

Le idee di base dell'Analisi Matematica

Autor(en): **Barozzi, Giulio C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archi : rivista svizzera di architettura, ingegneria e urbanistica =
Swiss review of architecture, engineering and urban planning**

Band (Jahr): - **(2006)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-133429>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le idee di base dell'Analisi Matematica

Giulio C. Barozzi*

Premessa

Il corpo di dottrina che oggi chiamiamo Analisi Matematica ha ricevuto questo nome in epoca relativamente recente, anche se le idee di base affondano le proprie radici nella matematica greca classica. Il grande matematico svizzero Leonhard Euler (latinizzato Eulero) intitolava il suo più importante trattato *Introductio in Analysim Infinitorum*, pubblicato nel 1748. In esso si tentava una sistemazione delle conoscenze acquisite fino all'epoca della redazione dell'opera stessa, sulla base dei risultati di G.W. Leibniz e I. Newton, che a loro volta avevano sfruttato acquisizioni di B. Cavalieri, E. Torricelli, I. Barrow, e così a ritroso, fino ai grandi nomi dell'antichità greca, primo tra tutti Archimede.

Quali sono i problemi di base di cui si occupa l'Analisi Matematica? Dovendo operare una sintesi drastica (potrei dire: brutale) tali problemi sono riducibili a due: quello di determinare la tangente ad una curva data, grafico di un'assegnata funzione, e quello di determinare l'area sottesa dal grafico di una tale funzione.

Stabilire la connessione tra questi due problemi di base ha costituito un risultato di primaria importanza: non a caso tale connessione è, per antonomasia, il *teorema fondamentale del Calcolo*.

La quadratura del segmento di parabola

Archimede (287-212 a.C.) si pose il problema di «quadrare» un segmento parabolico, cioè la regione mistilinea delimitata da una corda che congiunge due punti di una parabola e l'arco di parabola avente gli stessi estremi. L'idea di base è quella di invadere progressivamente il segmento parabolico mediante poligoni di cui si sa valutare l'area: si viene a costruire una successione $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ di aree che è crescente:

$$s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots;$$

l'area del segmento parabolico sarà il più piccolo numero che non è superato da alcuna delle aree s_n .

Incontriamo qui uno dei concetti di base dell'Analisi Matematica: quello di *estremo superiore* di un insieme di numeri reali: tra i numeri s_n che costruiremo tra poco, non ce n'è uno che sia maggiore di tutti gli altri, perché ogni termine della successione è strettamente inferiore al termine seguente. A noi interessa il numero A che gode di queste due proprietà:

1. ogni termine della successione s_n non supera A :
 $s_n \leq A$ per ogni indice n ;
2. A è il più piccolo numero che goda della proprietà 1-, cioè se si considera un numero del tipo $A - \epsilon$, dove con ϵ indichiamo un qualsivoglia numero positivo, allora per un certo indice $n(\epsilon)$ si ha $s_n(\epsilon) > A - \epsilon$.

Vediamo la costruzione di Archimede, aiutandoci con un poco di Geometria Analitica. Consideriamo la parabola di equazione

$$y = p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0,$$

e siano x_1 e x_2 due punti sull'asse delle ascisse con $x_1 < x_2$; consideriamo i punti P_1 e P_2 sulla parabola, aventi ascisse x_1 e x_2 rispettivamente, e finalmente conduciamo la secante passante per tali punti.

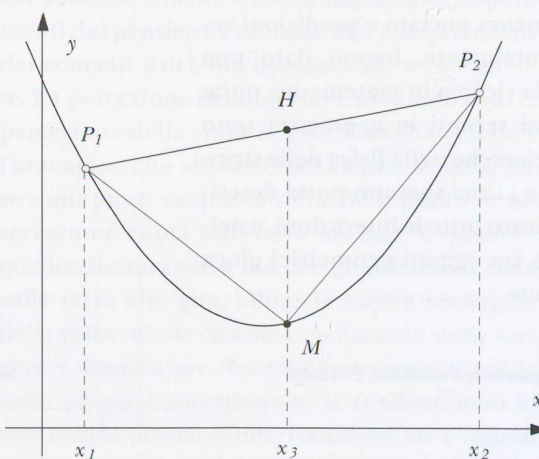


Figura 1

La regione di piano di cui vogliamo definire e calcolare l'area è quella delimitata dall'arco di parabola costituito dai punti con ascissa compresa tra x_1 e x_2 e il segmento congiungente i punti P_1 e P_2 . Con riferimento alla figura 1, consideriamo il punto medio dell'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$x_3 := \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e chiamiamo M il corrispondente punto sulla parabola: $M := (x_3, p(x_3))$

Una prima approssimazione (per difetto) dell'area che vogliamo definire, e al tempo stesso calcolare, sarà l'area del triangolo $P_1 P_2 M$: poiché il lato $P_1 P_2$ ha come proiezione sull'asse x un segmento di lunghezza: $d := x_2 - x_1$.

l'area di tale triangolo sarà:

$$A_1 := \frac{1}{2} d \cdot \overline{MH},$$

dove H è il punto medio del segmento $[P_1 P_2]$, dunque il punto di tale segmento avente ascissa x_3 .

