

Zeitschrift: Études pédagogiques : annuaire de l'instruction publique en Suisse
Band: 64/1973 (1973)

Artikel: Les problèmes de mathématique dans le nouvel enseignement
Autor: Traversi, Renato
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-116194>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 11.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les problèmes de mathématique dans le nouvel enseignement

La nouvelle fonction des problèmes

Dans l'enseignement traditionnel, la fonction principale des problèmes consiste à vérifier, à consolider et à appliquer les concepts appris. C'est pour cette raison que nous les trouvons nombreux dans les séries d'exercices qui suivent les leçons et dans les épreuves à effectuer individuellement. Avec le nouvel enseignement, une autre fonction vient s'ajouter à celle-ci (ou, du moins, acquiert-elle plus d'importance) : une fonction d'une ouverture plus grande, qui recouvre tout le processus d'apprentissage. Les problèmes ne servent plus seulement à savoir si les élèves ont assimilé les concepts appris et s'ils sont à même de les appliquer correctement dans diverses situations ; mais à travers la réflexion qu'ils suscitent, ils permettent aux élèves de découvrir des relations, structures et concepts nouveaux, et d'apprendre ainsi la mathématique. Ceci est lié au fait que se trouvent proposés des problèmes qui offrent une ouverture plus grande à la réflexion, au dialogue et qui n'épuisent pas immédiatement leur valeur instructive, comme il arrive souvent dans les problèmes traditionnels. L'intérêt est centré sur les méthodes de résolution des problèmes plus que sur le résultat ; la solution exacte passe au second plan. L'enseignant accorde une attention particulière aux tentatives infructueuses, car il peut en jaillir des éléments intéressants pour la formation de la conscience mathématique. Comprendre les insuffisances de certains procédés aide à consolider des concepts qui ne sont pas entièrement dominés. De plus, cet enseignement cherche à modifier l'attitude des élèves face au problème, qui ne devrait pas susciter d'affolement, mais se présenter comme quelque chose de passionnant. Les élèves sont aussi amenés à inventer des problèmes nouveaux, interrogeant la réalité qui les entoure du point de vue des rapports mathématiques ou partant de schémas repris des résolutions des problèmes précédents. Ils doivent acquérir un comportement plus confiant en face de problèmes.

Le processus d'analyse et de résolution des problèmes est facilité chez les élèves des classes expérimentales par de nouvelles connaissances instrumentales qui leur permettent de traduire de manière plus économique et plus claire les termes du problème, et de mieux comprendre les relations existant entre les données (nous nous référons aux divers types de diagrammes : Venn, Carroll, etc.).

Des problèmes arithmétiques aux problèmes logico-mathématiques

Avec la nouvelle orientation, le problème de mathématique est considéré dans une acception plus vaste. Le problème est constitué par les données, les conditions (parfois implicites dans les données) et par une ou plusieurs inconnues.

Dans les problèmes traditionnels, les données correspondent aux nombres ou à leur application à des grandeurs, et les opérations qui interviennent sont d'ordre arithmétique. Dans le nouvel enseignement, les données du problème peuvent être des objets concrets, des représentations graphiques, des symboles numériques; sa résolution peut conduire à des constructions réelles, à des dessins, à des énoncés ou à d'autres activités, et les opérations à effectuer ne sont pas uniquement de type arithmétique. De nombreux problèmes permettent, par exemple, d'interpréter ou de compléter un diagramme.

Ainsi le champ d'application des problèmes devient beaucoup plus vaste, dès la première année d'école, si l'on entend par problème n'importe quelle situation spontanée ou structurée, où, à partir d'un certain nombre d'informations, l'on recourt aux formes de la pensée logico-mathématique (que l'on n'obtient pas immédiatement avec les schémas de l'habitude). Piaget a mis en évidence que plusieurs cas d'échec scolaire dans les matières scientifiques sont en relation avec un passage trop rapide des structures qualitatives des problèmes (raisonnement logique sans introduction de nombres et de lois métriques) aux formes quantitatives. Maintenant, les nombreux problèmes sous forme de jeu et basés sur la logique ont justement pour but de préparer à une compréhension des abstractions mathématiques à proprement parler.

Les situations sont généralement conçues à partir d'un matériel structuré (les blocs logiques de Dienes, par exemple) ou d'autres dispositifs concrets ou figuratifs préparés par l'enseignant avec ses élèves. Parfois, ce matériel peut donner l'impression de n'avoir pas grand-chose de commun avec la mathématique, alors qu'en réalité il propose des situations qui permettent d'exercer en profondeur les structures logico-mathématiques de la pensée. En effet, en modifiant et en combinant les règles des jeux de diverses manières, les élèves parviennent à découvrir les facteurs invariants et variants, les rapports d'analogie, de différence, de complémentarité avec les autres jeux, et à comprendre ainsi la dynamique des constructions mathématiques.

