notions fondamentales et axiomes). Deux théories mathématiques sont dites équivalentes lorsque toute proposition vraie dans l'une est vraie dans l'autre et réciproquement. Elles se distinguent éventuellement en ceci que

certain axiomes de l'une peuvent être des théorèmes dans l'autre, et que certaines notions fondamentales de l'une sont peut-être des termes définis dans l'autre, à charge de revanche bien entendu. L'ensemble de toutes les théories équivalentes à une théorie donnée constitue une branche mathématique. Une théorie  $T'$  est plus générale qu'une théorie  $T$  lorsque toute proposition vraie dans  $T'$  l'est aussi dans  $T$ , mais qu'il existe une proposition vraie dans  $T$  qui ne l'est pas dans  $T'$ . Par exemple, on peut obtenir une théorie  $T'$  plus générale que  $T$  en abandonnant quelques axiomes de  $T$ . Il s'ensuit qu'une même théorie  $T$  est susceptible d'être généralisée dans diverses directions, et qu'une même théorie particulière peut résulter de l'interférence de plusieurs théories très générales.

Sur le plan verbal toujours, étudier les mathématiques c'est d'abord acquérir la notion de théorie mathématique; c'est ensuite mémoriser les développements principaux de quelques théories classiques; c'est enfin se rendre apte à compléter ces développements sur des points secondaires, autrement dit à traiter des problèmes et des exercices d'application. La pratique des mathématiques consiste à apporter une contribution originale à une théorie partiellement connue; ou à poser les fondements d'une théorie nouvelle et à en montrer l'intérêt; ou encore à généraliser un fait mathématique connu en montrant que tel théorème, vrai dans une théorie  $T$ , l'est encore dans une théorie plus générale  $T'$ , ce qui revient à établir que le théorème considéré était démontré jusqu'ici dans des hypothèses abusivement restrictives; enfin la pratique mathématique peut conduire à dégager quelques grandes perspectives, à signaler certaines analogies surprenantes, à aiguiller la recherche en énonçant quelques problèmes importants.

Etant donné la forme hautement intellectualiste de la culture actuelle, on considère souvent aujourd'hui que les mathématiques sont entièrement cernées par la définition précédente. Leur caractère verbal apparaît clairement lorsqu'on souligne la nature hypothétique des fondements de toute théorie mathématique. Le mathématicien s'adresse en ces termes à son interlocuteur: « Si vous admettez avec moi tels et tels faits dont voici la liste, je vous obligerai à vous rallier à telle ou telle proposition. » Les mathématiques deviennent par excellence l'art de convaincre, d'où leur aspect foncièrement didactique. Dans un siècle où tout finit par des leçons, il n'est pas étonnant que les mathématiques exercent une véritable fascination sur toutes les sciences et qu'elles finissent par apparaître comme le terme idéal de toute connaissance humaine. Ceux qu'horripile cette issue apparemment inéluctable s'évadent trop souvent dans les débordements les plus aberrants du dévergondage intellectuel.

Lorsqu'on se réfère à la définition purement verbale des mathématiques, il faut admettre aussi que les applications pratiques ne sont pas du ressort du mathématicien. En bonne doctrine, celui-ci

peut s'en désintéresser complètement. Il sait que la géométrie euclidienne est très utile dans la vie quotidienne. Il est ému en apprenant que certaine géométrie non-euclidienne permet de simplifier considérablement l'édification d'une théorie physique. Il n'en continue pas moins à chérir telle géométrie étrange que personne ne songe à utiliser pour l'instant. Il ne s'en inquiète pas. L'histoire des mathématiques lui enseigne que des théories ont attendu plusieurs siècles avant de livrer d'importantes applications concrètes. Reposant sur des hypothèses, libres de toute préoccupation utilitaire, les mathématiques constitueraient donc un édifice autonome. Il serait alors parfaitement justifié de les considérer comme une « science sans objet » assimilable au jeu d'échecs, dont elle ne se distinguerait que par une plus grande variété de combinaisons. Voilà pourtant à quoi il faut se résoudre lorsqu'on n'envisage les mathématiques qu'au seul niveau du savoir.