Calcoliamo la lunghezza del segmento MH , sia h_1 . Si ha, in base a semplici considerazioni di tipo geometrico,

$$\begin{aligned} h_1 &:= \overline{MH} = (\text{ordinata di } H) - (\text{ordinata di } M) = \\ &= \frac{1}{2} [p(x_1) + p(x_2)] - p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} [ax_1^2 + bx_1 + c + ax_2^2 + bx_2 + c] + \\ &\quad - \left(a \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} + b \frac{x_1 + x_2}{2} + c \right) = \\ &= \frac{1}{4} a (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \frac{1}{4} a (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{4} a d^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$A_1 = \frac{1}{2} d h_1 = \frac{1}{8} a d^3. \quad [1]$$

A parole:

L'area del triangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dal segmento $[P_1 P_2]$ ed avente come terzo vertice il punto M che ha come ascissa la semisomma delle ascisse di P_1 e P_2 , è dato da $1/8$ del prodotto del coefficiente a per il cubo della differenza $d = x_2 - x_1$ tra le ascisse dei punti P_1 e P_2 .

Una prima conseguenza interessante: fissata una parabola, il coefficiente a è fissato; dunque l'area del triangolo inscritto nel segmento parabolico dipende solo da d , lunghezza della proiezione del segmento stesso sull'asse delle ascisse.

In altri termini: data una parabola, due triangoli inscritti in segmenti parabolici a cui corrispondano proiezioni uguali delle due corde sull'asse delle ascisse hanno uguale area, sempre che il terzo vertice abbia come ascissa la semisomma delle ascisse dei due restanti vertici.

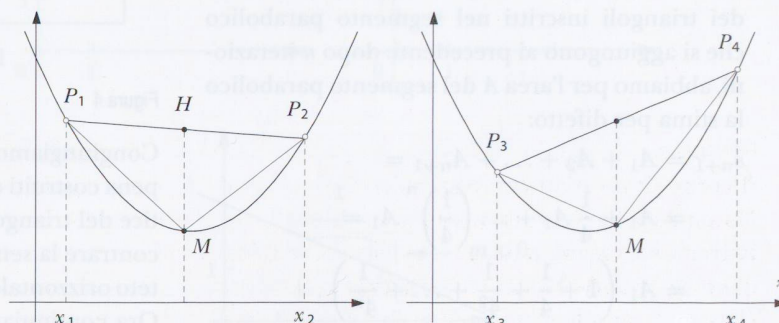


Figura 2

Abbiamo così costruito una prima stima dell'area A :

$$s_1 := A_1.$$

Una migliore approssimazione dell'area del segmento parabolico si ottiene sommando ad A_1 le aree dei due triangoli $P_1 M M_1$ e $P_2 M M_2$, costruiti sulle corde $P_1 M$ e $M P_2$ esattamente come abbiamo fatto in precedenza sulla corda $P_1 P_2$. In virtù della formula [1], ciascuno di questi due triangoli avrà area:

$$\frac{1}{8} a \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} A_1,$$

dunque la somma delle aree di tali triangoli varrà:

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1.$$

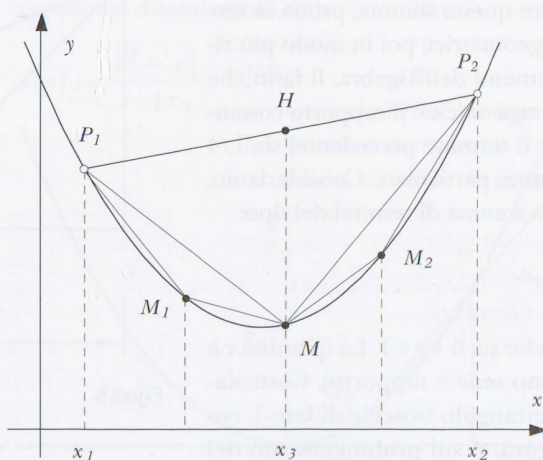


Figura 3

In definitiva la seconda approssimazione dell'area del segmento parabolico è:

$$s_2 := A_1 + A_2 = A_1 + \frac{1}{4} A_1 = A_1 \left(1 + \frac{1}{4} \right).$$

Evidentemente si può proseguire allo stesso modo, raddoppiando ad ogni iterazione il numero dei triangoli inscritti nel segmento parabolico che si aggiungono ai precedenti: dopo n iterazioni, abbiamo per l'area A del segmento parabolico la stima per difetto:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1} = \\ &= A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^n A_1 = \\ &= A_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right). \end{aligned}$$

A questo punto siamo tentati di dire che l'area A del segmento parabolico è il prodotto di A_1 per la somma dei termini entro parentesi tonde, se invece di prenderne un numero finito, sia esso $n+1$, ne prendiamo infiniti. La cosa è vera, ma bisogna intendersi sul significato dell'espressione «somma di infiniti termini». Siamo di nuovo di fronte al concetto di estremo superiore: la somma degli infiniti termini:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \quad [2]$$

è, per definizione, il più piccolo numero che non è superato da alcuna delle somme:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}.$$

Si tratta di sommare la cosiddetta *serie geometrica*, cioè di trovare il più piccolo numero che non è superato dalle somme di $n+1$ termini in progressione geometrica, come sono appunto le somme [2].