Aux enseignants engagés dans l'expérience de la « mathématique moderne », les parents demandent souvent si les élèves résolvent encore les problèmes de la vie pratique (en rapport avec les activités habituelles, sociales, commerciales, les transports, les communications, etc.). A notre avis, ces problèmes doivent rester des objets

d'attention dans l'enseignement. A condition cependant qu'ils correspondent effectivement à des situations réelles. Malheureusement, il faut dire que de nombreux problèmes ont été introduits dans les écoles sous l'étiquette « vie pratique », alors qu'ils n'ont aucun lien avec celle-ci. En effet, il ne suffit pas qu'un problème parle de hl de vin ou de m d'étoffe pour qu'il corresponde à une situation réelle dans laquelle l'élève, ou la personne à laquelle il s'identifie, puisse se trouver un jour ou l'autre.

Une ouverture plus grande des problèmes

Presque systématiquement, les problèmes proposés dans les classes traditionnelles n'admettent qu'une solution, et souvent, pour les résoudre, l'élève est enclin à utiliser le conditionnement plus que la réflexion.

Aujourd'hui, dans la vie de tous les jours, nous sommes souvent confrontés à des problèmes qui ont plusieurs solutions possibles, ou qui n'en ont aucune, soit que les données dont nous disposons soient insuffisantes, soit qu'il s'agisse d'un problème insoluble. Quand il y a plusieurs solutions, il en existe généralement une qui peut être considérée comme meilleure, parce qu'elle offre des avantages par rapport aux autres, qu'elle correspond mieux au tempérament ou à la situation présente d'une personne donnée. La solution la meilleure n'est pas toujours la plus rationnelle. Par conséquent, il faut habituer les élèves à considérer les problèmes sous les rapports suivants : Combien de solutions peut-il y avoir ? Y en a-t-il une qui convient mieux à mon cas ? Ils apprendront ainsi à apprécier, dans d'autres situations également, une variété d'éléments et à décider sur la base d'une analyse particularisée.

De plus, dans certains problèmes traditionnels, l'élève pouvait très bien arriver à la solution exacte même sans avoir compris parfaitement la structure du problème, c'est-à-dire en agissant par automatisme. Ici, cette possibilité n'existe pas, puisqu'il est nécessaire d'avoir compris la structure du problème dans sa totalité pour en découvrir toutes les solutions possibles.

Quant aux problèmes qui n'admettent pas de solution, il nous semble valable, sur le plan pédagogique, de proposer, de temps à autre, des problèmes de ce genre, étant donné qu'ils nous permettent de vraiment comprendre quelles sont les données et les conditions nécessaires pour obtenir une construction, pour déterminer une inconnue en particulier ; ils permettent ainsi d'habituer l'enfant à considérer le résultat comme un élément solidaire d'un certain nombre de données et de conditions. La discussion des causes qui nous empêchent d'obtenir le résultat, ou qui déterminent certaines incongruités, est une très bonne formation pour une compréhension mathé-

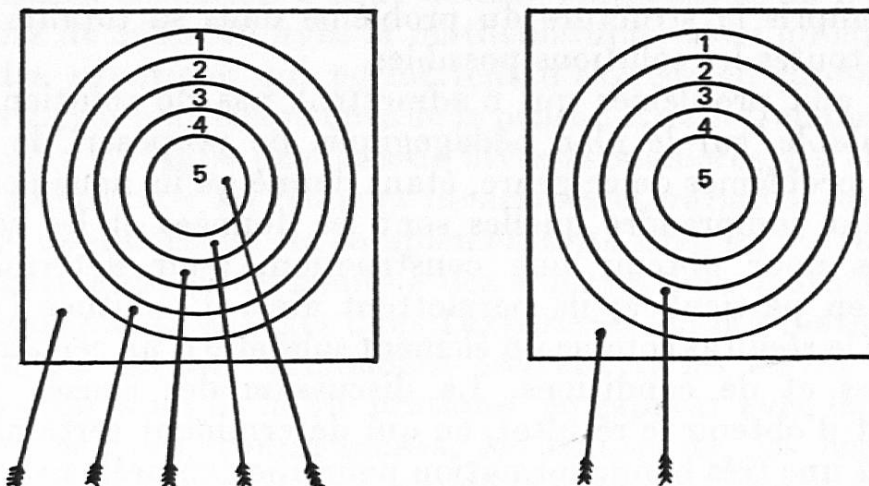
matique. Afin qu'une acquisition devienne véritablement telle, en mathématique comme dans les autres domaines de la connaissance, il faut qu'elle parvienne à s'insérer dans un processus organique, c'est-à-dire qu'elle soit reliée à d'autres connaissances.

Il faut donc faire en sorte que l'élève établisse des ponts entre les différents îlots de la connaissance. Il ne suffit pas simplement de mettre les nouvelles connaissances à côté des anciennes pour en obtenir la fusion; celle-ci implique quelque chose de plus qu'une simple juxtaposition d'acquisitions: il y a une différence entre un tas de pierres et un mur.

