Zeitschrift: Archi : rivista svizzera di architettura, ingegneria e urbanistica = Swiss review of architecture, engineering and urban planning

Herausgeber: Società Svizzera Ingegneri e Architetti

Band: - (2006)

Heft: 2

Artikel: Gruppi di trasformazioni

Autor: Strano, Rosario

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-133445

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gruppi di trasformazioni

Rosario Strano*

Introduzione

Nella sua lezione inaugurale dell'anno accademico dell'Università di Catania di due anni fa il Preside Pucci affermò che uno degli scopi fondamentali della fisica e delle altre scienze sperimentali è la ricerca e lo studio delle simmetrie della natura.

Lo strumento matematico più idoneo per studiare tali simmetrie è la nozione di gruppo: le simmetrie infatti non sono altro che quelle proprietà che sono invarianti rispetto a un dato gruppo di trasformazioni.

In questa lezione, dopo aver dato la definizione di gruppo, esamineremo sommariamente alcuni dei gruppi più importanti che si incontrano in matematica assieme ad alcune applicazioni in varie discipline scientifiche.

La definizione di gruppo

Il concetto di gruppo è stato introdotto dal matematico francese Evariste Galois agli inizi dell'ottocento.

Un gruppo G è un insieme non vuoto dotato di un'operazione (solitamente denotata con il simbolo di prodotto) soddisfacente le seguenti condizioni:

- proprietà associativa:
  $(ab)c = a(bc)$, per ogni $a, b, c \in G$.
- Esiste un elemento $e \in G$, detto elemento unità, tale che:
  $ae = a$, per ogni $a \in G$.
- Per ogni $a \in G$ esiste un elemento, detto inverso di a e che si denota con a^{-1} tale che $aa^{-1} = e$.

Nota. In generale non vale la proprietà commutativa ciò e in generale non è vero che $ab = ba$ per ogni a, b e G.

Quando tale proprietà è verificata il gruppo si dice abeliano in onore del matematico norvegese Niels Abel.

Un teorema famoso di Cayley afferma che ogni gruppo si può realizzare come gruppo di trasformazioni. Per sua natura quindi un gruppo agisce su un opportuno insieme mediante trasformazioni. Per tale motivo uno dei settori più importanti della teoria dei gruppi è la teoria delle rappresentazioni: essa studia infatti il problema di determinare su quali spazi e in qual modo un gruppo si può rappresentare come gruppo di trasformazioni.

Cominciamo ad esaminare un gruppo molto importante per le sue applicazioni in Fisica e in particolare nella Teoria della Relatività.

Il gruppo di Lorentz $O_{3,1}$

Consideriamo lo spazio vettoriale reale R^4 formato dalle quaterne (x_1, x_2, x_3, x_4) di numeri reali. I fisici interpretano le prime tre coordinate come coordinate spaziali, la quarta come coordinata temporale (spazio-tempo).

$O_{3,1}$ è il gruppo delle trasformazioni lineari di R^4 che trasformano in sé la forma quadratica:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Tale forma quadratica è detta la *metrica di Minkowski.*

In altri termini *Il gruppo di Lorentz* è costituito dalle matrici A, matrici 4×4 ad elementi in R, tali che: ${}^tAJA = J$ dove

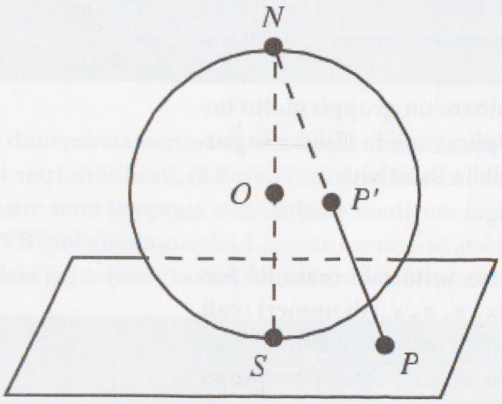
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad {}^tA = \text{trasposta di } A$$

è la matrice associata alla metrica di Minkowski.