Vediamo di calcolare questa somma, prima in termini intuitivi, cioè geometrici, poi in modo più rigoroso, con gli strumenti dell'Algebra. Il fatto che nelle somme [2] la *ragione* (cioè il rapporto costante tra un termine e il termine precedente) sia $1/4$ non ha alcuna rilevanza particolare. Consideriamo, più in generale, una somma di termini del tipo:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

con la condizione che sia $0 < r < 1$. La quantità r è la ragione (dal latino *ratio* = rapporto). Costruiamo un triangolo rettangolo isoscele di lato 1, come mostrato in figura, e, sul prolungamento del cateto orizzontale, costruiamo un altro triangolo simile con i cateti lunghi r .

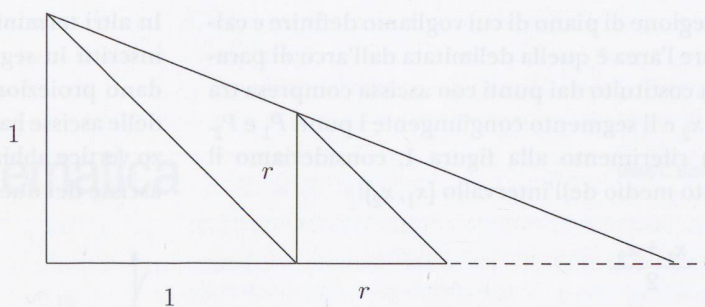


Figura 4

Congiungiamo ora i due vertici dei triangoli appena costruiti con una semiretta, a partire dal vertice del triangolo di cateti uguali ad 1, fino ad incontrare la semiretta ottenuta prolungando il cateto orizzontale del medesimo triangolo (figura 4). Ora continuiamo a costruire triangoli rettangoli isosceli, uno a fianco dell'altro, in modo che i cateti orizzontali siano sempre sulla stessa semiretta, e i vertici che sono gli estremi dei cateti verticali siano tutti allineati con i vertici analoghi dei due primi triangoli.

Considerazioni semplici sulla similitudine dei triangoli ci dicono che i cateti di questi triangoli rettangoli isosceli sono in progressione geometrica di ragione r , dunque valgono successivamente r^2, r^3, r^4, \dots

Se immaginiamo di poter proseguire indefinitamente questo procedimento, intuitivamente siamo condotti a dire che la somma di tutti i cateti orizzontali è uguale al cateto orizzontale del triangolo rettangolo che contiene tutti i triangoli costruiti.

La lunghezza di tale cateto orizzontale si calcola facilmente in base alla similitudine tra i triangoli in figura 5. Si ha:

$$x : 1 = (s - 1) : r \Leftrightarrow sr = s - 1 \Leftrightarrow 1 = s - sr = s(1 - r),$$

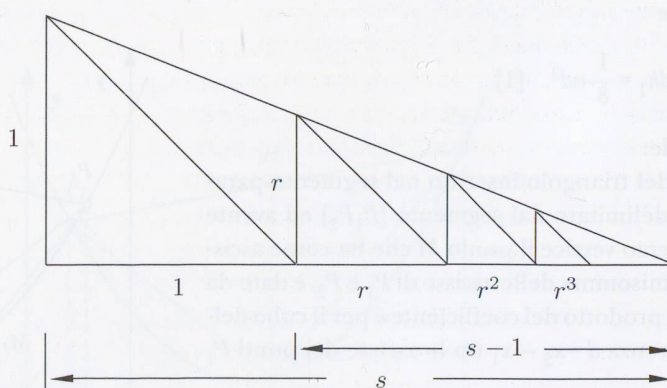


Figura 5

da cui finalmente: $s = \frac{1}{1 - r}$. [3]

Allo stesso risultato possiamo arrivare se ricordiamo che la somma di $n+1$ termini in progressione geometrica, di primo elemento 1 e ragione r , si scrive:

$$s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Se nell'ultima frazione trascuriamo l'addendo r^{n+1} otteniamo la quantità $1/(1-r)$ che dunque è maggiore di tutte le somme s_n . D'altra parte tale quantità è il minimo numero che non è superato da alcuna somma s_n ; basta considerare che, essendo $0 < r < 1$, le potenze r^n si possono rendere piccole quanto si vuole, a patto di prendere n convenientemente grande.