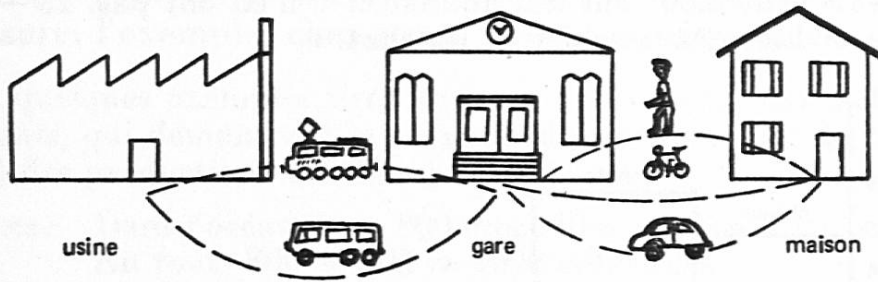
Nous pouvons développer une attitude dynamique de mise en relation des diverses connaissances au moyen de problèmes en chaîne. Nous pensons là aux activités qui découlent de la solution d'un problème, solution qui sera considérée comme point de départ d'un autre problème, et ainsi de suite. Souvent, des situations de ce type sont la suite de certaines découvertes relatives à des cas particuliers. A partir de celles-ci, chacun se demande assez spontanément si des relations déterminées se vérifient aussi dans des situations plus générales ou d'un autre genre. Ou encore nous pouvons l'obtenir par des transformations du problème (en faisant varier les données, les conditions, etc.). C'est avec un enthousiasme particulier que les élèves examinent ces « problèmes-enquêtes », recherches effectuées par la classe ou un groupe d'élèves à propos de leurs jeux, de leur vie scolaire, de leur milieu ou simplement à partir de leur curiosité pour des sujets déterminés. Il s'agit d'activités qui enseignent à l'élève à quel point la mathématique est un instrument utile pour découvrir et interpréter plusieurs phénomènes de la réalité et comment elle s'applique aussi à des secteurs qui ne présentent, en apparence, que peu d'affinité avec elle.

1. Exemples de problèmes qui admettent plusieurs solutions (Classe II)

Fabien a lancé ses flèches. Gino doit encore tirer 3 fois. Dessine où il doit les lancer pour faire le même nombre de points que Fabien.



Le papa de Charles, pour se rendre au travail, peut se servir de divers moyens de transports, comme tu le vois sur le dessin. Indique les diverses possibilités de se rendre à son travail.



2. Exemple de problème sans solution possible (Classe II)

Dans un enclos il y a quelques chevaux en nombre inférieur à 20. Marc dit que s'il les compte de 7 en 7, il en reste 2, s'il les compte de 4 en 4, il en reste 2. Combien de chevaux y a-t-il dans l'enclos?

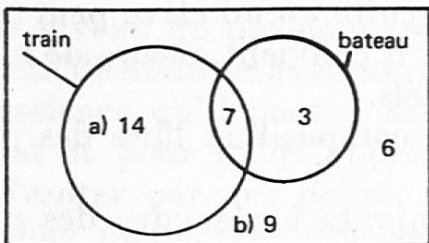
(Comptant de 7 en 7 il pourrait y avoir: 9 ou 16 chevaux. Comptant de 4 en 4, il pourrait y en avoir: 6, 10, 14, 18, 22, 26. Les données sont en contradiction, de ce fait on ne peut savoir le nombre de chevaux.)

3. Exemple de problème soluble de diverses manières (avec l'utilisation du diagramme de Carroll, Venn et l'arbre) (Classe III)

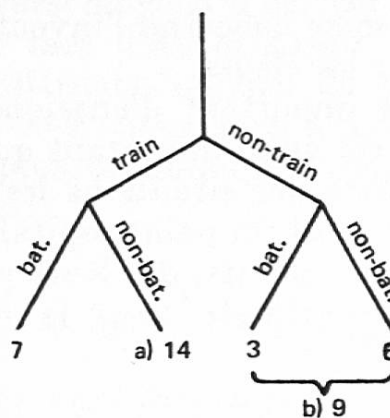
Dans une classe il y a 30 élèves. 21 ont déjà voyagé en train; 7 ont déjà pris le train et le bateau, 6 n'ont jamais voyagé ni en train ni en bateau.

a) Combien d'élèves ont voyagé seulement en train?

b) Combien n'ont jamais voyagé en train?



	train	non-train	
bateau	7	3	10
n-bat.	a) 14	6	20
	21	b) 9	



4. Exemple de problème-enquête

Les animaux préférés (Classe II, 25 élèves)

Commentaire d'un groupe d'élèves.

« Les animaux préférés sont les chats. $6 > 5 > 3 > 1$. Les chats sont deux fois plus nombreux que les oiseaux et que les hamsters.

