Zeitschrift: Archi : rivista svizzera di architettura, ingegneria e urbanistica = Swiss review of architecture, engineering and urban planning

Herausgeber: Società Svizzera Ingegneri e Architetti

Band: - (2006)

Heft: 1

Artikel: La Divina Proporzione

Autor: Di Rienzo, Erman

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-133430

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La Divina Proporzione

Erman Di Rienzo

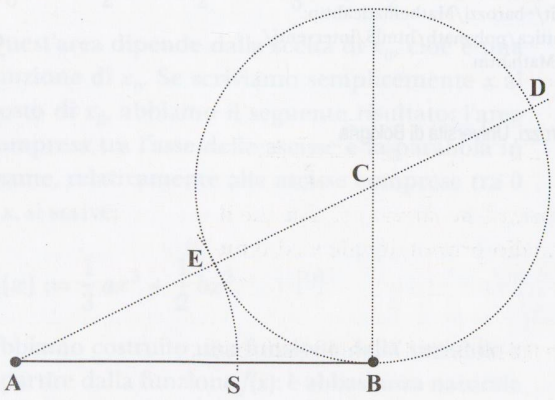
La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la Sezione Aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.

Johannes Kepler (1571-1630)

Premessa

Il primo incontro con la Divina Proporzione in genere avviene in Geometria. La proposizione 11 del libro II degli Elementi di Euclide recita così: «*Come dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore*», ovvero come trovare la *Sezione Aurea* di un segmento, cioè la parte media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente. La costruzione è tra le più classiche della Geometria: dato il segmento AB tracciare il cerchio di pari diametro e tangente ad esso in B, quindi la secante per A passante per il centro C del cerchio. La parte esterna della secante (AE) è la sezione aurea del segmento, essendo la tangente (AB) media proporzionale tra l'intera secante (AD) e la sua parte esterna (AE) [Euclide L. III - P. 36], essendo $ED = AB$ e per alcune proprietà delle proporzioni:

$$AD : AB = AB : AE \rightarrow$$
$$\rightarrow (AD - AB) : AB = (AB - AE) : AE \rightarrow$$
$$\rightarrow AS : AB = SB : AS \rightarrow$$
$$\rightarrow AB : AS = AS : SB$$



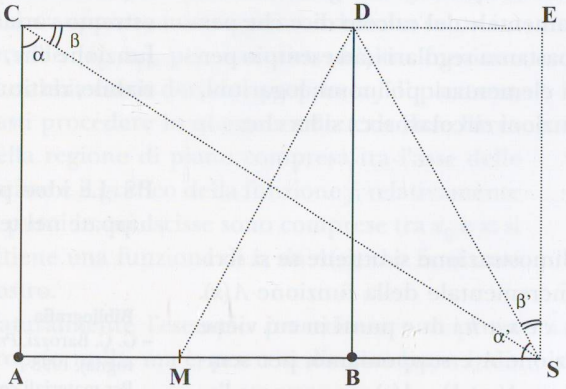
Volendo invece trovare quel segmento di cui un dato segmento AB sia la Sezione Aurea, si procede nel modo seguente:

- trovare il punto medio M del segmento dato;
- costruire il quadrato sul segmento dato; siano C e D gli altri due vetrici;
- centrato in M tracciare il cerchio con raggio MC (= MD), che interseca in S il prolungamento di AB.

AS è il segmento cercato, di cui AB è la Sezione Aurea.

Infatti i triangoli CAS e SBD sono simili perché rettangoli e con gli angoli α ed α' uguali (essendo uguali i loro complementari β e β', angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco DS); quindi i cateti sono in proporzione:

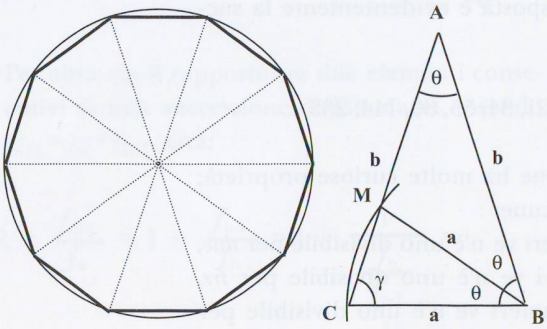
$$AS : DB = CA : BS \rightarrow AS : AB = AB : (AS - AB) \quad \text{c.v.d.}$$