Tornando al nostro caso: la progressione geometrica ha ragione $r = 1/4$. Dunque il più piccolo numero che non è superato dalle aree s_n dei poligoni che abbiamo inscritto nel segmento parabolico è:

$$\begin{aligned} A &= A_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) = \\ &= A_1 \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3} A_1 = [4] \\ &= \frac{1}{6} ad^3. \end{aligned}$$

Fino a questo punto abbiamo supposto che sia $a > 0$, cioè la parabola rivolga la propria concavità verso l'alto; il risultato ottenuto sussiste anche se $a < 0$ (la parabola rivolge la propria concavità verso il basso): basta scrivere $|a|$ al posto di a :

$$A = \frac{1}{6} |a| d^3. \quad [4']$$

Teniamo presente che, se $a < 0$, allora il valore assoluto di a è l'opposto di a : $|a| = -a$. Verso la fine del nostro viaggio considereremo una parabola con il coefficiente $a < 0$.

La tangente al grafico di una funzione: la derivata

Il secondo problema di cui dobbiamo occuparci è quello del tracciamento della tangente al grafico cartesiano di un'assegnata funzione $y = f(x)$. Supponiamo di tracciare questo grafico rispetto un sistema monometrico ortogonale (niente paura: significa solo che gli assi sono tra loro perpendicolari e che si sceglie la stessa unità di misura sui due assi). Se $(x_0, f(x_0))$ sono le coordinate di un punto P_0 che appartiene al grafico di f , sappiamo che tutte le rette passanti per P_0 (con l'esclusione della parallela all'asse delle ordinate), sono date dalla formula:

$$y = y_0 + m(x - x_0); \quad [5]$$

il numero che ci interessa è m , il coefficiente angolare o pendenza della retta: esso ci indica di quanto

varia l'ordinata di un punto sulla retta quando l'ascissa viene aumentata di un'unità.

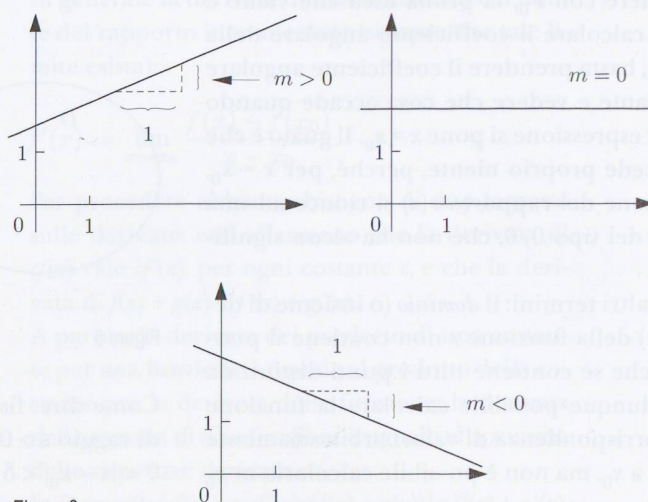


Figura 6

Noi vogliamo determinare m in modo tale che la retta rappresentata dalla [5], sia tangente al grafico di f ; questo particolare valore di m si chiama derivata della funzione f calcolata nel punto x_0 e si indica con il simbolo $f'(x_0)$.

Per rispondere al quesito che ci siamo posti occorre riflettere sul concetto di tangente ad una curva. Supponiamo ancora che la nostra curva sia una parabola, quella di equazione $y = f(x) = x^2$. Preso un punto x_0 , il corrispondente valore y_0 vale x_0^2 ; scegliamo sulla nostra parabola anche un secondo punto P di coordinate generiche $(x, y) = (x, x^2)$. Andiamo a scrivere l'equazione della secante che passa per P_0 e P ; il coefficiente angolare di tale secante è dato dal rapporto:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}.$$

Questo rapporto, fissato P_0 , dipende da P e dunque è anch'esso funzione di x . Trattandosi di un rapporto, chiamiamolo $r(x)$:

$$r(x) := \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}. \quad [6]$$

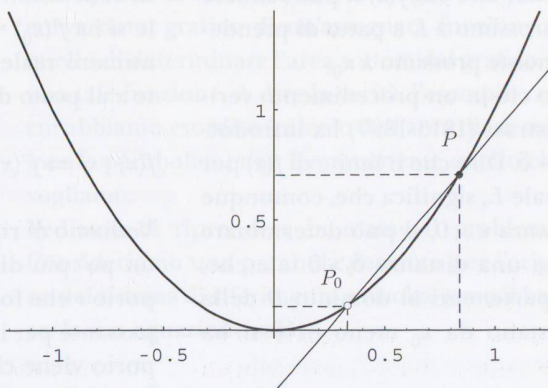


Figura 7

Dato che la tangente è la posizione limite che la secante assume quando il punto P viene portato a coincidere con P_0 , la prima idea che viene è che, per calcolare il coefficiente angolare della tangente, basta prendere il coefficiente angolare della secante e vedere che cosa accade quando nella sua espressione si pone $x = x_0$. Il guaio è che non succede proprio niente, perché, per $x = x_0$, l'espressione del rapporto $r(x)$ si riduce ad una scrittura del tipo $0/0$, che non ha alcun significato.