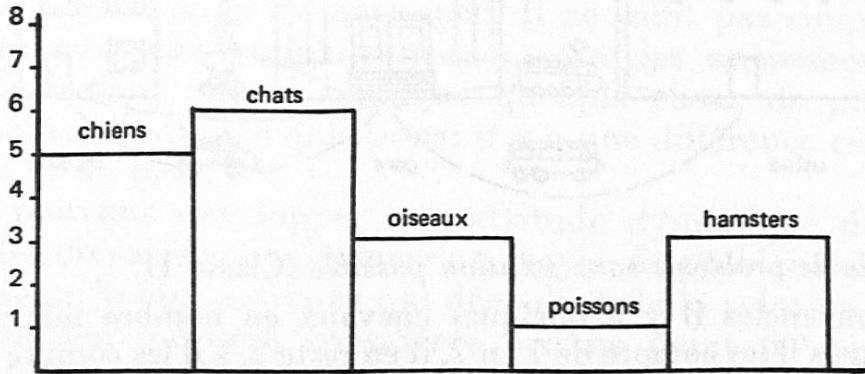
$6 = 3 \times 2$. 3 est la moitié de 6.

Seul Pippo a des poissons.

$5 + 6 + 3 + 1 + 3 = 18$. 18 est deux fois 9. 18 est 3 fois 6.

16 enfants seulement ont des animaux; 9 n'en ont pas. $25 - 16 = 9$.

Georges et Lise ont un chien et un chat. »



Tels sont les problèmes qui aident à établir un lien avec d'autres branches et à faire comprendre l'interdisciplinarité de la connaissance.

Il s'agit, en quelques mots, de situations à partir desquelles l'élève met en relation deux ensembles (mois de l'année/fréquence des anniversaires dans chaque mois, jour de la semaine/conditions atmosphériques, etc.) et qu'il formule en termes mathématiques par l'utilisation de formes graphico-figuratives, mettant ainsi en évidence ces rapports d'un point de vue mathématique (cf. « problème-enquête » ci-dessus, au sujet des animaux préférés de la classe).

Avant d'aborder la question de la difficulté qu'un élève peut rencontrer dans la résolution d'un problème, il convient encore de nous arrêter un instant sur deux points essentiels.

Le premier concerne l'invention et la composition libre des problèmes par les élèves.

S'il est important d'enseigner aux enfants à résoudre des problèmes, il est aussi important qu'ils apprennent à en imaginer en les faisant naître des situations les plus variées. En fait la formulation du problème est un point capital du procédé scientifique et il importe d'amener les enfants, dès leurs premières années d'école, à avoir une attitude scientifique dans la façon de poser et d'organiser leur « pourquoi ».

Il s'agit d'un aspect fondamental de la didactique dans l'enseignement de la mathématique qui mérite d'être développé dans une étude à part. Ici, nous nous limitons à indiquer comment il est possible de développer cet esprit inventif en proposant par exemple aux élèves des situations dans lesquelles, à partir d'un certain nombre d'informations (présentées de manière verbale ou graphique), ils sont invités à chercher de nouvelles informations déductibles des données de départ.

Toujours à propos de l'invention de problèmes, il vaut la peine de signaler les résultats surprenants obtenus par Madeleine Goutard dans certaines écoles primaires canadiennes et par des enseignants qui ont suivi l'exemple, chez nous, de son enseignement.

Voici quelques exemples tirés du livre de Goutard, *Les mathématiques et les enfants*, qui démontrent la richesse (d'imagination et de créativité à, vrai dire) des productions des élèves.

Gens, 6 ans : Dans l'océan il y a 800 crocodiles et dans le lac il y en a 200.
En tout: $800 + 200 = 1000$ crocodiles.

Harold, 7 ans : Un aigle survole une ferme. Il a volé 5 poules, 2 coqs, 50 poussins, 100 œufs, 1 cochon. C'est un voleur. Combien de choses a-t-il volées?
 $100 + 50 + 5 + 2 + 1 = 158$.

Jean-Claude, 6 ans : Grand-père s'est acheté un rasoir et grand-mère l'a grondé 2^2 fois. Grand-père s'est acheté une perruque et grand-mère l'a grondé 2^3 fois. Grand-père lui a acheté une jupe et elle ne l'a pas grondé. Combien de fois grand-mère a-t-elle grondé grand-père?
 $2^2 + 2^3 - 0 = 12$.

L'autre point concerne les divers procédés aboutissant aux mêmes résultats. Plusieurs problèmes peuvent être résolus en suivant des voies différentes.

Même en prenant, au départ, le même cheminement, les élèves le parcourent en général de manière différente, selon leur personnalité, leur niveau de développement, leur expérience, etc. Il est très instructif de discuter avec eux de ces divers procédés pour qu'ils prennent conscience qu'il peut y avoir plusieurs moyens d'arriver au même point et pour qu'ils apprennent, en face d'un problème difficile, à affronter par des points de vue différents, au lieu de s'entêter à vouloir poursuivre une seule voie. Ceci nous sert à nous rendre compte qu'il existe des méthodes plus économiques (dans le sens d'une épargne d'énergie) que d'autres.