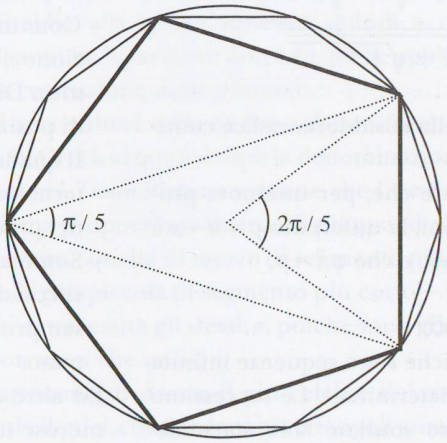
Ma cos'ha di così importante questa sezione per meritarsi l'aggettivo «Aureo»? Lo scopriremo attraverso le sue proprietà. Restando nella Geometria ne ricaviamo immediatamente una: «*Ogni segmento è sezione aurea della sua somma con la sua sezione aurea*»; ed in effetti questo è quanto sopra si è dimostrato. Ne segue che: «*Tolta la sezione aurea la parte rimanente di un segmento è la sezione aurea della sezione aurea del segmento*». È come se la sezione aurea si autorigenerasse per sottrazione o addizione.

Ma scopriamone altre caratteristiche. Sempre in

Geometria una delle più importanti caratteristiche della Sezione Aurea è la seguente: «*Se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato allora l'angolo al vertice è un quinto dell'angolo piatto, ovvero la base è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio che ha per raggio il lato*».



La dimostrazione è relativamente semplice: nel triangolo *CAB* isoscele sulla base *a*, sezione aurea del lato *b*, si individui per costruzione il punto *M* sul lato *AC* tale che *MB* = *CB*; il triangolo *MBC* è isoscele e simile al triangolo originario, quindi con i lati in proporzione:
$b : a = a : CM$. Ma essendo *a* la sezione aurea di *b* sarà: $b : a = a : (b\text{-}a)$, da cui per l'unicità del quarto proporzionale sarà: $CM = (b\text{-}a)$, da cui $AM = a$; quindi anche il triangolo *AMB* è isoscele avendo $AM = BM = a$; gli angoli alla sua base sono pertanto uguali e l'angolo in *M* è uguale a $\pi - 2 \times \theta$. Ne segue che $\gamma = 2 \times \theta$; quindi, essendo $\theta + 2 \times \gamma = \pi$, sarà $\theta + 4 \cdot \theta = \pi$, cioè $5 \cdot \theta = \pi$ quindi $\theta = \pi / 5$; ma essendo $\pi / 5$ un decimo dell'angolo giro, ne discende che la base del triangolo è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio che ha per raggio il lato.
È vero anche l'inverso, cioè «*se in un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di* $\pi/5$ *allora la base è la sezione aurea del lato*». Se infatti nel triangolo *CAB* isoscele sulla base *a* l'angolo al vertice è di $\pi/5$, essendo la somma degli angoli interni pari a π ed essendo gli angoli alla base uguali, questi saranno di $2 \cdot \pi / 5$. Individuando per costruzione il punto *M* sul lato *AC* tale che *MB* = *CB*, ne segue che il triangolo *MBC* è isoscele e simile al triangolo originario quindi con i lati in proporzione:
$AC : CB = CB : MC$.
Anche il triangolo *BMA* sarà isoscele avendo gli angoli alla base *AB* uguali; sarà quindi: $MA = MB = CB$, e quindi: $MC = (AC - MA) = (AC - CB)$, che sostituita nella proporzione precedente verifica che la base *CB* è la sezione aurea del lato *AC*.
Collegando alternativamente i vertici del decagono si ottiene il pentagono regolare inscritto nel cerchio; tracciatone due diagonali dallo stesso vertice, essendo l'angolo alla circonferenza metà di quello al centro di $2\pi/5$, si ripropone con il lato opposto al vertice il triangolo isoscele con angolo al vertice di $\pi/5$; ne segue che in un pentagono regolare il lato è la sezione aurea della diagonale.
Si può altresì dimostrare che le diagonali si intersecano secondo le loro sezioni auree. Per questi motivi alla stella a cinque punte disegnata dalle diagonali di un pentagono venivano riconosciuti poteri magici. Ricordiamo il *Faust* di Goethe: quando il dottor Faust volendosi liberare del diavolo Mefistofele lo invita ad uscire, questi si rifiuta, poiché sulla porta è appesa una stella a cinque punte, dicendo: «Non posso uscire; me lo impedisce un piccolo ostacolo: il piede della strega sulla soglia».