Detto in altri termini: il *dominio* (o insieme di definizione) della funzione r non contiene il punto x_0 , anche se contiene tutti i punti distinti da esso. È dunque possibile calcolare la funzione $r(x)$ in corrispondenza di valori arbitrariamente prossimi a x_0 , ma non è possibile calcolarla in x_0 stesso.

La situazione sembra disperata, se non fosse che un po' di algebra elementare viene in nostro aiuto. Vediamo se è possibile trovare un'espressione equivalente al secondo membro della [6] per $x \neq x_0$, ma un'espressione che abbia senso anche per $x = x_0$; il valore di tale espressione per $x = x_0$ potrebbe essere quello che noi cerchiamo.

Ora non c'è bisogno di sapere molta matematica per ricordare il prodotto notevole $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$; dunque la [6] si scrive anche:

$$r(x) := \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0. \quad [6']$$

L'ultima espressione è definita anche per $x = x_0$; essa vale $2x_0$.

Vediamo se questo è il valore giusto: quanto più x è prossimo a x_0 tanto più $r(x) = x + x_0$ è prossimo a $2x_0$. Qui siamo di fronte ad un altro concetto base dell'Analisi: il concetto di *limite* di una funzione.

Dire che una funzione $f(x)$ tende ad un certo limite L quando x tende ad un valore x_0 non vuole dire che $f(x_0) = L$ (anche se non si esclude che ciò possa accadere); vuol dire che $f(x)$ si può rendere arbitrariamente prossimo a L a patto di prendere x convenientemente prossimo a x_0 .

Per tradurre tutto ciò in un procedimento verificabile, K. Weierstrass (1815-1897) ha introdotto la notazione $\epsilon - \delta$. Dire che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 vale L , significa che, comunque si fissi una tolleranza $\epsilon > 0$, si può determinare in corrispondenza una distanza $\delta > 0$ tale che, per gli $x \neq x_0$ appartenenti al dominio D della funzione, che distano da x_0 meno di δ si ha $|f(x) - L| < \epsilon$.

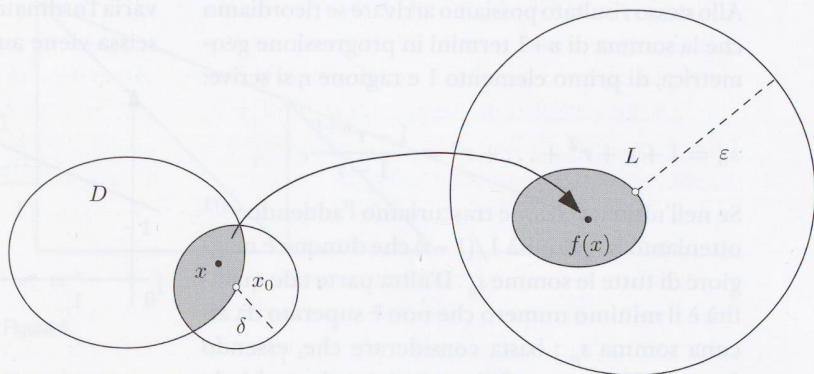


Figura 8

Come dire: fissiamo un bersaglio centrato in L di raggio $\epsilon > 0$: se a partire da tutti gli x per cui $0 < |x - x_0| < \delta$ i valori $f(x)$ «colpiscono» il bersaglio, nel senso che $|f(x) - L| < \epsilon$, allora diciamo che il limite è L e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Attenzione all'ordine con cui si scelgono le cose: prima si sceglie ϵ (cioè il bersaglio), poi δ (cioè il controllo); ci aspettiamo che, quanto più piccolo è il bersaglio, tanto più piccolo sarà il raggio dell'insieme di controllo.

Perché la definizione precedente abbia senso occorre che esistano $x \neq x_0$ in cui la f è definita, prossimi tanto quanto si vuole a x_0 (in termini tecnici questo si esprime dicendo che x_0 è *punto di accumulazione* del dominio di f), mentre l'eventuale valore della f nel punto x_0 non influenza il limite della stessa funzione.

Torniamo al nostro rapporto $r(x)$; poiché $r(x) = x + x_0$, se vogliamo che sia:

$$|r(x) - 2x_0| = |x + x_0 - 2x_0| = |x - x_0| < \epsilon$$

occorre e basta che sia $|x - x_0| < \delta = \epsilon$, cioè basta prendere il raggio dell'insieme di controllo uguale al raggio del bersaglio.

