Bewegung der Planeten mittelst Variation der elliptischen Bahnelemente behandelt

Autor(en): **Bigler, Ulr.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der aargauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **7 (1896)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-170989

Bewegung der Planeten mittelst Variation der elliptischen Bahnelemente behandelt.

Von **Ulr. Bigler.***

In Bezug auf irgend ein als ruhend vorausgesetztes Coordinatensystem seien M, X, Y, Z Masse und Coordinaten der Sonne, m, $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ Masse und und Coordinaten desjenigen unter den Planeten, dessen Bewegung man betrachtet. Für die übrigen Planeten werden m, x, y, z mit Zeigern 1, 2, ... versehen.

Es sei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$, etc.; $\rho_1{}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$, $\rho_2{}^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2$, etc.

$$\mu = M + m.$$

Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = m \frac{x}{r^3} + m_1 \frac{x_1}{r_1{}^2} + \ldots\ldots, \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial^2 (X + x)}{\partial t^2} = - M \frac{x}{r^3} + m_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1{}^3} + \ldots\ldots, \text{ etc.}$$

---

* Es wird hier nachgetragen, daß auch die im vorigen Hefte dieser Mitteilungen enthaltene mathematische Abhandlung: „Über die Darstellung des Potentiales einer durch eine Kugelfläche vom Radius r_1 nach innen oder nach außen begrenzten Masse für einen Punkt des leeren Raumes, wenn dasselbe auf der begrenzenden Fläche bekannt ist,“ Herrn Dr. Bigler zum Verfasser hat; sein Name wurde dort aus Versehen weggelassen.

Durch Subtraktion ergibt sich hieraus

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\mu \frac{x}{r^3} + m_1 \cdot \left(\frac{x_1 - x}{\rho_1{}^3} - \frac{x_1}{r_1{}^3}\right)$$

$$+ m_2 \left(\frac{x_2 - x}{\rho_2{}^3} - \frac{x_2}{r_2{}^3}\right) + \ldots \text{ etc.}$$

Weil

$$\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -(x_1 - x), \text{ so ist } \frac{x_1 - x}{\rho_1{}^3} = -\frac{1}{\rho_1{}^2} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{\rho_1}}{\partial x}.$$

Ebenso ist

$$-\frac{x_1}{r_1{}^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1{}^3}\right).$$

Man führe daher folgenden Ausdruck als Störungsfunktion zur Abkürzung in die Rechnung ein:

$$R = m_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1{}^3}\right)$$

$$+ m_2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{x x_1 + y y_2 + z z_2}{r_2{}^3}\right) + \ldots;$$

dann sind

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

die Bewegungsgleichungen des betrachteten Planeten. Die Funktion R und ihre Abgeleiteten sind klein von der Ordnung, wie der größte unter den Werten von $\frac{m_1}{\mu}$, $\frac{m_2}{\mu}$, ... Vernachlässigt man diese Ordnung, so gibt das System (I) die bekannte elliptische Bahn für den betrachteten Körper m. Ähnliche Systeme geben für die übrigen Körper m_1, m_2, ... elliptische Bahnen in erster

Annäherung. Wenn man die zweite Ordnung (d. h. Produkte wie $\frac{m}{M} \cdot \frac{m_1}{M}$) vernachlässigt, so kann man in der Anwendung auf das System (I) die Coordinaten der übrigen Körper m_1, m_2, ... als bekannte Funktionen der Zeit ansehen.

Wenn $\mu = M + m$ als keiner Veränderung durch Störungen unterworfen ausgeschlossen wird, so wird die elliptische Bewegung von m durch 6 konstante Elemente und durch die Zeit bestimmt. Die Sonne sei Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems (u, u', u''), dessen erste Axe auf der Bahnebene senkrecht steht und zwar in solcher Richtung, daß der Körper m in Bezug auf diese Axe sich in positivem Sinne bewegt (d. h. in demselben Sinne, in welchem eine Drehung um die z-Axe von der x-Axe zur y-Axe hin geschieht). Die u'-Axe habe die Richtung des kleinsten Leitstrahles, d. h. sie gehe zum Perihel (dem Orte, wo der Körper m der Sonne am nächsten ist); die u''-Axe liege in der Bahneben um $\frac{\pi}{2}$ vorwärts. Setzt man

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'' \\ y &= \beta u + \beta' u' + \beta'' u'' \quad (\text{wo } (\alpha\beta'\gamma'') = 1) \\ z &= \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u'' \end{aligned}$$

so enthalten die neun Richtungscosinus α, ... nur drei konstante Elemente; als solche sind folgende üblich. Der Winkel, den die u-Axe mit der z-Axe bildet, heist Neigung i (inclination). Der Ort, wo der Planet m von der Seite der negativen z her durch die Ebene xy nach der Seite, wo z positiv ist, hindurch geht, heißt aufsteigender Knoten seiner Bahn; unter Knotenlinie wollen wir den Strahl verstehen, der von der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten hingeht, also die positive Hälfte der Geraden, in der die Ebene xy von der Bahnebene geschnitten wird. Die Neigung i liegt zwischen o und π, so daß sin i immer positiv ist. (Als Ebene xy wird z. B. die Ebene der Erdbahn vom Jahre 1750 angenommen.) Diejenigen Körper bei denen i zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegt, heißen rechtläufig; die andern, bei denen i zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, werden rückläufig genannt. (Alle Planeten und die Mehrzahl der Kometen sind rechtläufig; nur einige Kometen sind rückläufig.) Der Winkel, um den die Knotenlinie der x-Axe voraus ist, heißt Länge des aufsteigenden Knotens Ω, und der Winkel, um den die u'-Axe der Knotenlinie voran ist, heißt Elongation des Perihels vom aufsteigenden Knoten und sei hier mit Θ bezeichnet. Beide, Ω und Θ werden im ganzen Kreise herum gezählt, haben also den vollen Spielraum von o bis 2π. In den Verzeichnissen der Elemente der Planeten wird aber $\Omega + \Theta$ als Länge des Perihels, statt Θ aufgeführt.