\* \* \*

Il n'est pas nécessaire de pratiquer couramment les mathématiques pour sentir qu'une telle description ne rend pas compte de la réalité. Sans s'attarder sur les difficultés de tous ordres — logique, en particulier — qui naissent quand on considère les mathématiques comme un système fermé sur lui-même, on peut observer que leur édifice ne s'élabore pas d'une manière anarchique. En comparant une théorie à une toile d'araignée, on risque de suggérer qu'elle se développe indifféremment dans toutes les directions. Or il n'en est rien. Certains secteurs de la géométrie euclidienne sont considérés comme de décevantes curiosités. Certaines théories sont sciemment négligées et abandonnées aux mathématiciens du dimanche. Ce qui est vrai de l'état des mathématiques à une époque donnée l'est aussi de leur développement historique. A plusieurs reprises, de riches domaines qui se sont révélés ultérieurement d'un abord commode ont été laissés en friche, au profit de problèmes plus ingrats. Le peu d'empressement des Grecs à rechercher de bonnes notations numériques en est un exemple frappant. Il n'est pas rare que plusieurs chercheurs parviennent en même temps et indépendamment à la solution d'un même problème, et cela par des voies très différentes peut-être. Certaines notions algébriques sont nées juste à point pour dégager la géométrie d'une impasse. On songe malgré soi à un vaste roman dont le cheminement sinueux et imperturbable échappe en partie à ses innombrables auteurs. Alors que quelques personnages encombrants se pavanent sur la place, des comparses d'apparence anodine trament dans l'ombre des machinations qui vont bouleverser l'intrigue. Certaines contributions mathématiques apparaissent comme des diversions plus ou moins fâcheuses, d'autres au contraire font rebondir l'action.

Les mathématiciens sont extrêmement sensibles au degré d'intégration de chaque épisode dans ce qu'ils aperçoivent du grand

courant mathématique. Cependant leur opinion ne peut pas se fonder exclusivement sur des critères mathématiques, et pour la traduire, ils ont recours au vocabulaire de l'esthétique, de la morale, pire encore, de la religion. Ils citent le « très beau théorème de M. X... » qui, nécessairement plus modeste, l'a publié dans une note intitulée: « Sur une propriété remarquable d'une famille de... ». D'après Weierstrass, l'algébriste Kronecker « usait de toute son autorité pour déclarer que tous ceux qui jusqu'à présent se sont occupés d'établir la théorie des fonctions sont des pécheurs devant l'Eternel ». Pour Leibniz, « l'esprit divin a trouvé une issue magnifique dans cette merveille de l'analyse, dans ce portant du monde idéal, dans cette sorte d'amphibie, qui n'est ni l'être, ni le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative. » Lorsque Platon invite ses disciples à commencer par l'étude de la géométrie, il est clair qu'il leur propose mieux qu'une aimable partie d'échecs. Si l'on affirme avec Jacobi que: « Dieu fait toujours de l'arithmétique », quelle que soit l'idée que l'on puisse par ailleurs se faire de Dieu, on peut craindre que les joies de la découverte lui soient refusées, à moins de charger les mathématiques d'une signification plus profonde que celle qu'implique la seule définition verbale.

Tout ce qui précède montre clairement qu'il est nécessaire de dépasser le niveau du savoir et de se hisser jusqu'à celui de la compréhension si l'on désire rendre compte du fait mathématique dans sa totalité. Toutefois il faut évidemment renoncer à donner une définition transverbale des mathématiques, mais on peut risquer une comparaison un peu paradoxale avec la mythologie.

\* \* \*

Un mythe est un récit destiné à faire saisir certaines réalités philosophiques ou religieuses qui échappent au langage. Plus précisément, pour faire apparaître certaines relations entre plusieurs notions, ou entre les différentes faces d'une même notion, on imagine un conte dans lequel apparaissent des personnages; les relations à exprimer sont symbolisées par des apparentements, des métamorphoses, et diverses péripéties. Par exemple, pour montrer que la notion B est subordonnée en un certain sens à la notion A, on fera de B la fille de A. Le temps apparaît donc comme une dimension auxiliaire permettant d'illustrer par des relations de cause à effet des liaisons essentiellement plus difficiles à décrire. Le contenu profond du mythe ne saurait apparaître qu'après soustraction de la dimension temporelle accessoire. Il convient de noter en passant le faible que les mathématiciens avouent pour le procédé qui consiste à plonger provisoirement un être géométrique dans un espace ayant une dimension supplémentaire; c'est le ressort principal de l'homotopie et de la théorie des enveloppes, par exemple.