In conclusione: se $f(x) = x^2$, allora per ogni x_0 reale si ha $f'(x_0) = 2x_0$. Dato che x_0 è un qualunque numero reale, possiamo scrivere semplicemente x al posto di x_0 e scrivere:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad [7]$$

Vediamo di ripetere il calcolo con una funzione un po' più difficile: $f(x) = x^3$. Scriviamo il rapporto r che fornisce la pendenza di una secante passante per i punti di ascisse x_0 e x ; questo rapporto viene chiamato *rapporto incrementale* della funzione f . Nel nostro caso:

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}.$$

Se dividiamo $x^3 - x_0^3$ per $x - x_0$ (ad esempio usando la regola di Ruffini), troviamo $x^2 + x_0x + x_0^2$. Dunque:

$$r(x) = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = x^2 + x_0x + x_0^2.$$

L'ultima espressione vale $3x_0^2$ per $x = x_0$. Vediamo se riusciamo a verificare il test $\varepsilon - \delta$ di Weierstrass. Dobbiamo verificare che la differenza $r(x) - 3x_0^2$ si può rendere in valore assoluto inferiore ad una qualsivoglia tolleranza prefissata, a patto di prendere x abbastanza vicino a x_0 . Ora si ha:

$$r(x) - 3x_0^2 = x^2 + x_0x + x_0^2 - 3x_0^2 = x^2 + x_0x - 2x_0^2. \quad [8]$$

Se $x_0 = 0$, i giochi sono presto fatti: il secondo membro di [8] si riduce a x^2 e si ha $x^2 < \varepsilon$ se e solo se $|x| < \sqrt{\varepsilon}$; dunque $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Supponiamo dunque $x_0 \neq 0$. Dalla [8] segue:

$$\begin{aligned} r(x) - 3x_0^2 &= x^2 + x_0x - 2x_0^2 = \\ &= x^2 - x_0^2 + x_0x - x_0^2 = \\ &= (x - x_0)(x + x_0) + x_0(x - x_0) = \\ &= (x - x_0)(x + 2x_0). \end{aligned}$$

Prendiamo i valori assoluti, e ricordiamo che il valore assoluto della somma non supera la somma dei valori assoluti:

$$|r(x) - 3x_0^2| = |x - x_0| |x + 2x_0| \leq |x - x_0| (|x| + 2|x_0|).$$

A noi interessano i valori di x prossimi a x_0 , dunque non è restrittivo limitarsi a considerare gli x per cui $|x| \leq 2|x_0|$. Per questi x abbiamo:

$$|r(x) - 3x_0^2| \leq 4|x_0| |x - x_0|$$

L'ultima quantità è minore di ε per:

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4|x_0|}.$$

In conclusione: $\delta = \varepsilon / (4|x_0|)$. Dunque tutto quadrato, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 3x_0^2,$$

o anche, scrivendo semplicemente x al posto di x_0 ,
 $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad [9]$

La [7] e la [9] sono casi particolari di un risultato generale: per ogni naturale $n \geq 1$, la derivata di $f(x) = x^n$ vale nx^{n-1} .

In formula:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

In generale la derivata di una funzione f è il limite del rapporto incrementale (sempre che tale limite esista):

$$f'(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per procedere abbiamo bisogno di due teoremi sulle derivate: essi affermano che la derivata di $cf(x)$ vale $cf'(x)$, per ogni costante c , e che la derivata di $f(x) + g(x)$ è $f'(x) + g'(x)$.

A parole: la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione; la derivata della somma di due funzioni è uguale alla somma delle rispettive derivate.

In formula: $(cf(x))' = cf'(x)$; $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. Questi due risultati seguono dal fatto che i rapporti incrementali delle funzioni considerate si scrivono:

$$\frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e rispettivamente:

$$\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Sarebbe bello se anche la derivata del prodotto di due funzioni fosse uguale al prodotto delle derivate: ciò è falso, ma dato che nel seguito non ci serve l'espressione della derivata del prodotto di due funzioni, tralasciamo questo argomento.

Il teorema fondamentale del Calcolo

Fino a questo momento ci siamo occupati dei due problemi fondamentali dall'Analisi Matematica: quello di determinare la tangente ad una curva data, grafico di un'assegnata funzione, e quello di determinare l'area sottesa dal grafico di una tale funzione. A dire la verità, l'esempio con cui abbiamo esordito (calcolo dell'area di un segmento parabolico) non è esattamente quello che vogliamo.

Vediamo di riprendere in esame il problema. Consideriamo una parabola passante per l'origine del sistema di riferimento e rivolta verso il basso: la sua equazione sarà:

$$y = f(x) = ax^2 + bx, \quad a < 0.$$

Tale parabola incontra l'asse delle x , oltre che nell'origine, nell'ulteriore punto $x_1 = -b/a$. Supponiamo che b sia positivo, in modo che x_1 sia anch'esso positivo, in quanto rapporto tra i numeri positivi b e $-a$. In figura 9 è rappresentata la parabola di equazione $y = -2x^2 + 3x$; tutto quello che diremo vale quali che siano i coefficienti a e b , purché siano negativo il primo, positivo il secondo.