Um die neun Richtungscosinuse (α, β, γ); $(\alpha' \beta' \gamma')$; $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ durch die drei Elemente i, Ω, Θ auszudrücken, kann man nach und nach folgende Drehungen ausführen: 1) eine um die u-Axe, welche die u'-Axe in die Knotenlinie zurück führt. Die Coordinaten sind dann

$$u, \quad u' \cos\Theta - u'' \sin\Theta, \quad u' \sin\Theta + u'' \cos\Theta.$$

2) Drehe man dieses System um seine zweite Axe, die Knotenlinie, so daß die Bahnebene mit der xy-Ebene zusammenfällt. Die erste Axe vereinigt sich dann mit der z-Axe, die zweite Axe bleibt und heiße p-Axe, die dritte Axe gehe in eine q-Axe über. Dann ist

$$\left.\begin{array}{l} p = u'\cos\Theta - u''\sin\Theta \\ q = -u\sin i + u'\sin\Theta\cos i + u''\cos\Theta\cos i \\ z = u\cos i + u'\sin\Theta\sin i + u''\cos\Theta\sin i \end{array}\right\}$$

Man drehe 3) das System (p, q, z) um die z-Axe so, daß die p-Axe (Knotenlinie) sich mit der x-Axe vereinigt. Dann bleibt z, und es ist

$$x = p\cos\Omega - q\sin\Omega,$$
$$y = p\sin\Omega + q\cos\Omega.$$

Endlich hat man

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l} \alpha = \sin i\sin\Omega,\ \alpha' = \cos\Theta\cos\Omega - \sin\Theta\sin\Omega\cos i \\ \beta = \sin i\cos\Omega,\ \beta' = \cos\Theta\sin\Omega + \sin\Theta\cos\Omega\cos i \\ \gamma = \cos i\quad,\ \gamma' = \sin\Theta\sin i \\ \qquad\alpha'' = -\sin\Theta\cos\Omega - \cos\Theta\sin\Omega\cos i \\ \qquad\beta'' = -\sin\Theta\sin\Omega + \cos\Theta\cos\Omega\cos i \\ \qquad\gamma'' = \cos\Theta\sin i. \end{array}\right.$$

Die erste Zeile geht in die zweite über, indem man Ω durch $\Omega - \frac{\pi}{2}$ ersetzt, und die zweite Spalte geht in die dritte über, indem man Θ durch $\Theta + \frac{\pi}{2}$ ersetzt.

Innerhalb des Systems (u, u', u'') sind die drei noch übrigen Elemente: 1) Die große Halbaxe a, mittlere Entfernung von der Sonne, 2) das Excentricitätsverhältnis, das ich mit k bezeichnen will, während sein gewöhnliches Zeichen e ist; 3) die mittlere Anomalie im Zeitanfang ε, die ich schlechthin Epoche nennen werde, obgleich sonst $\Omega + \Theta + \varepsilon$ Epoche oder vollständig mittlere Länge für die Epoche, z. B. der Mitternacht zwischen 31. Dezember 1800 und 1. Januar 1801, heißt. In Funktion dieser drei Elemente a, k, ε und der Zeit t, durch Vermittlung einer Hilfsvariabeln φ, der excen-

trischen Anomalie, werden die Coordinaten u, u', u''
auf folgende Art ausgedrückt. Die Gleichung

$$\text{III.}\quad \varphi - k \sin \varphi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t + \varepsilon$$

gibt die excentrische Anomalie φ in Funktion von a, k, ε, t und dann sind die Coordinaten des Körpers m

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} u = o, \\ u' = a(\cos \varphi - k), \\ u'' = a\sqrt{1 - k^2} \sin \varphi. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2), (3), (4) machen die vollständige Lösung des Systems (1) für $R = o$ mit allen sechs Integrationsconstanten i, Ω, Θ, a k, ε aus und geben x, y, z in Funktion dieser sechs Elemente und der Zeit t. Unter derselben Voraussetzung der Constanz der sechs Elemente geben sie durch Differentiation auch die Werte der Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, in Funktion derselben sieben Unabhängigen. Umgekehrt, wenn der Ort und die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung in irgend einem Augenblicke gegeben sind, so bestimmen sie die ganze Bewegung des Körpers m. Daher sind die sechs Elemente i, Ω, ... Funktionen von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ allein, mit Ausſchluß der Zeit t. (Nur ε ist noch Funktion der zu x, ..., $\frac{dx}{dt}$, ... gehörigen Zeit.) Das soll noch näher ausgeführt werden.

Es sei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Dann ist

$$v^2 - \frac{2\mu}{r} = - \frac{\mu}{a},$$

hiedurch ist a bestimmt.

Ferner ist

$$u' \frac{\partial u''}{\partial t} - u'' \frac{\partial u'}{\partial t} = \sqrt{\mu a (1-k^2)}, \text{ sei} = c,$$

der doppelten Flächengeschwindigkeit; dann folgt

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = \alpha c,$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = \beta c,$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \gamma c.$$

Weil c positiv sein soll, so ist hiedurch c, folglich auch k, und sind α, β, γ, also i und Ω bestimmt. Mittelst der Gleichung

$$r = a (1-k \cos \varphi)$$

ist φ als Funktion von x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ bekannt; daher gibt die Gleichung (3) die Epoche ε in Funktion derselben sechs Werte und der zu ihnen gehörigen Zeit. Die Bestimmtheit ist bis jetzt für a, k, i Ω, ε nachgewiesen. Es fehlt noch Θ, wovon die Lage der u'-Axe in der Bahnebene abhängt. Man muß also Richtungsgrößen der u'-Axe darzustellen suchen und zu dem Ende α'' aus den zwei Gleichungen

$$x = \alpha' u' + \alpha'' u'',$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^1 \frac{\partial u'}{\partial t} + \alpha'' \frac{\partial u''}{\partial t},$$

eliminieren, und so fort. Weil

$$u' \frac{\partial u''}{\partial t} - u'' \frac{\partial u'}{\partial t} = c,$$

so hat man

$$c\alpha' = x \frac{\partial u''}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} u'', \text{ etc.}$$