Psychopédagogie de l'erreur dans la résolution des problèmes

Sans avoir la prétention de vouloir identifier toutes les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans la résolution d'un problème, nous voulons attirer l'attention sur quelques points critiques apparus au cours d'expériences et de réflexions sur un certain nombre de travaux de psychopédagogie.

Du reste, les spécialistes eux-mêmes sont encore loin d'avoir résolu toutes les questions concernant la manière dont les élèves réagissent en face des problèmes. Leurs réactions sont complexes et

dépendent de nombreux facteurs, souvent en interaction les uns avec les autres, qui se situent dans la relation élève-problème. En outre, il n'y a pas toujours de correspondance entre le simple logique et le simple psychologique: devant deux problèmes que nous autres adultes retenons l'un comme facile et l'autre comme difficile, les élèves pourraient nous réserver des surprises en nous montrant qu'ils savent résoudre le difficile et qu'ils commettent une erreur dans le facile.

Le but que nous visons par les observations qui suivent est de mettre en évidence quelques aspects importants de la psychopédagogie des problèmes et de rappeler aux enseignants certaines difficultés particulières que l'élève peut rencontrer, afin que, une fois l'obstacle bien situé, leur intervention puisse devenir plus efficace.

Les problèmes doivent avoir une signification pour l'élève

Tous les enseignants savent, pour l'avoir étudié et constaté par expérience, que l'élève apprend mieux s'il s'intéresse à l'argument qui constitue l'objet d'apprentissage. La résolution d'un problème est, par excellence, une activité qui réclame une mobilisation de l'intelligence.

Il est bien connu que chaque démarche de l'intelligence est liée à l'affectivité, laquelle constitue justement l'aspect énergétique de l'action. La conséquence sur le plan didactique est évidente: les problèmes à proposer aux élèves doivent les intéresser.

Généralement, un vrai problème mobilise spontanément les énergies, parce qu'il occasionne chez le sujet un état de tension affectif et cognitif qu'il désire éliminer, rétablissant ainsi l'équilibre par la résolution du problème.

Si l'élève « normal » ne réagit pas lorsqu'il est confronté à un problème, c'est que le contexte est tellement éloigné de son propre monde ou de la possibilité de s'y identifier, qu'il ne peut pas l'intéresser. Ainsi, il n'a donc aucun sens pour lui. Il pourrait aussi arriver cependant que le problème soit trop facile (dans ce cas, il ne constitue plus un problème) ou trop difficile. Ici se pose la question du niveau de développement de l'enfant et du degré de difficulté d'un problème, sur laquelle il vaut la peine de s'attarder un instant.

Chacun sait que la capacité d'apprendre et de résoudre certains problèmes est en relation avec le niveau de développement de l'enfant. Ce développement se fait par étapes qui se succèdent dans un ordre précis, et à chaque stade correspond une organisation mentale particulière.

Dans son étude des relations entre le processus de développement et la capacité potentielle d'apprentissage, Vygotskij introduit une distinction, pertinente du point de vue de ses conséquences didac-

tiques, entre *le niveau de développement effectif* et *l'aire de développement potentiel*. Pratiquement il entend souligner ce qui suit. Ce que l'enfant sait faire tout seul, de manière indépendante, est conditionné par le niveau de développement effectif qu'il a atteint. Il est parvenu à un degré de développement tel qu'il peut apprendre et comprendre des choses précises de manière autonome. Il faut cependant reconnaître qu'il pourrait faire beaucoup plus, comprendre des contenus et des structures plus complexes, si les adultes l'aidaient au moyen de questions-guides, d'explications appuyées par des exemples, etc. L'aire de développement potentiel correspond précisément à cette zone comprise entre ce que l'élève réussit à faire seul et ce qu'il peut accomplir avec l'aide des adultes. D'un point de vue didactique, cette distinction est d'une extrême importance. « Ce que l'enfant peut faire aujourd'hui avec l'aide des adultes, il pourra le faire seul demain. L'aire de développement potentiel nous permet de déterminer les progrès futurs de l'enfant, la dynamique de son développement, et de prendre en considération non seulement ce que son développement a déjà produit, mais aussi ce qu'il produira au cours du processus de maturation. » (Vygotskij.)

Quel devra être alors le degré de difficulté des problèmes à proposer aux élèves? A notre avis, il dépend du but que l'on désire atteindre avec ces problèmes.