Mais il importe d'insister sur un deuxième caractère du mythe: c'est sa grande disponibilité. Le même mythe peut intervenir dans plusieurs religions, toujours chargé d'un contenu nouveau. Sa valeur profonde ne réside qu'en faible partie dans les personnages ou les objets qui y apparaissent; on la trouve d'abord dans les relations qu'ils y entretiennent. Lorsqu'on enseigne que la déesse A a enfanté le démon B, on n'impose aucune signification exclusive à A et B. Quelle qu'elle puisse être, on exige seulement que B soit subordonné à A d'une certaine manière. Bien entendu, il existe d'un même mythe des interprétations plus intelligentes que d'autres, plus belles, plus utiles ou plus profondes. Cette possibilité d'accès à des niveaux de pensée variés et à diverses formes d'esprit est même l'une de ses vertus essentielles. L'attachement exclusif à une seule interprétation, si bonne soit-elle d'ailleurs, entraîne la chute sur le plan verbal. C'est le péché d'intellectualisme, on l'a vu, origine de toutes les intolérances et de tous les sectarismes, qu'il s'agisse des domaines politique, religieux ou scolaire.

Retenant donc du mythe ces deux caractères essentiels: possibilité de figurer des liaisons latentes par des relations de causalité et polyvalence à l'égard des interprétations, on voit apparaître une analogie frappante avec la notion de théorie mathématique. Il suffit de substituer à la relation de cause à effet celle de condition à conséquence. (Il est remarquable que la première difficulté sérieuse que l'on rencontre dans l'enseignement mathématique réside précisément dans une confusion entre causalité et implication logique.) Dans ses raisonnements, le mathématicien fait intervenir des lettres ou d'autres caractères auxquels il s'interdit d'attribuer une signification plus restreinte qu'il n'est nécessaire. Ce n'est sans doute pas une simple coïncidence s'il désigne ces signes du nom de « symboles », même si ce terme prend ici une acception un peu particulière.

L'analogie entre mythe et théorie mathématique permet de justifier les déclarations et les attitudes des plus grands parmi les philosophes et les mathématiciens qui ne paraissent aberrantes que lorsque l'on tente de circonscrire les mathématiques par une définition purement verbale. Elle est en mesure d'illustrer d'autres phénomènes encore, comme la tendance à l'ésotérisme de certaines écoles mathématiques. D'autres exemples apparaîtront par la suite, mais il convient de rester prudent et de ne pas chercher à tirer d'une analogie plus qu'elle ne peut raisonnablement livrer.

\* \* \*

Il est maintenant possible d'aborder une question qui, semble-t-il, vient souvent à l'esprit des profanes: en quoi les mathématiques peuvent-elles être qualifiées de modernes? Rien n'est plus facile que d'attacher une telle étiquette à un mouvement ou une école. Mais

cela se conçoit moins bien d'une science qui, par nature, paraît se placer hors du courant historique. Le théorème de Pythagore n'a pas d'âge, et l'on voit mal comment moderniser une théorie mathématique. L'analogie avec le mythe permet d'apporter les éléments de la réponse. Le message du mythe, quel qu'il puisse être, échappe au temps. Et cependant on peut parler de mythe moderne. Il s'agit souvent d'un mythe d'origine ancienne, traduit en langage d'aujourd'hui, à l'aide des schémas mentaux actuels; il peut aussi se trouver qu'il soit de création véritablement récente. Il en est de même en mathématiques. On peut tenter de le montrer sur une branche relativement accessible comme la géométrie euclidienne, moyennant quelques simplifications inévitables.

Il est permis de penser qu'à l'époque à laquelle Euclide rédigeait ses *Eléments*, l'univers physique était généralement considéré comme un donné constant offert en spectacle au géomètre. Certaines notions: point, droite, plan, d'autres encore, se révélaient adéquates à la description des propriétés spatiales de cet univers. Celui-ci constituait un tout bien organisé dont la structure était en grande partie accessible à l'entendement humain. Par suite, les propriétés de l'espace pouvaient être logiquement déduites d'un petit nombre d'entre elles, particulièrement simples et évidentes, dont la réalité était confirmée par l'expérience et la spéculation. La tâche du géomètre consistait à dégager les principes de l'édifice géométrique, qu'il construisait ensuite, en découvrant des propriétés de plus en plus fines de l'espace à l'aide de notions de plus en plus complexes. Sa recherche ne dérangeait en rien l'harmonie universelle. Sa démarche était contemplative, analytique, cumulative et complicative.