Hier müssen aber u'', $\frac{\partial u''}{\partial t}$ durch x, y, z, $\frac{dx}{\partial t}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ (oder mittelbar durch r, $\frac{\partial r}{\partial t}$, v) ausgedrückt werden. Weil

$$u'' = a \sqrt{1 - k^2} \sin \varphi = c \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sin \varphi$$

zugleich mit $\frac{dr}{dt}$ verschwindet (denn die u'-Axe enthält den kleinsten Leitstrahl), so kann u'' wahrscheinlich mittelst $\frac{dr}{dt}$ dargestellt werden. Die Gleichung (3) gibt

$$(1 - k \cos \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \text{ also}$$

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}; \text{ hieraus und aus}$$

$$\frac{dr}{dt} = a k \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ folgt}$$

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot a k \sin \varphi = \sqrt{\mu a} \cdot k \sin \varphi.$$

Also ist $u'' = \frac{c}{\mu k} r \frac{dr}{dt}$. Ferner ist

$$\frac{\partial u''}{\partial t} = c \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c \frac{\cos \varphi}{r}, \text{ und}$$

weil $k a \cos \varphi = a - r$, so ist

$$\frac{\partial u''}{\partial t} = \frac{c}{ak}\frac{a-r}{r} = \frac{c}{\mu k}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right) = \frac{c}{\mu k}\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right),$$

$$\frac{\partial u''}{\partial t} = \frac{c}{\mu k}\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right).$$

Substituiert man die zwei gefundenen Werte im Ausdruck für $c\alpha'$ und multipliziert mit $\frac{\mu k}{c}$, so hat man

$$\mu k\alpha' = x\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) - \frac{dx}{dt} \cdot r\frac{dr}{dt},$$

$$\mu k\beta' = y\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) - \frac{dy}{dt} \cdot r\frac{dr}{dt},$$

$$\mu k\gamma' = z\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) - \frac{dz}{dt} \cdot r\frac{dr}{dt}.$$

Weil μk positiv ist, so sind durch diese Gleichungen die Richtungscosinus α', β', γ' völlig bestimmt, folglich auch Θ. Weil nämlich das positive sin i und cos Ω, sin Ω durch $\sin i \cos \Omega = -\beta$, $\sin i \sin \Omega = \alpha$ völlig bestimmt sind, so sind es auch

$$\cos \Theta = \alpha' \cos \Omega + \beta' \sin \Omega,\ \sin \Theta = \frac{\gamma'}{\sin i}.$$

Die drei ähnlichen Gleichungen

$$\mu c k \alpha'' = x \cdot \mu \frac{dr}{dt} + \frac{dx}{dt}\left(r^2 v^2 - \left(r\frac{\partial r}{dt}\right)^2 - \mu r\right), \ldots$$

etc., die mittelst den Gleichungen

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma, \ldots\ldots$$

aus den drei vorigen herzuleiten sind, kann man entbehren.

Wir gehen nun an die Verwandlung des Systems (1). Weil R nicht mehr null, sondern klein erster Ordnung ist, so werden die sechs früheren Integrationsconstanten i, Ω, Θ, a, k, ε die auf die soeben beschriebene Weise Funktionen der jeweiligen x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind, zu

Funktionen der Zeit, deren Veränderungen von derselben Ordnung der Kleinheit mit R sind. Die Zeit, die offen in der Gleichung (3) auftritt, werde mit t_0 bezeichnet; die Gleichung (3) sei also so geschrieben:

$$\varphi - k \sin \varphi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t_0 + \varepsilon;$$

$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ gelten fortan als Funktionen von sieben offenen Unabhängigen t_0, i, Ω, θ, a, k, ε, und partielle Ableitungen nach denselben werden mit ∂ bezeichnet, z. B.

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

während d für vollständige Differentiale verwendet wird, z. B.

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\, t_0 \frac{da}{dt} + a \frac{d\varepsilon}{dt} + a \sin \varphi \frac{dk}{dt}.$$

Der Kürze wegen werde $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d t_0} + \delta\varphi$ geschrieben.

Bedeutet V irgend eine Funktion von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ allein, so ist V mittelbar auch eine Funktion von t_0, i, Ω, θ, a, k, ε, und es sei

$$d V = \left(\frac{\partial V}{\partial t_0} + \delta V\right) dt;$$

also

$$\delta V . dt = \frac{\partial V}{\partial i} di + \frac{\partial V}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial k} dk + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\varepsilon.$$

Weil $\frac{\partial x}{\partial t_0} = \frac{dx}{dt}$ sein soll, so ist

$$\delta x = 0.$$

Die erste Gleichung des Systems (1) hat man sich als

$$\frac{d\,\frac{dx}{dt}}{dt} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

zu denken. Ihr erster Term links ist aber

$$\frac{d\,\frac{\partial x}{\partial t_0}}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t_0^2} \cdot dt + \delta\,\frac{\partial x}{\partial t_0}.$$

Weil

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_0^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0$$

ist, so geht die Gleichung in

$$\delta\,\frac{dx}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

über. Das System (1) hat sich nun in die sechs Gleichungen

$$\delta x = 0,\quad \delta y = 0,\quad \delta z = 0$$

$$\delta\,\frac{dx}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x},\quad \delta\,\frac{dy}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \delta\,\frac{dz}{dt} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

verwandelt. Man sollte sie noch nach

$$\frac{di}{dt},\quad \frac{d\Omega}{dt},\quad \frac{d\Theta}{dt},\quad \frac{da}{dt},\quad \frac{dk}{dt},\quad \frac{d\varepsilon}{dt}$$

entwickeln und nach diesen Unbekannten auflösen (wie ein System von sechs linearen Gleichungen). Die Berechnung der Determinanten wird aber zu beschwerlich. Es ist bequemer, sich an das unveränderte System (1) zu halten und denselben Weg zu gehen, der früher, als noch $R = 0$ war, zum Zwecke der Integration befolgt ward.