- a) Si le but est de consolider certains concepts ou de voir dans quelle mesure ils ont été assimilés, alors les difficultés doivent correspondre aux possibilités propres à un niveau déterminé et effectif de développement.
- b) Si, au contraire, on recherche un autre but au moyen des problèmes (celui d'apprendre des choses nouvelles), alors, dans un certain sens, il faut devancer le développement et proposer des problèmes en tenant compte des élèves, étant donné que les changements dans le développement (niveaux et aires de développement) s'observent à des périodes différentes, qui dépendent de la personnalité de chaque élève, de son mode de vie et d'éducation.

Une attention particulière à la formulation du problème

Parfois la difficulté de résolution d'un problème peut se situer au niveau du code linguistique dans lequel le problème est formulé. Chaque enseignant a rencontré le cas de l'élève qui s'est trompé dans un problème, parce que lui ont fait défaut non pas les capacités opératives pour le résoudre, mais la compréhension ou l'interprétation de la formulation du problème. Il nous semble utile de faire quelques considérations à cet égard.

Nous savons que le même objet ou le même phénomène peut être décrit de diverses manières et que la même information peut être transmise par des phrases très différentes. Du point de vue psychologique, nous savons aussi que l'assimilation d'une information peut varier selon le mode de codification employé. Dans un article de Bruner et Olson¹, nous trouvons l'expérience suivante: Un enquêteur distribue à un groupe de garçons des feuilles sur lesquelles se trouvent les chiffres 1 à 8 disposés au hasard. Quelques-uns reçoivent l'indication a), d'autres l'indication b).

a) biffer les chiffres 3, 4, 7, 8.

b) biffer tous les chiffres sauf 1, 2, 5 et 6.

Le deuxième exercice s'est révélé plus difficile que le premier. Ce qui démontre que la réussite de la résolution d'un problème peut dépendre du type de formulation.

En second lieu, un même terme peut être lié, dans un problème, à une opération arithmétique déterminée, dans un autre problème à une opération différente. Si les élèves apprennent à fonder leur choix de l'opération sur un terme déterminé, il est très probable qu'ils s'exposeront à des erreurs. Exemple:

a) Luc enlève 7 billes de son sac; il en reste encore 18. Combien de billes y avait-il dans le sac?

b) D'un sac de 25 billes, Luc en enlève 7. Combien de billes reste-t-il dans le sac?

Dans les deux problèmes, on recourt au verbe « enlever »: dans le premier exemple celui-ci est lié à une addition, dans le second à une soustraction. Au cours de l'examen des problèmes, les élèves doivent centrer leur attention sur les verbes et sur des termes précis (dans, moins, plus, etc.) qui traduisent les rapports entre les données, mais il est aussi important qu'ils se gardent de fonder le critère de choix de l'opération appropriée sur des schémas associatifs, tirés de l'expérience, de manière erronée.

Pour la résolution de problèmes complexes dans lesquels il faut combiner et coordonner plusieurs opérations pour trouver la solution, le succès de l'élève est souvent conditionné par la présence d'étapes intermédiaires pour guider ses démarches vers la solution, c'est-à-dire de questions intermédiaires qui permettent de distinguer les problèmes sous-jacents. Il peut être très utile pour résoudre les problèmes plus complexes de définir ensemble, avec les élèves, la succession des étapes à suivre, étant donné qu'une telle activité développe la capacité d'analyse, de synthèse et de coordination.

¹ « Apprentissage par expérience directe et apprentissage par expérience médiatisée », in *Perspectives* vol. III, N° 1, 1973.

Opérations mathématiques et opérations psychologiques

L'examen du rapport entre les opérations mathématiques et les opérations psychologiques nous amène à souligner qu'il n'y a pas toujours une correspondance biunivoque entre les deux types d'opérations. C'est-à-dire que diverses opérations psychologiques peuvent correspondre à la même opération arithmétique. Prenons le cas de l'opération la plus facile, l'addition, et illustrons par quelques exemples comment des opérations très diverses au point de vue psychologique peuvent correspondre à la formule mathématique $a + b = c$.

Confrontons ces problèmes :

- a) Pierre gagne 8 billes dans une première partie et 5 dans la deuxième. Combien de billes a-t-il gagnées?
- b) Georges a cueilli 9 marguerites et 7 boutons d'or. Combien de fleurs a-t-il cueillies en tout?
- c) En chemin, François a perdu 5 cailloux. Maintenant il en a 11. Combien de cailloux avait-il avant de venir ici?

Si au point de vue mathématique les trois problèmes correspondent à la même structure, celle de l'addition, du point de vue psychologique ils sont, au contraire, très différents. Dans *a*) et *c*) intervient une opération additive de deux ensembles homogènes (billes-billes; cailloux-cailloux); alors que dans *b*) l'opération additive se rapporte à deux ensembles hétérogènes (marguerites-boutons d'or), où le résultat correspond à une classe plus générale (celle des fleurs). Si nous analysons le problème *c*), nous voyons une différence par rapport au deux autres: la question de la succession dans le temps intervient ici. L'élève, pour trouver combien de cailloux il avait au début, doit parcourir le temps en sens inverse, c'est-à-dire qu'il doit trouver la situation de départ en connaissant la situation d'arrivée et sa transformation (la perte de 5 cailloux). Il s'agit d'un problème dans lequel la succession dans le temps est renversée, et l'élève ne peut se référer à une expérience vécue.