Se vogliamo calcolare l'area del segmento parabolico individuato dall'asse delle ascisse, cioè quello che ha come corda il segmento che congiunge l'origine col punto $(x_1, 0)$, abbiamo la formula [4¹] pronta allo scopo: basta scrivere al posto di d il valore $x_1 = -b/a$.

Questo problema è un po' troppo facile; vediamo uno più difficile. Scegliamo un valore qualunque x_0 compreso tra 0 e x_1 : $0 \leq x_0 \leq x_1$; vogliamo trovare l'area della regione di piano che è delimitata dall'asse delle ascisse e dal grafico della funzione f compreso nell'intervallo $[0, x_0]$, cioè la regione che è delimitata a destra dalla retta $x = x_0$. Esaminiamo la figura 9; la regione di cui vogliamo calcolare l'area è l'unione del segmento parabolico delimitato dalla corda che congiunge l'origine col punto $(x_0, f(x_0))$ e del triangolo di vertici l'origine e i punti $(x_0, 0)$ e $(x_0, f(x_0))$, ombreggiato in figura 9.

L'area di questo triangolo vale:

$$\frac{1}{2} x_0 \cdot f(x_0) = \frac{1}{2} x_0 (ax_0^2 + bx_0) = \frac{1}{2} ax_0^3 + \frac{1}{2} bx_0^2.$$

Quanto all'area del segmento parabolico, abbiamo pronta la formula [4¹]; tale area vale:

$$\frac{1}{6} |a|d^3 = -\frac{1}{6} ax_0^3,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $|a| = -a$, a essendo negativo.

In conclusione l'area della regione che a noi interessa vale:

$$-\frac{1}{6} ax_0^3 + \frac{1}{2} ax_0^3 + \frac{1}{2} bx_0^2 = \frac{1}{3} ax_0^3 + \frac{1}{2} bx_0^2.$$

Quest'area dipende dalla scelta di x_0 , cioè è una funzione di x_0 . Se scriviamo semplicemente x al posto di x_0 , abbiamo il seguente risultato: l'area compresa tra l'asse delle ascisse e la parabola in esame, relativamente alle ascisse comprese tra 0 e x , si scrive:

$$A(x) := \frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2. \quad [9]$$

Abbiamo costruito una funzione della variabile x a partire dalla funzione $f(x)$: è abbastanza naturale

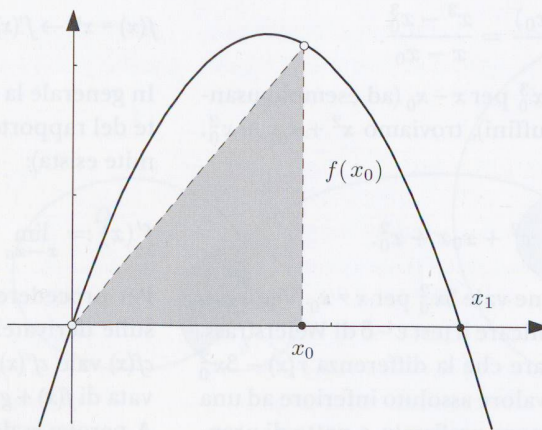


Figura 9

chiedersi se esista un legame tra queste due funzioni.

Proviamo a calcolare la derivata della funzione $A(x)$: ricordando i due teoremi sulle derivate che abbiamo enunciato al termine del paragrafo precedente, abbiamo:

$$A'(x) = \frac{1}{3} a 3x^2 + \frac{1}{2} b 2x = ax^2 + bx.$$

Miracolo: abbiamo ritrovato la funzione $f(x)$ da cui eravamo partiti:

$$A'(x) = f(x).$$

Sembra dunque che, data una funzione f , che possiamo supporre non negativa e definita su un intervallo $[x_0, x_1]$, per costruire un'altra funzione che abbia come derivata proprio la f di partenza, basti procedere in questo modo: calcolare l'area della regione di piano compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione f , relativamente ai punti le cui ascisse sono comprese tra x_0 e x : si ottiene una funzione di x , sia $A(x)$, che fa al caso nostro.

Naturalmente l'esempio precedente non prova proprio nulla, ma è, per così dire, un buon indizio.

In effetti i pionieri del calcolo infinitesimale, soprattutto E. Torricelli (1608-1647) e I. Barrow (1630-1677), che abbiamo citato all'inizio del nostro discorso, avevano intravisto, basandosi su esempi semplici proprio come abbiamo fatto noi, che i due problemi apparentemente così lontani, quello di calcolare l'area sotto il grafico di una funzione e quello di derivare una funzione (cioè trovare la pendenza di una tangente al grafico della stessa funzione) sono in realtà uno l'inverso dell'altro.