Nur die drei Elemente Ω, Θ, ε sollen bleiben, die drei übrigen i, a k aber durch

$$a = \sqrt{\mu\, a},\quad c = \sqrt{\mu\, a\,(1 - k^2)},\quad j = c \cos i,$$

ersetzt werden. Es ist dann

$$\cos i = \frac{j}{c},\quad a = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mu},\quad k = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\mathfrak{a}^2}};$$

$$di = \frac{\cos i}{c \sin i}\, dc - \frac{1}{c \sin i}\, dj;$$

$$da = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot d\mathfrak{a}.$$

$$dk = \frac{1 - k^2}{k\sqrt{\mu a}}\, d\mathfrak{a} - \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k\sqrt{\mu a}}\, dc.$$

Wenn man die zweite und dritte Gleichung des Systems (1) mit $-z$, y multipliziert und addiert, so kömmt

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = y\frac{\partial R}{\partial z} - z\frac{\partial R}{\partial y},$$

und, weil

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = y\frac{\partial z}{\partial t_0} - z\frac{\partial y}{\partial t_0} = \alpha c,$$

so hat man die drei Gleichungen

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \dfrac{d(\alpha c)}{dt} = y\dfrac{\partial R}{\partial z} - z\dfrac{\partial R}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d(\beta c)}{dt} = z\dfrac{\partial R}{\partial x} - x\dfrac{\partial R}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{d(\gamma c)}{dt} = x\dfrac{\partial R}{\partial y} - y\dfrac{\partial R}{\partial x}. \end{cases}$$

Weil $\gamma = \cos i$, so ist $\gamma c = j$; die letzte Gleichung gibt also den Wert von $\frac{dj}{dt}$. Die rechte Seite derselben Gleichung, mit der kleinen Zahl ω multipliziert, ist dasjenige, um welches R wächst, wenn x, y, z resp. in $x - y\omega$, $y + x\omega$, z übergehen. Die Strecke $(-y\omega,\ x\omega,\ o)$ ist zur z-Axe und zum Leitstrahl senkrecht und an Länge das ω-fache des Abstandes des Punktes m von der z-Axe, ist also die Verschiebung, die dieser Punkt erleidet, wenn das elliptische Gerüst um die z-Axe sich drehend, den Winkel ω in positiver Richtung beschreibt. Dieselbe Drehung des Gerüstes erfolgt aber auch, wenn Ω in $\Omega + \omega$ übergeht, während die fünf übrigen Elemente $\mathfrak{a}$, c, j, θ, ε constant bleiben. Also ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y,\ \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x,\ \frac{\partial z}{\partial \Omega} = o,$$

folglich

$$x\frac{\partial R}{\partial y} - y\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Daher ist

$$(a)\quad \frac{dj}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (5) mit α, β γ und addiert, so hat man links

$$\alpha\left(\alpha\frac{dc}{dt} + c\,\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

zu summieren. Wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} = o.$$

Die linke Seite ist also $\frac{dc}{dt}$. Die rechte Seite ist der Determinant $\left(\alpha y\frac{\partial R}{\partial z}\right)$. Die erste Zeile in

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ x \cdot y \cdot z \end{vmatrix}$$

stellt die Strecke 1 auf der u-Axe, die zweite den Leitstrahl dar; beide stehen aufeinander senkrecht; die drei Determinanten sind also die Projektionen des von den zwei Strecken gebildeten Rechteckes, dessen Inhalt r beträgt; also auch Projektionen der Normale des Rechteckes, wenn deren Länge r beträgt, und wenn sie zur u-Axe und zum Leitstrahl so liegt, wie die u''-Axe zur u-Axe und zur u'-Axe. Die Normale fällt notwendig in die Bahnebene und ist dem Leitstrahl um $\frac{\pi}{2}$ voraus. Multipliziert man die drei Determinanten mit der kleinen Zahl ω und denkt sich die Produkte resp. als Incremente von x, y, z, so sind sie Projektionen derjenigen Verschiebung des Punktes m, welche einer Drehung des elliptischen Gerüstes um die u-Axe entspricht, wenn ω Drehungswinkel in positivem Sinne ist. Dieselbe Drehung erfolgt aber, wenn θ in $\theta + \omega$ übergeht, während die fünf übrigen Elemente konstant bleiben. Also ist

$$\text{(b)} \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Vermöge der Gleichungen (2) ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\operatorname{cotg} \Omega = \operatorname{tang}\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\beta c}{\alpha c}.$$

Daher ist

$$d\Omega = \frac{d\frac{\beta c}{\alpha c}}{1 + \left(\frac{\beta c}{\alpha c}\right)^2} = \frac{\alpha c \cdot d(\beta c) - \beta c d(\alpha c)}{(\alpha c)^2 + (\beta c)^2}$$

$$= \frac{\alpha\, d(\beta c) - \beta\, d(\alpha c)}{c(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Nach (2) ist