Le manque de correspondance entre les opérations mathématiques et les opérations psychologiques est encore mieux mis en évidence dans les problèmes qui font appel à une soustraction. Dans ceux-ci, l'élève doit traduire par la formule mathématique $a = b - c$ des opérations psychologiques qui se présentent sous des formes diverses (recherche d'un reste, comparaison, addition complémentaire).

Pour comprendre que du point de vue mathématique les énoncés $a + b = c$, $a = c - b$, $b = c - a$ sont équivalents, les élèves doivent accomplir un effort considérable de synthèse. Un tel niveau peut être atteint progressivement au moyen de nombreux exercices de généralisation dans des situations variées.

Confusion dans la détermination de l'univers opératif

Parfois la difficulté des élèves à résoudre des problèmes sur les ensembles (dans lesquels il faut déterminer la propriété d'un ensemble, par exemple) est liée à une confusion qui se situe au niveau de la détermination de l'univers dans lequel il faut opérer. En fait il est possible de distinguer trois plans sur lesquels nous pouvons porter notre réflexion.

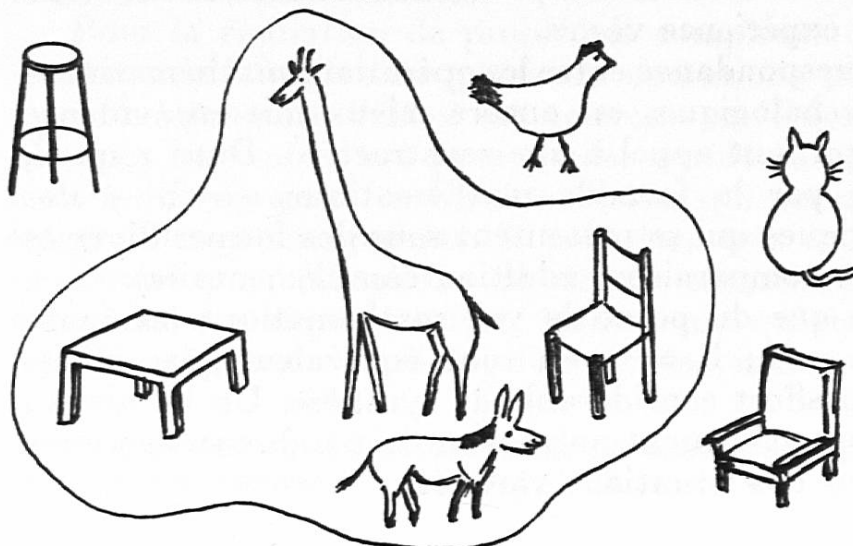
1. L'élève est en face d'objets réels; il les analyse et raisonne à partir de leurs propriétés. C'est le cas des nombreux exercices de recherche sur les propriétés d'un matériel structuré ou d'autres matériaux manipulables.

2. L'élève est confronté à des dessins (figuratifs ou abstraits) dans lesquels des propriétés déterminées sont mises en évidence (telles que la couleur, la forme, la présence ou absence d'un détail, etc.). Il en analyse les stimuli, qui sont du domaine de la perception, et il fait ses déductions à partir des propriétés visuelles des dessins.

3. L'élève est placé devant des dessins ou des symboles qui représentent des objets et il opère sur les caractéristiques de ces derniers, caractéristiques qui n'apparaissent pas nécessairement dans le dessin. (Il est difficile, à partir du dessin d'une poule, de trouver la caractéristique « pond des œufs », sans référence à l'objet réel.) Dans ce cas, le dessin désigne seulement un objet non disponible. Ce sont donc les propriétés de ce dernier qu'il faut prendre en considération.

Au stade des représentations figuratives des ensembles (où les objets sont représentés par les figures correspondantes), il peut arriver que les élèves confondent les niveaux 2 et 3 comme le montre l'exemple ci-dessous: 1/3 des élèves de première année ont exclu de leur ensemble le chat et le fauteuil puisqu'il n'était pas possible de déduire par la perception la caractéristique « avoir quatre jambes ».

(L'exercice a été présenté oralement par l'enseignant.) « Voici quelques dessins: ils représentent des animaux (un âne, une girafe, une poule, un chat) et des meubles (une table, une chaise, un fauteuil, un tabouret). Entourez les choses (animaux et meubles) qui ont quatre jambes. »



Solution de ceux qui ont probablement raisonné en se situant au niveau du point 2.

L'expérience antérieure peut être source d'erreurs

Partant des données que lui fournit l'expérience, l'enfant élabore, par une réorganisation active, des schémas opératoires¹ dont il se sert ensuite dans des situations analogues. Plus ces modèles sont généraux, plus ils sont précieux pour l'aider à résoudre de nouveaux problèmes.