Le géomètre actuel place au centre de son étude un ensemble  $G$  d'opérations idéales constituant un tout fermé sur lui-même; ce qui revient essentiellement à admettre que l'opération obtenue en composant les effets successifs de deux opérations de  $G$  est encore une opération de  $G$ , et que l'effet de toute opération de  $G$  peut être détruit par celui d'une opération convenablement choisie dans  $G$ . On exprime cela en disant que  $G$  constitue un « groupe ». Pour être précis, un ensemble  $G$  est un groupe lorsqu'il satisfait les conditions suivantes, appelées « axiomes du groupe »:

1. Il existe dans  $G$  une loi de composition qui, à toute paire ordonnée d'éléments  $a$  et  $b$  de  $G$ , fait correspondre un élément bien déterminé de  $G$ , noté  $a.b$ .
2. Cette loi est associative, autrement dit, quels que soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans  $G$ ,  $(a.b).c = a.(b.c)$ .
3.  $G$  contient un élément neutre  $e$  tel que, pour tout élément  $a$  de  $G$ ,  $a.e = e.a = a$ .
4. Quel que soit l'élément  $a$  de  $G$ , il existe un élément convenable  $a'$  dans  $G$  tel que  $a.a' = a'.a = e$ .

Le géomètre soumet encore  $G$  à quelques hypothèses complémentaires (H) choisies librement, pour autant qu'elles soient compatibles avec la nature de groupe de  $G$ . L'étude de  $G$  se fait d'une manière indirecte. Le géomètre va introduire, par des procédés codifiés, un domaine  $E$  appelé « espace », et construit de telle manière que  $G$  puisse être regardé comme un ensemble d'opérations transformant  $E$  en lui-même. La connaissance de  $G$  s'obtient en dégagant les propriétés de l'espace  $E$  qui restent invariables à l'égard des transformations induites par les éléments de  $G$ . Mieux, le géomètre va s'attacher à prouver que les invariants de l'espace  $E$  relativement à  $G$  peuvent tous être construits d'une façon simple à partir d'une famille réduite — généralement finie — d'entre eux. La liste de ces invariants principaux permet de décrire le groupe  $G$ .

Lorsque les hypothèses complémentaires (H) faites sur  $G$  sont convenablement choisies,  $G$  est formellement identique au groupe des déplacements de l'espace euclidien. L'ensemble  $E$  peut être assimilé de son côté à l'espace euclidien lui-même, qui apparaît ainsi comme un sous-produit de l'étude de  $G$ . Sur le point précis de la géométrie euclidienne et par comparaison avec la démarche du géomètre grec, celle du géomètre actuel est dynamique, synthétique, sélective et simplificatrice. On voit quels aspects différents deux théories mathématiques équivalentes peuvent revêtir à deux millénaires d'intervalle, reflétant des mentalités, des éthiques intellectuelles presque opposées. Il convient de noter en passant que la définition « verbale » que l'on a vue plus haut se réfère à l'aspect actuel des mathématiques, comme il ressort de l'exemple précédent.

Les hypothèses complémentaires (H) faites sur le groupe  $G$  peuvent être choisies très librement de sorte que l'on peut fort bien construire des « géométries » très différentes de celle d'Euclide. Il serait absurde de les considérer comme des monstres scandaleux. Au contraire, de nombreuses géométries de cette espèce se révèlent d'une grande beauté et permettent de simplifier d'importants problèmes mathématiques ou techniques. On voit même parfois réapparaître sous cette nouvelle forme d'anciennes théories fort vénérables. Ainsi, de nombreuses théories disparates peuvent se développer sur un même schéma géométrique. La possibilité d'unifier autour d'un même thème de vastes départements mathématiques est considérée comme très favorable. Elle se présente chaque fois que l'on parvient à dégager une « structure » analytique essentielle, comme celle de groupe dans l'exemple traité.