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sin i, \text{ und } \frac{d(\beta c)}{dt}, \frac{d(\alpha c)}{dt}$$

sind durch (5) gegeben. Man hat

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{c \sin^2 i} \begin{vmatrix} -\beta \cdot & \alpha & \cdot\ 0 \\ x \cdot & y & \cdot\ z \\ \frac{\partial R}{\partial x} \cdot & \frac{\partial R}{\partial y} & \cdot\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{vmatrix},$$

und, wenn man diesen Determinant als lineare Funktion der Glieder seiner letzten Spalte auffaßt und abkürzend

$$D = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}$$

setzt

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{c \sin^2 i} \left\{ z D R - (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{\partial R}{\partial z} \right\},$$

wo

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = o \quad \text{ist.}$$

Man multipliziert die rechte Seite mit dem kleinen ω. Das Symbol D entspricht der Richtung der u-Axe. Eine Verschiebung des Punktes m in dieser Richtung erfolgt, wenn man das elliptische Gerüst um die Knotenlinie dreht. Der Arm der Drehung (für m) sei p (Senkrechte aus m auf die Knotenlinie). Dann ist

$$z = p \sin i.$$

Die Verschiebung beträgt also $\frac{p\,\omega}{c \sin i}$. Wenn c konstant ist, so $\frac{1}{c \sin i} = -\frac{di}{dj}$. Setzt man daher $\omega = dj$, so beträgt die Verschiebung — p di. Wenn außer j die fünf übrigen Elemente sich nicht verändern, aber j in j + dj übergeht, so geht i in i + di über, der Drehungswinkel des Gerüstes um die Knotenlinie beträgt i, und der Punkt m verschiebt sich um p di in der Richtung der u-Axe. Also ist

$$\text{(c).} \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial j}.$$

Man multipliziere die Gleichungen (1) mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und addiere. Links ist

$$\Sigma \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\Sigma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt},$$

$$\frac{\mu}{r^3} \cdot \Sigma x \frac{dx}{dt} = \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\right).$$

Die linke Seite ist also

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2 - 2\frac{\mu}{r}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{a}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu^2}{a^2}\right)$$
$$= \frac{\mu^2}{a^2} \cdot \frac{da}{dt}.$$

Weil $\frac{\mu^2}{a^3} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, so ist die linke Seite $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot \frac{da}{dt}$.

Weil $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t_0}$, etc., so ist die rechte Seite

$$\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_0} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_0} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t_0} = \frac{\partial R}{\partial t_0}.$$

Aber t_0 kömmt nur im Ausdrucke $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t_0 + \varepsilon$ der mittleren Anomalie vor. Bezeichnet man diese für einen Augenblick mit χ, so ist R, wenn a, c, j, Ω, Θ konstant sind, eine Funktion von χ und erst durch Vermittlung von χ eine Funktion von t_0 und ε. Da nun

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon} = 1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

so ist

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial R}{\partial t_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \chi} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Dividiert man beide Seiten durch $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, so hat man

$$\text{(d)} \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

$\Sigma \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt}$ stellt eine Winkelgeschwindigkeit um die u-Axe dar und kann nur von i, Ω, Θ und ihren Veränderungen abhangen. (Winkelgeschwindigkeiten werden ähnlich wie lineare Geschwindigkeiten, die mit den Axen jener parallel sind, zusammen gesetzt). $\frac{di}{dt}$ kömmt nicht in Betracht, weil die zugehörige Axe, nämlich die Knotenlinie, auf der u-Axe senkrecht steht, und weil daher eine lineare Geschwindigkeit längs der Knotenlinie auf die u-Axe keine Projektion gäbe. $\frac{d\Omega}{dt}$ ist eine Winkelgeschwindigkeit um die z-Axe, die mit der u-Axe den Winkel i bildet; die Componente von $\frac{d\Omega}{dt}$ zu einer Drehung um die u-Axe beträgt also $\cos i \cdot \frac{d\Omega}{dt}$. Ferner ist $\frac{d\Theta}{dt}$ geradezu eine Winkelgeschwindigkeit um die u-Axe. Also ist

$$\alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} + \cos i \cdot \frac{d\Omega}{dt}.$$

Diese Gleichung kann an den Gleichungen (2) verifiziert werden; denn diese geben

$$\begin{aligned} d\alpha' &= \alpha'' d\Theta - \beta' d\Omega + \alpha \sin\Theta \cdot di, \\ d\beta' &= \beta'' d\Theta + \alpha' d\Omega + \beta \sin\Theta \cdot di, \\ d\gamma' &= \gamma'' d\Theta \qquad\qquad + \gamma \sin\Theta \cdot di, \end{aligned}$$

und weil

$$\begin{aligned} &\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ &\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \gamma = \cos i, \\ &\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \end{aligned}$$

so geben sie wirklich $\Sigma\alpha'' d\alpha' = d\Theta + \cos i \cdot d\Omega$.

Nach (c) ist also

$$\Sigma\alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} - \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j},$$

$$\Sigma\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} = -\left(\frac{d\Theta}{dt} - \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j}\right).$$

Weil

$$u' = \Sigma\alpha' x, \quad u'' = \Sigma\alpha'' x,$$

und weil

$$\delta x = o,\ \delta y = o,\ \delta z = o,$$

so ist

$$\delta u' = \Sigma x\ \frac{d\alpha'}{dt},\quad \delta u'' = \Sigma x\ \frac{d\alpha''}{dt}.$$

Ersetzt man hier x, y, z durche Ausdrücke $\alpha' u' + \alpha'' u''$, etc., so ergeben sich aus dem vorigen die zwei Gleichungen

$$\delta u' = u''\left(\frac{d\theta}{dt} - \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j}\right),$$

$$\delta u'' = -\ u'\left(\frac{d\theta}{dt} - \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j}\right).$$

Weil aber u', u'' nur von $\mathfrak{a}$, ε, c, t_0 abhangen, und weil

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\ \frac{dc}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \theta}\ \text{ist},$$

so hat man auch

$$\delta u' = \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial u'}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial u'}{\partial c} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta},$$

$$\delta u'' = \frac{\partial u''}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial u''}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial u''}{\partial c} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta},$$

und wenn man die gleichwertigen Ausdrücke von einander subtrahiert,

$$\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} - u''\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial u'}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial u'}{\partial c} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} + u'' \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j} = o,$$

$$\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + u'\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial u''}{\partial \mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial u''}{\partial c} \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - u' \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j} = o.$$