In Matematica

Per analogia con la Geometria, dato un numero *u* trattasi di trovare il medio proporzionale *x* tra il numero dato e la sua differenza *u-x* con questo medio proporzionale; in pratica trattasi di risolvere l'equazione:

$u : x = x : (u - x)$ ovvero $x^2 = u^2 - ux$
quindi $x^2 + ux - u^2 = 0$

Che ha due soluzioni:

$$x_1 = u\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad x_2 = -u\,\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

scartando la soluzione negativa si ricava che il rapporto tra il medio proporzionale *x* ed il numero *u* vale:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi = 0{,}6180339887498948482045 86...$$

che ovviamente è un numero irrazionale (ma non trascendente). Viceversa il rapporto tra il medio proporzionale x ed il numero u vale:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$= \Phi = 1{,}6180339887498948482045 86...$

La denominazione di *Rapporto Aureo* viene talora data alla prima (φ), talora alla seconda (Φ). È facile mostrare che tra le due vale la relazione: $\Phi = 1 + \varphi$.

Vale altresì la relazione:

$$\Phi^2 = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$$

ovvero: $\Phi = \Phi^2 - 1$

quindi: $\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \ldots$

$$= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Cioè Φ ha il valore della cosiddetta radice continua.

È facile anche mostrare che, per una nota proprietà delle proporzioni, la differenza $\rho = u - x$ è in rapporto aureo con x, e che $\varphi^2 = \rho$.

La successione di Fibonacci

Le successioni numeriche sono sequenze infinite di numeri, casuali o determinati. Le successioni casuali possono essere studiate solo statisticamente. Le successioni determinate sono quelle nelle quali è stabilita una regola che determina il valore di ogni elemento data la sua posizione nella successione.

Le più classiche successioni determinate sono le progressioni aritmetiche (quelle nelle quali ogni elemento è ottenuto dal precedente sommandogli un numero fisso detta ragione) e quelle geometriche (nelle quali ogni elemento è ottenuto dal precedente moltiplicato per un numero fisso, detto anche qui ragione).

Altri esempi di successioni determinate sono quelle nelle quali ogni elemento è funzione della sua posizione.

Tra le successioni determinate vi sono le ricorrenti, quelle nelle quali ogni elemento è funzione dei precedenti. La successione di Fibonacci è una successione ricorrente di numeri naturali: dati in qualsivoglia modo i primi due elementi, ogni altro elemento è la somma dei due precedenti. Ad ogni coppia di elementi iniziali corrisponde quindi una successione differente.

In verità la successione di Fibonacci fu da questi definita assumendo il numero 1 per i primi due elementi; la successione infatti rispondeva al seguente problema: «*Quante coppie di conigli ci saranno dopo n mesi a partire da un'unica coppia immatura, se ogni coppia diventa matura per la procreazione dopo un mese dalla nascita e genera ogni mese una nuova coppia?*» La risposta è evidentemente la successione:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Questa successione ha molte curiose proprietà; ne riportiamo alcune:

- Ogni *due* numeri ve n'è uno divisibile per *due*, ogni *tre* numeri ve n'è uno divisibile per *tre*, ogni *quattro* numeri ve n'è uno divisibile per *cinque*, ..., ogni *n* numeri vi è o un numero primo o un numero divisibile per lo stesso numero primo.
- Comunque si prendano due elementi, in posizione *n*-esima ed *m*-esima, il loro Massimo Comun Divisore è un elemento della successione di posizione *p*, M.C.D. tra *n* ed *m*.
- Il quadrato di ogni elemento *differisce* di *uno* (alternativamente in più o in meno) dal prodotto del precedente per il successivo.
- Sommando alternativamente gli elementi della successione (uno sì ed uno no) il risultato è sempre l'elemento successivo all'ultimo sommato.

Ed altre ancora per le quali si rimanda alle numerose trattazioni specifiche sull'argomento. Ma sopra tutte ha rilevanza la proprietà che segue, che mette in relazione la successione con il Rapporto Aureo.

La successione di Fibonacci è divergente (tende all'infinito al crescere di n) ma il rapporto tra un qualsiasi elemento f_n ed il precedente f_{n-1} tende a Φ al tendere di n all'infinito cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi$$

ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \varphi$$

Infatti per la proprietà di Φ per cui:

$$\Phi = 1 + \varphi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

si ha:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} =$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} = \ldots$$

Per altra via il rapporto tra due elementi consecutivi di una successione di Fibonacci, essendo $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, sarà:

$$R = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2}}{f_{n-3}}}}} = \ldots$$

al tendere quindi di n all'infinito, anche il rapporto tra due elementi consecutivi di una successioni di Fibonacci tende alla frazione continua cioè a Φ.