Il peut aussi arriver que les modèles tirés de l'expérience entravent la résolution d'un nouveau problème, lorsque les élèves appliquent à la nouvelle situation des schémas antérieurs qui ne conviennent pas.

Dans certains cas ils ne parviennent pas à découvrir l'affinité structurale entre des problèmes précis et, par conséquent, ils les considèrent comme différents; ou, dans le cas contraire, ils attribuent la même structure à des problèmes substantiellement différents (centrant volontiers leur attention sur des analogies purement accidentelles).

Nous nous limitons ici à présenter un exemple qui, selon nous, illustre l'application incorrecte d'un schéma antérieur à une nouvelle situation.

Un jour, dans une classe de première année, nous avons fait faire des exercices qui consistaient à établir des relations entre une série de feuilles et d'arbres correspondants, et entre une série d'animaux (dont un oiseau) et les habitations correspondantes. Quelques jours plus tard, nous avons proposé aux mêmes élèves un problème sur la notion d'appartenance. Ils avaient construit un ensemble d'arbres, mettant ensemble le sapin, le chêne, etc. (découpés dans des cartons), attachant à l'ensemble délimité l'étiquette portant le symbole de l'arbre. Ensuite, nous leur avons présenté d'autres cartons sur lesquels figuraient une feuille, un arbre nu, une pomme de pin, un oiseau et une planche. On demandait si, entre les éléments, il y en avait un quelconque qui pouvait appartenir à l'ensemble des arbres. Plusieurs élèves se sont alors trompés en faisant appartenir à cet ensemble la feuille ou/et l'oiseau.

A quoi donc relier ce type d'erreur si ce n'est très probablement au phénomène que nous avons indiqué, celui de l'application d'un schéma précédent à une situation nouvelle, différente dans sa structure?

Pour conclure, toujours à propos de l'expérience, il convient de rappeler la nécessité de faire varier les données, qui constituent le support de l'expérience, pour éviter que la compréhension en reste à un schéma rigide produit par l'habitude. Un exemple nous montrera à quel point ceci est important.

Nous sommes entrés un jour dans une classe de deuxième année

¹ Schéma opératoire: ce qui, dans une action, est applicable aux mêmes situations ou qui peut se généraliser dans des situations analogues.

où les élèves étaient en train de résoudre un problème sur les échanges; à partir d'une certaine règle, ils devaient construire divers ensembles équivalents en combinant les pièces. La règle devait être de ce type:

$$\begin{array}{l} \square \longleftrightarrow \triangle \triangle \triangle \\ \triangle \longleftrightarrow 0000 \end{array}$$

Nous avons demandé à une fillette de nous indiquer la pièce qui valait le plus. L'enfant, d'un air surpris par notre question, nous répond: « Le carré, bien sûr. » « Et pourquoi le carré est-il la pièce qui vaut le plus? » Avec autant de sûreté elle nous répond: « Parce que le carré est le premier, il vient avant tous les autres. » La réponse nous a surpris et convaincu de la nécessité de varier constamment les données de l'expérience pour éviter l'abstraction de schémas incorrects. (D'habitude les enseignants présentent les règles d'échanges selon cet ordre spatial.)

« Et si la règle était celle-ci — et nous intervertîmes les deux séries de symboles, mettant en premier lieu l'équivalence $\triangle \longleftrightarrow 0000$ quelle pièce aurait le plus de valeur? » « Alors le triangle, parce qu'il vient en premier » répondit la fillette.

Ceci n'est pas un cas exceptionnel. Cette année, dans une épreuve de fin de cycle, nous en avons eu la démonstration, puisque plusieurs élèves, dans une situation telle que celle-là, ne raisonnaient plus sur les relations d'équivalence des symboles, mais ils se référaient à un schéma tiré des expériences précédentes, basé sur la disposition spatiale. Ils ne réagissaient donc pas de manière intelligente, mais obéissaient à un schéma associatif, produit par l'habitude. L'enseignant moderne doit tout faire pour empêcher la formation de schémas stéréotypés, pour garantir une véritable compréhension de la part des élèves.

RENATO TRAVERSI

*Bureau des études et recherches
Département de l'Instruction publique
Bellinzona*

Bibliographie :

Goutard, G.: *Les mathématiques et les enfants*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1967.

Hug, C.: *Il fanciullo e la matematica*, Boringhieri, Torino, 1972.

Piaget, J.: *Fondements scientifiques pour l'éducation de demain*, in *Perspectives*, vol. II, N° 1, 1972.

Polya, G.: *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano, 1967.

Progetto nuffield per la matematica: Zanichelli, Bologna, 1968.

Vygotskij Lurija Leontjev: *Psicologia e pedagogia*, Editori Riuniti, Roma, 1971.