Aus diesen zwei Gleichungen eliminiere man 1°. $\frac{d\theta}{dt}$, 2°. $\frac{d\varepsilon}{dt}$. (Wenn $\mathfrak{a}$, c, j θ, Ω konstant sind, so sind auch a, k konstant; daher ist $\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$ und $\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial u''}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$, wo $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{1 - k\cos\varphi} = \frac{a}{r}.$) Weil

$$r^2 = u'^2 + u''^2, \text{ so ist}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial\varepsilon} \cdot & -u'' \\ \frac{\partial u''}{\partial\varepsilon} \cdot & u' \end{vmatrix} = u'\frac{\partial u'}{\partial\varepsilon} + u''\frac{\partial u''}{\partial\varepsilon} = r\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} \; (= a^2 k \sin\varphi),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial a} \cdot & -u'' \\ \frac{\partial u''}{\partial a} \cdot & u' \end{vmatrix} = r\frac{\partial r}{\partial a}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial c} \cdot & -u'' \\ \frac{\partial u''}{\partial c} \cdot & u' \end{vmatrix} = r\frac{\partial r}{\partial c}.$$

Es ergeben sich also die zwei Gleichungen

$$\text{VI} \qquad r\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + r\frac{\partial r}{\partial a} \cdot \frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + r\frac{\partial r}{\partial c} \cdot \frac{\partial R}{\partial\theta} = 0$$

$$\text{VII} \qquad r\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{\partial u'}{\partial\varepsilon}\frac{\partial u''}{\partial a} - \frac{\partial u''}{\partial\varepsilon}\frac{\partial u'}{\partial a}\right)\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}$$
$$+ \left(\frac{\partial u'}{\partial\varepsilon}\frac{\partial u''}{\partial c} - \frac{\partial u''}{\partial\varepsilon}\frac{\partial u'}{\partial c}\right)\frac{\partial R}{\partial\theta} - r\frac{\partial r}{\partial\varepsilon} \cdot \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j} = 0.$$

Die Gleichung (6) ist nichts anderes als die selbstverständliche Gleichung $\delta r = 0$, worin $\frac{da}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ durch ihre schon bekannten Werte ersetzt sind. Ich sage „selbstverständlich", weil der Ausdruck $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ nur x, y, z, aber kein Element und keine Geschwindigkeitscomponente enthält. Aus demselben Grunde ist auch $\delta R = 0$.

Der Fortgang der Rechnung beruht auf der Wahrnehmung, daß

$$\frac{\partial u'}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{\partial u''}{\partial a} - \frac{\partial u''}{\partial\varepsilon} \cdot \frac{\partial u'}{\partial a} = r\frac{\partial r}{\partial c} \text{ ist.}$$

Ferner ist auch

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}, \quad \frac{\partial k}{\partial \alpha} = \frac{1-k^2}{k\sqrt{\mu a}}.$$

Wenn man also diejenigen Ableitungen nach α, worin φ als konstant behandelt wird, mit $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ bezeichnet, so ist

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial \alpha}\right) = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\cos\varphi - k) - \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{1-k^2}{k}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(2\cos\varphi - k - \frac{1}{k}\right).$$

Bei u'' ist es passend, $u'' = \frac{\alpha c}{\mu} \cdot \sin\varphi$ zu schreiben.

Dann ist

$$\left(\frac{\partial u''}{\partial \alpha}\right) = \frac{c}{\mu}\sin\varphi = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-k^2}\,\sin\varphi.$$

Nun ist

$$\frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial u'}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial u''}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial u''}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial u''}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Daher ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u'}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u''}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u''}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \frac{a}{r} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial \alpha}\right) \\ \frac{\partial u''}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{\partial u''}{\partial \alpha}\right) \end{vmatrix} =$$

$$\frac{a^2}{r}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-k^2}\begin{vmatrix} -\sin\varphi \cdot 2\cos\varphi - k - \frac{1}{k} \\ \cos\varphi \cdot \sin\varphi \end{vmatrix}.$$

Der letzte Determinant ist

$$-\cos\varphi^2 - 1 + \left(k + \frac{1}{k}\right)\cos\varphi = \left(\frac{1}{k} - \cos\varphi\right)(\cos\varphi - k)$$

$$= \frac{r}{ak} \cdot \frac{u'}{a} = \frac{ru'}{a^2k}.$$

Also ist

$$\text{VIII.} \qquad \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u''}{\partial \alpha} - \frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \cdot u'.$$

und nach früherem

$$\frac{\partial k}{\partial c} = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{a\mu}}$$

ferner

$$r\frac{\partial \varphi}{\partial c} = a \sin\varphi \frac{\partial k}{\partial c};$$

$$r\frac{\partial r}{\partial c} = a\,k \sin\varphi \cdot r\frac{\partial \varphi}{\partial c} - r \cdot a \cos\varphi \cdot \frac{\partial k}{\partial c}$$

$$= a^2\frac{\partial k}{\partial c}\Big(k\sin^2\varphi - \cos\varphi\,(1-k\cos\varphi)\Big) = -\,a\frac{\partial k}{\partial c} \cdot u';$$

$$\text{IX.} \qquad r\frac{\partial r}{\partial c} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \cdot u',$$

folglich

$$\text{X.} \qquad \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u''}{\partial \alpha} - \frac{\partial u''}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u'}{\partial \alpha} = r\frac{\partial r}{\partial c}.$$

Man benutze (10), um zu bewirken, daß in (6) keine Ableitungen nach c und in (7) keine nach a mehr vorkommen. In (6) setze man

$$r\frac{\partial r}{\partial a} = u'\frac{\partial u'}{\partial a} + u''\frac{\partial u''}{\partial a}$$

und in (7)

$$r\frac{\partial r}{\partial c} = u'\frac{\partial u'}{\partial c} + u''\frac{\partial u''}{\partial c},$$

und ordne nun in (6) nach $\frac{\partial u'}{\partial a}, \frac{\partial u''}{\partial a}$, was sich so ordnen läßt, in (7) nach $\frac{\partial u'}{\partial c}, \frac{\partial u''}{\partial c}$. Dann werden die zwei Gleichungen

VI b. $$r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial a}\left(u'\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)$$
$$+\frac{\partial u''}{\partial a}\left(u''\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)=0.$$