Vediamo ora alcune prime proprietà del gruppo di Lorentz.

- È un gruppo di Lie di dimensione 6; ciò intuitivamente significa che i suoi elementi dipendono in modo continuo da 6 parametri reali.
- Non è connesso ma ha 4 componenti connesse. Esso cioè è unione di quattro sottoinsiemi aperti due a due disgiunti.
- Non è semplicemente connesso. Semplicemente connesso significa che ogni cammino chiuso è contraibile a un punto.
- Non è compatto. Compatto significa che ogni sottoinsieme infinito ha un punto di accumulazione.

Di particolare importanza è la componente connessa di $O_{3,1}$ contenente l'unità.
Questa viene detta *Gruppo di Lorentz proprio* ed è isomorfo al gruppo $PGL(2, C)$ cioè al gruppo delle proiettività della sfera di *Riemann*.
Facciamo un breve richiamo sulla sfera S di Riemann. Tutti sappiamo che i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, detto il piano complesso o piano di *Gauss*. Aggiungiamo adesso un ulteriore punto ∞, detto punto all'infinito. Si ottiene così una sfera S. Ciò si può visualizzare bene mediante la seguente figura:



Proiezione stereografica della sfera S sul piano

dove il punto N è il punto all'infinito.
Orbene il gruppo $PGL(2, C)$ è costituito dalle trasformazioni di S in sé del tipo:

$$z^1 = (az+b)/(cz+d)$$

con a, b, c, d numeri complessi tali che:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Esaminiamo infine in quest'ambito un ulteriore gruppo legato ai precedenti:
il *gruppo Speciale Lineare* $SL(2, C)$. Il gruppo Speciale Lineare $SL(2, C)$ è costituito dalle matrici complesse 2×2 a determinante 1. Data una tale matrice $A \in SL(2, C)$, le due matrici $A, -A$ danno luogo ad uno stesso elemento di $PGL(2, C)$. Nasce quindi una mappa $2:1$ da $SL(2, C)$ nel gruppo di Lorentz proprio. $SL(2, C)$ è quindi un ricoprimento doppio di $PGL(2, C)$ ed è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso. Ad ogni elemento del gruppo di Lorentz proprio possiamo quindi associare due elementi di $SL(2, C)$ che differiscono fra loro per il segno. La scelta di uno di questi due elementi viene detta uno *spin* ed $SL(2, C)$ perciò viene anche detto gruppo degli *spin*.

Il gruppo E (3) delle isometrie dello spazio euclideo

Passiamo adesso ad esaminare un altro gruppo molto importante: il gruppo delle isometrie dello spazio. Esso è costituito da tutte le trasformazioni dello spazio che conservano le distanze. In altri termini una isometria è una trasformazione dello spazio tale che, presi due qualunque punti P, Q e detti P', Q' i loro corrispondenti, si ha:
$d(P, Q) = d(P', Q')$.

Prima di esaminare tale gruppo richiamiamo quali sono le isometrie piane; tutti sappiamo che le isometrie piane sono di quattro tipi:
– Traslazioni (secondo un vettore assegnato).
– Rotazioni (di un dato angolo attorno ad un punto fisso).
– Riflessioni (rispetto ad una retta fissa).
– Glissoriflessioni (cioè una riflessione seguita da una traslazione secondo un vettore parallelo all' asse di riflessione).
Nel caso delle isometrie dello spazio, queste sono di sei tipi:
a) Isometrie dirette
1 – *Traslazioni* (secondo un vettore assegnato).
2 – *Rotazioni* (di un dato angolo attorno ad una retta fissa).
3 – *Avvitamenti* (cioè una rotazione seguita da una traslazione parallela all'asse di rotazione).
b) Isometrie inverse
1 – *Riflessioni* (rispetto a un dato piano).
2 – *Glissoriflessioni* (cioè una riflessione seguita da una traslazione secondo un vettore parallelo al piano riflessione).
3 – *Rotoinversioni* (cioè una rotazione seguita da una riflessione rispetto ad un piano perpendicolare all'asse di rotazione).
Vediamo alcune prime proprietà del gruppo E (3) delle isometrie dello spazio.
– È un gruppo di Lie di dimensione 6.
– Ha 2 componenti connesse. Una costituita dalle isometrie dirette e una dalle isometrie inverse.
– Non è semplicemente connesso.
– Non è compatto.
– L'insieme delle traslazioni costituisce un sottogruppo normale T di E (3); il sottogruppo T è isomorfo al gruppo additivo R^3.
– Il gruppo quoziente $E(3)/T$ dicesi il gruppo ortogonale reale ed è denotato con $O(3)$. Esso è formato dalle matrici A, matrici 3×3 ad elementi in R, tali che: ${}^tAA = I$ dove I è la matrice identica.