Il n'est guère possible de tirer du seul examen de la géométrie euclidienne tous les caractères distinctifs des mathématiques actuelles. On peut cependant en apercevoir au moins deux. Le premier apparaît dans la grande liberté du mathématicien quant au choix des axiomes, soit en général, soit au sein d'une branche particulière. Un axiome n'est plus, comme chez les Grecs, une vérité absolue,

parfois évidente au point d'être efficace même lorsqu'on s'abstient de l'énoncer. C'est une hypothèse relativement arbitraire qui intervient explicitement dans l'élaboration de la théorie, et qui rend d'autant plus impérative l'obligation d'un cheminement logique. Le deuxième trait qu'il convient de noter est l'importance des structures fondamentales, autrement dit de certains objets mathématiques caractérisés par un petit nombre d'axiomes figurant ensemble à la base d'un grand nombre de théories distinctes. Chaque structure fondamentale détermine une théorie très générale, comme la théorie des groupes, par exemple.

Les deux caractères que l'on vient de souligner sont l'expression d'une tendance marquée des mathématiciens actuels à ne pas lier l'élaboration d'une théorie à un emploi particulier, mais au contraire à conserver à chaque théorie toute la variété des interprétations dont elle est capable. Ainsi, non seulement les mathématiques modernes sont les mieux adaptées aux mœurs intellectuelles d'aujourd'hui, mais encore elles témoignent d'un effort considérable pour se conformer à leur nature profonde.

\* \* \*

Les mathématiques modernes doivent-elles prendre place dans l'enseignement actuel? Les remarques faites précédemment fournissent une réponse immédiate: il est dans la nature des mathématiques d'apparaître dans les écoles d'aujourd'hui avec leur visage d'aujourd'hui. Mais à peine a-t-on énoncé une proposition si nette qu'on se repent déjà de son caractère abusivement général. Avant qu'elle ne parvienne à influencer la merveilleuse alchimie qui se pratique en classe de mathématiques, mille influences néfastes peuvent encore s'exercer. Car, pour certains, le conseil d'enseigner des mathématiques modernes n'est rien de moins qu'une invitation à monter dans le dernier bateau. Cette réaction primaire conduit à l'élaboration de cours mathématiques plus monstrueusement scolaires et dogmatiques que jamais. L'idée de fonder un enseignement sur le principe de l'« unité des mathématiques », par exemple, n'a pu germer que dans l'âme d'un pédagogue. Les grands mathématiciens eux-mêmes n'ont pas honte de faire apparaître dans leurs travaux des cloisons — translucides, certes — entre les méthodes de l'algèbre et de la topologie. On ne saurait espérer que les jeunes élèves parviennent à s'orienter dans un domaine complexe où ces repères mêmes ont disparu. Il est bien préférable de conserver quelques grandes divisions classiques — algèbre, géométrie, analyse, par exemple — que l'on peut parfaitement justifier par des considérations de mathématiques modernes. De même, ce n'est pas en enseignant d'emblée les théories les plus violemment simplificatrices que l'on fera naître chez les élèves le goût de la simplicité, bien au contraire. La nécessité des structures fondamentales a été ressentie par de grands mathématiciens choqués par l'aspect chaotique que présentait leur discipline à une

certaine époque. Si le jeune élève aborde les mathématiques par le canal de ces structures très générales, il sera inmanquablement séduit plus tard par les problèmes présentant un caractère accidentel ou saugrenu. Certains prétendent apercevoir déjà les signes avant-coureurs d'une telle réaction. Il est souhaitable que l'évolution mathématique de chaque élève soit approximativement calquée sur celle de l'humanité. C'est conforme à la nature des choses et cela permet d'utiliser pleinement les merveilleuses aptitudes des élèves d'aujourd'hui à saisir l'esprit des mathématiques actuelles.