VII b. $$r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial c}\left(u'\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)$$
$$+\frac{\partial u''}{\partial c}\left(u''\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)-r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\cos i\frac{\partial R}{\partial j}=0.$$

Es sei
$$D'=\Sigma\alpha\frac{\partial}{\partial x},\quad D''=\Sigma\alpha''\frac{\partial}{\partial x}.$$

Weil die neun Richtungscosinus nur von Ω, θ, c, j, also nicht von ε abhangen, so ist
$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\cdot D'R+\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}D''R.$$

Wenn Ω, c, γ, a, ε sich nicht ändern, so ist $d\theta$ eine kleine Drehung des Gerüstes, durch welche u', u'' in $u'-u''d\theta$, $u''+u'd\theta$ übergehen; daher ist
$$\frac{\partial R}{\partial \theta}=-u''D'R+u'D''R.$$

Also ist
$$u'\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial R}{\partial \theta}=u'\left(\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}D'R+\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}D''R\right)$$
$$-\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\left(-u''D'R+u'D''R\right),$$
$$=\left(u'\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}+u''\frac{\partial u''}{\partial \varepsilon}\right)\cdot D'R=r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\cdot D'R;$$
$$u''\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial R}{\partial \theta}=r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\cdot D''R.$$

Die Gleichungen (6b), (7b) sind durch $r\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ teilbar geworden und vereinfachen sich zu

$$\text{VIc.}\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial a}\cdot D'R+\frac{\partial u''}{\partial a}\cdot D''R=0.$$

$$\text{VIIc.}\qquad \frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial c}\cdot D'R+\frac{\partial u''}{\partial c}D''R-\cos i\cdot\frac{\partial R}{\partial j}=0.$$

Weil die Richtungscosinus nicht von a abhangen, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\alpha'\frac{\partial u'}{\partial a}+\alpha''\frac{\partial u''}{\partial a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\beta'\frac{\partial u'}{\partial a}+\beta''\frac{\partial u''}{\partial a},$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\gamma'\frac{\partial u'}{\partial a}+\gamma''\frac{\partial u''}{\partial a};$$

daher

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\Sigma\left[\frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}\right]=\frac{\partial u'}{\partial a}\cdot D'R+\frac{\partial u''}{\partial a}\cdot D''R.$$

Die Gleichung (6c) geht also in

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\partial R}{\partial a}=0$$

über und gibt

$$\text{(e).}\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial a}.$$

Weil die Richtungscosinus von c nur mittelst i abhangen, und weil

$$\frac{\partial i}{\partial c}=-\cos i\cdot\frac{\partial i}{\partial j},\ \text{so ist}\ \frac{\partial \alpha'}{\partial c}=-\cos i\,\frac{\partial \alpha'}{\partial j},\ \text{etc.}$$

(sechs Gleichungen); daher

$$\frac{\partial x}{\partial c}=\alpha'\frac{\partial u'}{\partial c}+\alpha''\frac{\partial u''}{\partial c}-\cos i\left(u'\frac{\partial \alpha'}{\partial j}+u''\frac{\partial \alpha''}{\partial j}\right),\ \text{etc.}$$

Und weil u', u'' nur von a, c, ε, t_0, also nicht von j abhangen, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial j}=u'\frac{\partial \alpha'}{\partial j}+u''\frac{\partial \alpha''}{\partial j},\ \text{etc.}$$

Also ist $\quad\dfrac{\partial x}{\partial c}=\alpha'\dfrac{\partial u'}{\partial c}+\alpha''\dfrac{\partial u''}{\partial c}-\cos i\cdot\dfrac{\partial x}{\partial j},$ etc.;

daher $$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial u'}{\partial c} \cdot D'R + \frac{\partial u''}{\partial c} D''R - \cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial j}.$$

Die Gleichung (7 c) gibt also

$$\text{(f).} \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial c}.$$

Den drei Bewegungsgleichungen (1) hatte man die drei willkürlichen Bedingungen $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ hinzugesetzt. Dadurch entstund das System der sechs Gleichungen

$$\left(\delta x = 0, \text{etc.}, \ \delta \frac{dx}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}, \text{etc.}\right),$$

linear in Bezug auf $\frac{da}{dt}, \frac{dc}{dt}, \ldots$. Nach diesen sechs Unbekannten aufgelöst, gibt es für dieselben folgende Werte

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial a}, \ \frac{dc}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \theta}, \ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial c}$$

$$\frac{dj}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \ \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial j}.$$

Bei jeder Wahl der sechs elliptischen Elemente ist $\delta R = 0$; aber bei der hier getroffenen Wahl besteht δR aus drei Gruppen, von denen jede für sich schon null ist, nämlich

$$\frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial j} \cdot \frac{dj}{dt} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Diese Wahl ist aber nicht die einzige, welche die angegebene Eigenschaft hat, sondern es gibt unzählige solche Wahlen.

Weil die sechs Abgeleiteten

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}, \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial R}{\partial c}, \frac{\partial R}{\partial \theta}, \frac{\partial R}{\partial j}, \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

mittelbar durch

$$\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

bekannt siud, so sind jene durch drei identische Relationen verbunden.