I sottogruppi discreti di E (3)

Studieremo adesso i sottogruppi infiniti e discreti di E (3). Questi sono detti anche *gruppi cristallografici*. Questi gruppi sono caratterizzati dal fatto

che contengono traslazioni ma non contengono traslazioni infinitamente piccole né rotazioni infinitamente piccole.
Sia G un tale gruppo e sia $L = T \cap G$: L è un reticolo cioè esiste i, $1 \leq i \leq 3$ ed esistono in L vettori linearmente indipendenti su R, $v_1, \ldots, v_i$ tali che ogni vettore di L è combinazione lineare a coefficienti interi di $v_1, \ldots, v_i$.
Esaminiamo separatamente i casi $i = 1, 2, 3$.

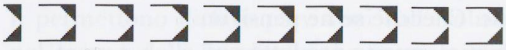
I gruppi cristallografici lineari

Nel caso $i = 1$ i gruppi cristallografici sono detti anche *gruppi dei fregi*. È un facile esercizio di algebra vedere che esistono solo 7 tipi di tali gruppi.

1-Il gruppo G consiste di sole traslazioni. In questo caso G è un gruppo ciclico infinito generato dalla traslazione unitaria t.
Ecco il fregio corrispondente:

o più artisticamente

2-In questo caso G è generato dalla traslazione unitaria t e dalla riflessione r rispetto all'asse orizzontale.
Ecco il fregio corrispondente:

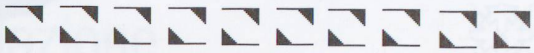


o più artisticamente

3-In questo caso G è generato dalla traslazione unitaria t e dalla riflessione s rispetto all'asse verticale.
Ecco il fregio corrispondente:

o più artisticamente

4-In questo caso G è generato dalla traslazione unitaria t e dalla rotazione di 180° ρ.
Ecco il fregio corrispondente:

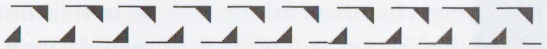


o più artisticamente

5-In questo caso G è il più grande possibile generato da t,r,s.
Ecco il fregio corrispondente:

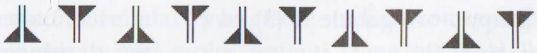
o più artisticamente

6-In questo caso G è ciclico infinito generato dalla glissoriflessione g.
Ecco il fregio corrispondente:



o più artisticamente

7-In questo caso G è generato dalla glissoriflessione g e dalla rotazione ρ.
Ecco il fregio corrispondente:

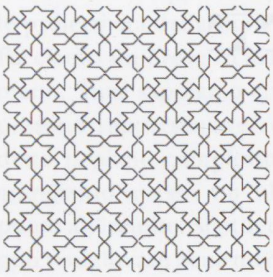


o più artisticamente

I gruppi cristallografici piani

Questi gruppi sono detti anche «Wallpaper groups» cioè gruppi della carta da parati.
Si prova che ci sono 17 tipi di tali gruppi.
Ricordiamo prima una proprietà importante di tali gruppi, detta la *restrizione cristallografica*, che

afferma tali gruppi possono contenere rotazioni solo di 60°, 90°, 120°, 180°.
Ne presentiamo come esempio un solo tipo:

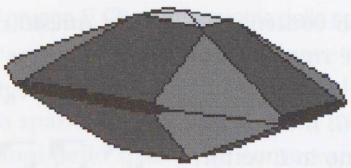


in cui notiamo varie simmetrie: una rotazione ρ di 180°, una rotazione ρ_1 di 90°, due riflessioni rispetto a due assi ortogonali passanti per il centro di rotazione ρ e due glissoriflessioni rispetto a due assi ortogonali passanti per il centro di rotazione ρ_1.
Questo esempio è realizzato nella seguente foto ripresa dall'Alambra a Granata.
Qualcuno dice anzi che nell'Alambra sono presenti tutti i 17 tipi di gruppi cristallografici piani.

I gruppi cristallografici spaziali

Consideriamo infine il caso dello spazio. Questi gruppi sono importanti nella cristallografia.
Il reticolo L è un reticolo spaziale ed è stato provato che esistono 14 tipi di tali reticoli, detti *reticoli di Bravais*.
Sia $G_P = G/L$ il gruppo quoziente. G_P è un sottogruppo finito del gruppo ortogonale O (3) ed è detto il *Gruppo puntuale* di G.

Esistono 32 classi di tali gruppi puntuali.
Combinando i vari casi si trova, attraverso complicati calcoli matematici, che esistono 230 gruppi cristallografici spaziali.
Questi gruppi vengono distinti in 7 sistemi fondamentali.
Presentiamo qui uno dei gruppi puntuali: esso appartiene al sistema Tetragonale ed è un gruppo abeliano con 8 elementi generato da una rotazione di 90° e da una riflessione rispetto ad un piano perpendicolare all'asse di rotazione. Esso si può facilmente visualizzare mediante la seguente figura:



La foto a destra rappresenta un minerale, Leucite, che realizza tale gruppo puntuale

Conclusioni

La cosa più sorprendente che salta subito all'occhio è che il concetto di Gruppo, così astratto, e le tecniche matematiche coinvolte, anch'esse astratte, quando vengono applicate si adattano con grande accuratezza e precisione a spiegare la realtà della natura. Per esempio la classificazione dei gruppi cristallografici, ottenuta per via puramente teorica, è stata adottata in pieno dagli studiosi di mineralogia per classificare i cristalli.
Questo fenomeno che investe tutta la matematica, per molti versi misterioso, è stato messo in evidenza da A. Einstein il quale si chiedeva:
«Com'è che la matematica, essendo fondamentalmente un prodotto del pensiero umano indipendente dall'esperienza, spiega in modo così ammirevole le cose reali?» Tale problematica è stata ripresa in un famoso articolo da E. Wigner «The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences» in cui esamina vari fenomeni, previsti in via teorica dalla matematica, che successivamente hanno trovato riscontro negli esperimenti.
Tale articolo ha suscitato numerosi dibattiti ed approfondimenti. Qualcuno risponderebbe con Galilei: «le leggi della Natura sono scritte in linguaggio matematico.» Io personalmente non condivido questa posizione. Checchè se ne pensi, un fatto è certo: la matematica, questo prodotto così astratto della mente umana, costituisce lo strumento più idoneo attualmente disponibile al genere umano per spiegare, descrivere e modellizzare i fenomeni della natura. Concludo con un rammarico. La tendenza che oggi si diffonde sempre più, di ridurre e a volte eliminare dai curricula didattici universitari, gli insegnamenti di base e in particolare l'insegnamento della matematica, sacrificata sull'altare di una presunta «professionalizzazione», credo che a lungo termine creerà un danno al progresso scientifico e alla società tutta. Ciò infatti tende a produrre figure di laureati altamente specializzati ma privi di quel sostrato culturale che sta alla base di tutte le scienze e che permette di dominare e comprendere a pieno la realtà della natura.

* Prof. Dr. Rosario Strano, Università di Catania, Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Lezione inaugurale anno accademico 2004/2005.