1a Successione		2a Successione	
f_n	f_n/f_{n-1}	f_n	f_n/f_{n-1}
1		27	
1	1,00000000	33	1,22222222
2	2,00000000	60	1,81818182
3	1,50000000	93	1,55000000
5	1,66666667	153	1,64516129
8	1,60000000	246	1,60784314
13	1,62500000	399	1,62195122
21	1,61538462	645	1,61654135
34	1,61904762	1044	1,61860465
55	1,61764706	1689	1,61781609
89	1,61818182	2733	1,61811723
144	1,61797753	4422	1,61800220
233	1,61805556	7155	1,61804613
377	1,61802575	11577	1,61802935
610	1,61803714	18732	1,61803576
987	1,61803279	30309	1,61803331
1597	1,61803445	49041	1,61803425
2584	1,61803381	79350	1,61803389
4181	1,61803406	128391	1,61803403
6765	1,61803396	207741	1,61803397
...	...	...	...

Il rapporto converge molto rapidamente e dopo alcuni elementi approssima già ottimamente Φ

Non avendo utilizzato ipotesi sui primi due numeri questa proprietà vale per ogni successione di Fibonacci, cioè qualunque siano i primi due numeri. Lo verifichiamo per la successione originaria e per una generalizzata, assumendo per i primi due elementi casualmente i numeri 27 e 33.

Il rapporto Aureo nell'Arte e in Natura

Il Rapporto Aureo ha avuto ed ha ancora grandi applicazioni nei progetti dell'uomo.
Storicamente le prime applicazioni del Rapporto Aureo risalgono agli antichi Egizi. Nella stele del re Get, proveniente da Abido (antica capitale dell'Egitto nel periodo predinastico) ed oggi al Louvre, si osserva al centro un rettangolo aureo, nella cui parte bassa il quadrato costruito sul lato più corto, sezione aurea di quello più lungo, contiene la città mentre nella parte rimanente, che per quanto visto sopra è ancora un rettangolo aureo, è riportato il serpente simbolo del re. Il reperto risalirebbe alla prima dinastia, quindi a quasi 5000 anni fa. La sezione aurea fu anche applicata nella costruzione delle piramidi.
Ma i veri cultori della Sezione Aurea furono gli antichi Greci, ai quali si deve la denominazione di aurea: nel *Timeo* Platone sostiene che i tre termini di una proporzione divina - il più grande (la linea intera), quella di mezzo (il segmento più lungo) e la più piccola (il segmento più corto) - sono «tutti di necessità gli stessi, e, poiché sono gli stessi, non sono che uno».
Il Partenone di Atene, il più celebre dei monumenti ellenici, contiene molti rettangoli aurei. Ne deriva un aspetto armonico, che ispira una profonda sensazione di equilibrio. Il simbolo Φ è stato dato al Rapporto Aureo proprio in onore del grande Fidia, progettista dell'opera, che ne fece un canone estetico.
Ma il vero trionfo della sezione aurea nell'arte si ebbe nel Rinascimento quando rappresentò per tutti gli artisti di quel periodo un canone di bellezza cui ispirasi per ogni composizione artistica dall'architettura alla scultura, alla pittura. Più di tutti contribuì a questa concezione l'opera di Luca Pacioli «La Divina Proportione», stampata e diffusa in tutta Europa, incentrata proprio sulla proporzione come chiave universale per penetrare i segreti della bellezza ma anche della natura; ed al centro è collocato l'uomo, misura di ogni cosa, sospeso tra un quadrato ed un cerchio nell' «Uomo Vitruviano», il celebre disegno di Leonardo. E tra tutte le possibili proporzioni, quella aurea sembra essere la vera ispiratrice della bellezza, quindi del creato, quindi del Suo creatore, quindi Divina.

In effetti la proporzione aurea sembra trasmettere un senso di armonico equilibrio; è stata condotta una ricerca mostrando a più persone vari rettangoli con diversi rapporti tra i lati, chiedendo poi di indicare quale rettangolo avesse destato in loro una maggiore sensazione di armonia; la preferenza per il rapporto aureo ha confermato l'intuizione degli antichi artisti. I teorici dell' arte parlano del rapporto aureo come rispondente ad un principio di «simmetria dinamica».