Wir wollen die sechs gefundenen Gleichungen noch der früher gebrauchten Elementgruppe (a, ε, k, θ, i, Ω) anpassen. Nur drei Elemente wurden geändert:

$$a = \frac{\alpha^2}{\mu}, \; k = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha^2}}, \; \cos i = \frac{j}{c}.$$

Daher ist

$$da = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} d\alpha, \; dk = \frac{1-k^2}{k\sqrt{\mu a}} d\alpha - \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{\mu a}} dc,$$

$$di = \frac{\cos i}{c \sin i} dc - \frac{1}{c \sin i} dj.$$

Man unterscheide durch Klammern die Ableitungen nach Elementen der zweiten Gruppe (α, . . .) von denjenigen nach der ersten Gruppe (a, ε, k, . . .), welche auf die gewöhnliche Weise bezeichnet werden soll. Dann ist

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right), \; \frac{d\varepsilon}{dt} = -\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right), \; \frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{\partial R}{\partial c}\right)$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1-k^2}{k\sqrt{\mu a}} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) - \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{\mu a}} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{c \sin i} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{c \sin i} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\left(\frac{\partial R}{\partial j}\right).$$

Mittelst obiger Ausdrücke für da, dk, di, in dα, dc, dj hat man

$$dR = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\, d\alpha + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial R}{\partial k}\left(\frac{1-k^2}{k\alpha} \cdot d\alpha - \right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{1-k^2}}{k\,\alpha} dc\right) + \frac{\partial R}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial R}{\partial i}\left(\frac{\cos i}{c \sin i} dc - \frac{1}{c \sin i} dj\right) + \frac{\partial R}{\partial \Omega} d\Omega,$$

nur wenn man nach dα, ... ordnet,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right) = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-k^2}{k\sqrt{\mu a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial k},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial c}\right) = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{\mu a}} \cdot \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{\cos i}{c \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \left(\frac{\partial R}{\partial j}\right) = -\frac{1}{c \sin i}\frac{\partial R}{\partial i}, \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial R}{\partial \theta}, \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right) = \frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Substituiert man diese Werte von $\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)$, ... in den vorigen Ausdrücken für $\frac{da}{dt}$, so ergeben sich folgende Werte

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a\mu}} \cdot \left(2a\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-k^2}{k} \cdot \frac{\partial R}{\partial k}\right),$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{\mu a}} \cdot \left(\sqrt{1-k^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial R}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu a}}\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \cdot \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{\operatorname{cotg} i}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}\right),$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{c \sin i}\left(\cos i\,\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right)$$

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{c \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Nachträgliche Bemerkungen

$$d\alpha = -(\alpha' \sin\theta + \alpha'' \cos\theta)\, di - \beta d\Omega,$$
$$d\beta = -(\beta' \sin\theta + \beta'' \cos\theta)\, di + \alpha d\Omega,$$
$$d\gamma = -(\gamma' \sin\theta + \gamma'' \cos\theta)\, di,$$

$$d\alpha' = \alpha''\, d\theta + \alpha \sin\theta\, di - \beta' d\Omega$$
$$d\beta' = \beta''\, d\theta + \beta \sin\theta\, di + \alpha'\, d\Omega,$$
$$d\gamma' = \gamma''\, d\theta + \gamma \sin\theta\, di.$$

$$d\alpha'' = -\alpha' d\theta + \alpha \cos\theta\, di - \beta''\, d\Omega,$$
$$d\beta'' = -\beta' d\theta + \beta \cos\theta\, di + \alpha''\, d\Omega,$$
$$d\gamma'' = -\gamma' d\theta + \gamma \cos\theta\, di.$$

Aus dieser Übersicht folgen die drei Gleichungen

$$\Sigma \alpha'' d\alpha' = d\theta \qquad + \gamma\, d\Omega,$$
$$\Sigma \alpha d\alpha'' = \qquad \cos\theta \cdot di + \gamma'\, d\Omega,$$
$$\Sigma \alpha' da = \qquad -\sin\theta \cdot di + \gamma''\, d\Omega,$$

von denen nur die erste oben gebraucht wurde.

Die Rechnung stützte sich zuerst nur auf die Gleichung

$$\delta \frac{dx}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ldots;$$

erst später sind auch die Gleichungen

$$\delta x = 0,\ \delta y = 0,\ \delta z = 0$$

benutzt worden, um daraus $\Sigma \alpha' \delta x = 0$, $\Sigma \alpha'' \delta x = 0$ zu folgen und dadurch doppelte Ausdrücke für $\delta u'$ und $\delta u''$ zu gewinnen. Die Gruppe der drei Gleichungen $\delta x = o$ ist aber erst dann in ein vollständiges System verwandelt, wenn zu den zwei soeben daraus geschlossenen Gleichungen noch die Gleichung

$$\Sigma \alpha \delta x = 0$$

hinzu genommen wird. Diese gibt

$$u' \Sigma \alpha\, d\alpha' + u'' \Sigma \alpha\, d\alpha'' = 0, \text{ d. i.,}$$
$$u' (\sin\theta\, di - \gamma''\, d\Omega) + u''(\cos\theta\, di + \gamma'\, d\Omega) = 0,$$

oder, wenn man

$p = u' \cos\theta - u'' \sin\theta$, $q = u' \sin\theta + u'' \cos\theta$ setzt, so daß (p, q, u) ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist, worin die p-Axe in die Knotenlinie fällt,

$$q\, di - p \sin i \cdot d\Omega = 0,$$

geometrisch daraus zu begreifen, daß vermöge

$$\delta x = 0,\ \delta y = 0,\ \delta z = 0$$

das Gerüst nur um den Leitstrahl gedreht werden kann. Die Drehung sei $r\omega$. Sie zerlegt sich nach den Axen der p, q, u in $p\omega$, $q\omega$, 0. $d\theta$ als Drehung um die u-axe fällt außer Betracht; $di = p\omega$; $d\Omega$ als Drehung um die z-Axe muß auf die q-Axe (Winkel $\frac{\pi}{2} - i$) projeciert werden, also $\sin i\, d\Omega = q\omega$; u. s. f. Ersetzt man $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$ durch ihre gefundenen Werte, so hat man die identische Relation

$$q\left(\cos i \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right) - p \sin i \cdot \frac{\partial R}{\partial i} = 0$$

für die Elementengruppe $(a, \varepsilon, k, \theta, i, \Omega)$. Man kann die Relation verifizieren. Das Sonderbare ist aber, daß sie nur drei Abgeleitete enthält, während man deren mindestens vier erwartet.

$$\frac{\delta u'}{u''} = -\frac{\delta u''}{u'} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sqrt{a\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial k}.$$