Il trucco è quello di pensare non ad un'area fissa, ma ad un'area che sia funzione del secondo

estremo dell'intervallo $[x_0, x]$ su cui si proietta la regione che noi consideriamo.

L'operazione con cui si calcola l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione va sotto il nome di *integrazione*, secondo una terminologia introdotta da G.W. Leibniz (1646-1716). Sempre limitandoci a considerare funzioni non negative, abbiamo che l'area della regione compresa tra l'asse delle ascisse, il grafico di f e le rette $x = x_0$ e $x = x_1$ si indica col simbolo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx,$$

che si legge «integrale di $f(x)$ in dx per x da x_0 a x_1 ». Il simbolo di integrale non è altro che una *esse* allungata, iniziale della parola latina *summa*, cioè somma. Leibniz, in ciò influenzato da B. Cavalieri (1598-1647), considerava la regione più volte considerata come «somma» di infinite strisciole parallele all'asse delle ordinate, ciascuna della quali ha una base «infinitesima» dx e l'altezza $f(x)$.

Con i simboli introdotti da Leibniz e tuttora in uso, abbiamo:

$$A(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

dove abbiamo usato una lettera diversa da x per indicare la variabile indipendente della funzione f per non confonderla con l'estremo superiore dell'intervallo su cui essa viene «integrata».

Il teorema fondamentale del calcolo dice che per le funzioni f «abbastanza regolari» (ad esempio per tutte le funzioni elementari: polinomi, logaritmi, esponenziali, funzioni circolari ecc.) si ha che:

$$A'(x) = f(x)$$

Un'idea della dimostrazione si ottiene se si scrive il rapporto incrementale della funzione $A(x)$. Indichiamo con x e $x+h$ i due punti in cui viene calcolata la funzione A e supponiamo, per semplicità, $h > 0$. Allora $A(x+h) - A(x)$ rappresenta l'area sotto il grafico di f relativa all'intervallo $[x, x+h]$, in quanto si tratta della differenza tra le aree relative agli intervalli $[x_0, x+h]$ e $[x_0, x]$ (Fig. 10). Ne viene che per il rapporto incrementale della funzione A :

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

cioè il rapporto tra l'area relativa all'intervallo $[x, x+h]$ e la «base» h della regione considerata. Se h è «molto piccolo» questa area non è troppo diversa dal prodotto $h \cdot f(x)$ (base per altezza), e quindi:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x).$$

Il ragionamento precedente, opportunamente «ripulito», diventa una vera dimostrazione.

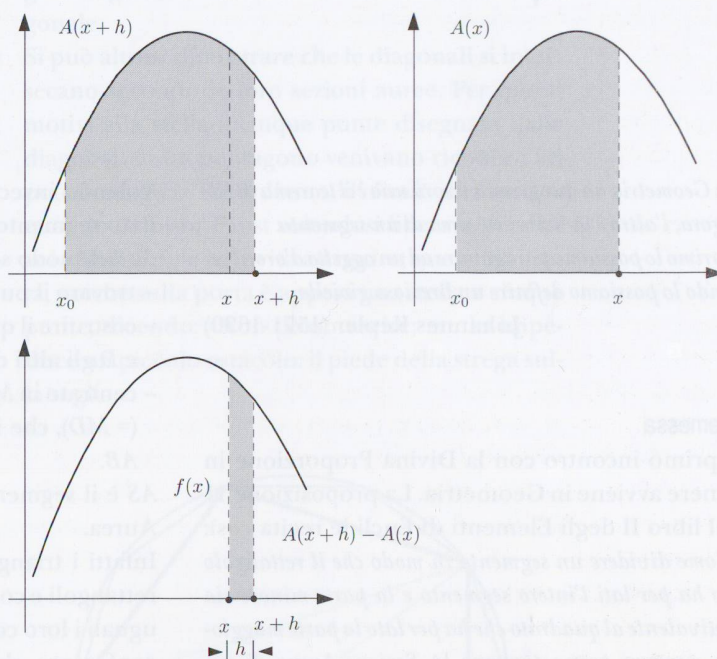


Figura 10

Il cerchio è chiuso: se si integra una funzione su un intervallo che ha un estremo fisso e il secondo estremo variabile (chiamiamolo x) si ottiene una funzione che, derivata rispetto a tale estremo variabile, restituisce la funzione di partenza.

P.S. Le idee presentate in questa nota sono sviluppate nel testo.

Bibliografia

- G. C. Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli (Bologna), 1998
- Per materiali complementari, programmi di calcolo, Errata Corrigé ecc., si vedano i siti:
- <http://ciram.unibo.it/~barozzi/PCAMElencocompl.html>
- <http://ciram.unibo.it/~barozzi/Mathematicahttp>
- www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/interventi/MatheMath/MatheMath.htm

* Prof. Dr. Giulio C. Barozzi, Università di Bologna