Anche la musica non sfugge al fascino del rapporto aureo. Anzitutto le note: una scala completa (compreso il Do della scala successiva) si compone di 5 diesis e 8 note, per un totale di 13 toni, e questi sono numeri di Fibonacci. Quindi il rapporto tra i toni dei Do di due scale successive è 2/1, il rapporto tra il tono di Do e quello di Sol è con ottima approssimazione 2/3 (per la precisione 0,7491..., la famosa *diapente* greca), il rapporto tra il Do ed il Fa è con buona approssimazione 3/5 (precisamente 0,6674..., detta *sesta maggiore*) ed il rapporto tra il Mi ed il Do successivo (Do_2), è circa 5/8 (per la precisione 0,629..., detta *sesta minore*, complementare della *terza maggiore* Do-Mi), e così via; e questi sono rapporti tra numeri di Fibonacci. Infine un ambiente d'ascolto, ma anche una cassa acustica, minimizzerà le risonanze se le dimensioni sono in rapporto aureo tra loro.

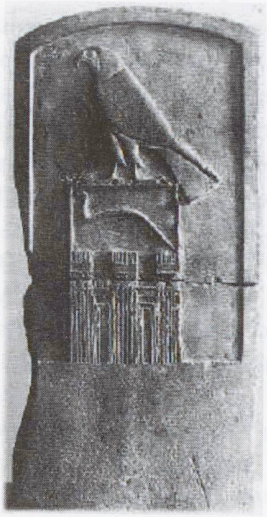
Ancora oggi la sezione aurea è ampliamente utilizzata: le dimensioni standard di carte di credito, tessere telefoniche, badge per ogni applicazione, corrispondono (salvo tolleranze di fabbricazione) al rettangolo aureo.

Ma la sezione aurea si insinua anche nei regni della Natura e, come «e» e «π», Φ è uno di quei misteriosi numeri naturali che sembrano essere alla base della struttura del cosmo.

Uno dei più classici esempi è il Nautilus, un mollusco dei mari tropicali; la sua conchiglia, sezionata, è una spirale aurea. Tra l'altro il Nautilus viene considerato letteralmente un fossile vivente, essendo la sua specie antichissima; ha avuto quindi tutto il tempo per perfezionarsi; che sia nel perfetto equilibrio delle sue forme il segreto di tanta longevità?

Anche nel corpo umano troviamo rapporti aurei: l'ombelico è posto ad un'altezza che è in rapporto aureo con quella dell'individuo con una tolleranza di qualche percento.

Ma è nei fiori, più che altrove, che la natura ha voluto ricordarci la sua sapienza matematica. Le varie specie di margherite e girasoli hanno petali in numero della successione di Fibonacci che abbiamo visto legata al rapporto aureo.



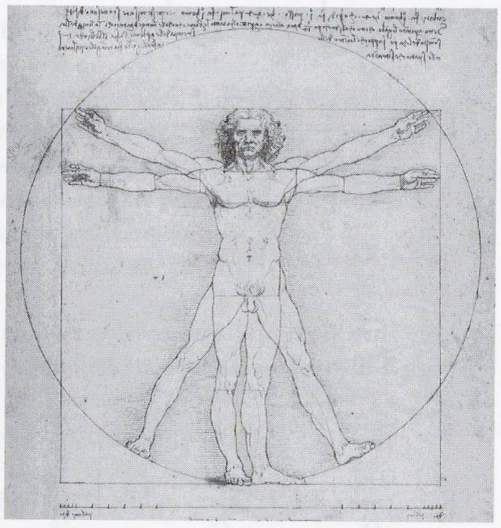


Fig. 1 – Stele del Re Get, Louvre, Parigi
Fig. 2 – Uomo Vitruviano, Leonardo da Vinci

Le curve che si osservano in pigne ed ananas sono spirali logaritmiche, legate anch'esse alla sezione aurea.

Ed ancora secondo spirali logaritmiche si succedono gli stami nelle corolle di margherite e girasoli.

Nel firmamento molte galassie hanno forma a spirale. Osservando attentamente le spirali sono logaritmiche; è presumibile che tali siano le traiettorie delle stelle attratte al centro della galassia. Ma quale forza imprime una tale traiettoria dal momento che tutte le forze a noi note comportano solo traiettorie coniche (ellissi, parabole o iperboli)?

Ma questi sono temi di altre discipline.

* Prof. Dr. Erman Di Rienzo