Mais c'est encore de l'extérieur que, sous le couvert d'une modernisation de l'enseignement mathématique, se manifestent les influences les plus pernicieuses. Depuis longtemps la plupart des utilisateurs du calcul, techniciens de l'industrie, du commerce, de la finance, des diverses sciences appliquées, considèrent les mathématiques comme un magasin d'accessoires, commode et encombrant à la fois. Leur opinion n'est pas compliquée. Selon eux, les mathématiques ont pour seule tâche de fabriquer des procédés permettant de calculer des choses utiles. Une théorie est bonne quand elle fournit beaucoup de résultats pratiques. Il est tout-à-fait normal que, vivant tous les jours dans ses formules et ses notions abstraites, le mathématicien finisse par se prendre au sérieux et par voir dans ses théories on ne sait trop quelles philosophies; c'est même excellent pour lui si ça l'aide à supporter sa triste condition. Mais il serait bien inspiré de garder pour sa consommation personnelle des élucubrations mystiques qui n'ont jamais fait tenir un pont, ni tourner un alternateur. De telles déclarations, si elles ne contribuent pas essentiellement à l'avancement de la culture, ne constituent toutefois pas un réel danger, à moins qu'elles ne s'érigent en doctrine. Or c'est aujourd'hui chose faite. De larges milieux économiques et politiques ont découvert que la civilisation occidentale ne se survivrait qu'à condition de produire des hordes de techniciens. Il revient à l'école de fabriquer en série, et vite, ce barbare suractivé, ce composé stable d'érudition bornée et de réflexe conditionné qu'on appelle le spécialiste scientifique. Et l'on a cru voir qu'il était possible d'y parvenir en introduisant à l'école une version convenablement rétrécie des mathématiques modernes: leur tendance à la simplification, à l'économie ensorcelle littéralement tous ceux qui envisagent l'univers entier sous l'angle de la productivité. Des fonds considérables sont consacrés à l'élaboration de programmes mathématiques continentaux, monolithiques, détaillés à l'extrême, qui constituent le plus sûr moyen d'hypertrophier l'aspect verbal des mathématiques, mais en revanche de faire graduellement disparaître leur valeur transverbale. C'est à quoi l'on parvient lorsqu'on ne vise que l'efficacité immédiate.

Or il faut le dire: l'utilitarisme est une mystique comme une autre; un peu plus navrante qu'une autre peut-être, parce qu'elle ignore

qu'elle en est une et parce qu'elle est intolérante. Il est intimement solidaire de l'attachement exclusif à l'aspect verbal des choses, c'est-à-dire à un univers mort, depuis peu il est vrai, mais mort quand même. Cela révolte tellement la conscience profonde de chaque individu qu'il devient obligatoire de lui fournir chaque jour un cadavre frais d'univers. C'est le principe de la mode, source du modernisme, du mot et de la chose. Pour entretenir le phénomène, il faut créer d'énormes masses de manœuvres, dont la conscience collective fasse taire les scrupules individuels. C'est à quoi tendent certaines réformes de l'enseignement mathématique, venues de l'extérieur, il convient de le répéter, mais auxquelles se sont associés de trop nombreux professeurs. Nul maître digne de ce nom ne saurait contribuer à l'avènement d'une population de monstres supérieurement dressés, savants mais fermés à toute compréhension. Il est certain que le monde a besoin d'un grand nombre de techniciens, car les circonstances où il est essentiel de posséder de bons réflexes conditionnés et de bonnes connaissances verbales se font journallement plus fréquentes. Mais il est non moins assuré que la civilisation périra lorsque la proportion des individus susceptibles de se connaître eux-mêmes aura suffisamment baissé.

Il importe donc de préciser que, non seulement l'enseignement mathématique doit être moderne, mais encore il doit se savoir moderne. Cela signifie qu'il lui faut d'une part se rappeler l'existence des centaines de générations mathématiques précédentes qui toutes ont été modernes à leur tour, et songer d'autre part que les mérites de l'époque présente disparaîtront partiellement aux yeux des générations à venir, car ils sont déjà nés ceux qui traiteront de vieilles lunes les mathématiciens d'aujourd'hui. Cette étiquette de modernisme comporte donc une invitation à la modestie, mais elle incite aussi à rechercher plus profondément le trésor que constitue une bonne éducation mathématique. Tout en développant au mieux les aptitudes au dressage et au savoir mathématiques de ses élèves, le maître doit leur faire sentir que l'essentiel est au-delà. En leur enseignant diverses interprétations d'une même théorie, qu'elles soient esthétiques, morales, philosophiques ou utilitaires, sans jamais se lier définitivement à aucune d'elles, il les prépare à accéder au plan de la compréhension. En réconciliant en lui-même les trois composantes de la connaissance, il conduit à dépouiller le vieil homme qui sommeille au fond de chaque jeune homme et à revêtir l'homme nouveau, éternellement jeune et vivant. C'est là qu'est la vraie aventure intellectuelle, la merveilleuse réalité, la raison d'être de tout enseignement.

ANDRÉ DELESSERT

*Professeur aux Gymnases cantonaux  
Lausanne.*