L'expérience du pendule de Foucault faite dans l'église des Bénédictins de Catane

Autor(en): **Boltshauer, J.-A. / Ducret, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **21 (1869)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-684403

L'EXPÉRIENCE DU PENDULE DE FOUCAULT

FAITE

dans l'Eglise des Bénédictins de Catane.

MÉMOIRE

présenté le 25 février 1869 à l'Académie Gioenia

par **J.-A. BOLTSHAUSER**, professeur

(Catane 1869, br. in-4° avec planche)

TRADUIT

par J. DUCRET.

Dans la séance du 5 mars 1871, M. Ducret a rappelé que, lors de la réunion de la Société d'émulation en 1868, M. Durand fit la démonstration de la formule principale qui donne l'angle de déviation du pendule en fonction de l'angle de rotation de la terre ; que, en présence des membres de la Société, il répéta la célèbre expérience du pendule de Foucault et en exposa la théorie « au point de vue d'une plus grande vulgarisation et d'une plus grande simplicité. »

M. Ducret supposa d'après cela qu'on n'entendrait pas sans intérêt la traduction d'un mémoire de M. Boltshauser, professeur à l'université de Catane, concernant l'expérience du pendule de Foucault.

Ce mémoire renfermant des faits entièrement nouveaux et une théorie nouvelle, la Société décida que, au lieu d'en donner un simple compte-rendu, on publierait la traduction entière dans les *Actes*. Elle a exprimé en même temps le vœu que les résultats indiqués par M. Boltshauser soient contrôlés par de nouvelles expériences, faites dans des endroits différents, dans des circonstances variées, et avec des appareils divers.

I.

Conduit par le plan d'études, qui m'était assigné pendant l'année écoulée, pour l'enseignement de la physique, à l'université royale de Catane, à exposer la théorie du pendule, j'estimai chose utile, non moins qu'intéressante, de faire mention de l'expérience de Foucault, et de démontrer comment la déviation du plan d'oscillation d'un pendule est une conséquence immédiate du mouvement de rotation de la terre (1). Mais, devant ensuite exécuter la susdite expérience avec un pendule long de peu de mètres et dans un local imparfaitement garanti de l'agitation de l'air, il fut impossible de ne pas penser à un local très favorable pour la démonstration à faire, comme l'est l'église des ex-pères Bénédictins de Catane, dans laquelle, au-dessus de la nef principale, s'élève une coupole haute d'un peu moins de 60 mètres.

A l'idée du local s'associe bien vite le désir d'une expérience publique, et, encouragé en cela par le très digne recteur de l'université, professeur et chevalier Zurria, je ne perdis pas de temps pour avoir l'autorisation de libre entrée dans ladite église, autorisation qui fut accordée avec un louable empressement par le père Bénédictin M. Jean Abatelli, recteur de ladite église, et par M. Charles Bettoli, chargé d'affaires des ex-pères Bénédictins de Catane.

En mettant la main aux préparatifs de la susdite expérience, déjà tant de fois exécutée, il me parut petite chose de suspendre une balle, munie inférieurement d'un style, lequel en glissant de temps en temps sur un lit de sable, qu'à volonté l'on peut élever ou abaisser, y trace le plan

(1) Il semble qu'en France la mort du savant Léon Foucault a excité un nouvel enthousiasme pour sa célèbre expérience avec le pendule, laquelle expérience a été, pendant la préparation du présent travail, exécutée dans les cathédrales de Reims et d'Amiens.

d'oscillation du pendule; ou, comme le pratiqua déjà le même Foucault, d'ajouter de temps en temps une pointe mobile au style quand il est arrivé à l'extrémité d'une oscillation.

J'essayai donc de construire un pendule qui, sans être troublé d'une manière quelconque dans son mouvement, traçât sur un plan les courbes qui, presque immédiatement, succèdent à la ligne droite décrite dans la première oscillation, et desquelles varient, d'instant en instant, et la forme et la position relatives, laquelle position et forme constituent justement l'objet des observations dans l'expérience de Foucault.

Il est vrai que, dans l'état actuel de la science, la théorie du pendule ne laisse rien ou peu à désirer, et que même l'expérience de Foucault a été traitée analytiquement; mais si l'analyse déduit avec une rigoureuse précision toutes les conséquences d'un fait donné, elle ne saurait cependant prévoir les circonstances dont il dépend, et c'est pour cela qu'il me paraît utile de comparer les faits observés avec les résultats théoriques de l'expérience de Foucault.

II.

Depuis tantôt vingt ans, tous les géomètres qui s'occupèrent du pendule, admirent, sans pourtant le démontrer, que dans la théorie de son mouvement oscillatoire, le point de suspension, bien que participant au mouvement de rotation de la terre, pouvait, même devait être considéré comme en repos absolu, et cela les conduisit aux conséquences suivantes :

1. Les oscillations du pendule (fût-il même libre dans tous les sens) sont dans un plan.

2. Pour la durée des petites oscillations d'un pendule simple, on a :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

et pour la durée des oscillations de plus grande amplitude :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right) + \text{etc.} \right]$$

indiquant par l la longueur du pendule, par g l'accélération (l'intensité) de la pesanteur, et par h la hauteur de la chute.

Mais de récentes observations sont venues démentir la susdite hypothèse, fondée sur l'autorité de Galilée et surtout sur celle de Poisson, lequel s'exprime ainsi dans le *Journal de l'Ecole polytechnique* de 1837 : « La force perpendiculaire au plan des oscillations est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan et avoir une influence appréciable sur son mouvement. »

Avant 1850, M. Pouillet observait que dans le pendule conique la projection horizontale du point mobile décrit une courbe elliptique, dont le centre correspond à la position d'équilibre du pendule, et dont la forme est constante, au moins dans les limites d'une première approximation.

En 1850, le célèbre Foucault constate que le plan des oscillations d'un pendule se déplace, avec un mouvement continu, dans un sens opposé de celui de la rotation de la terre.

Ces deux observations, inexplicables si l'on admet que le mouvement rotatoire de la terre, qui est pourtant celui du point de suspension, soit sans influence sur le mouvement du pendule, se sont au contraire présentées comme faits très naturels, lorsqu'à l'aide de l'analyse on est descendu à toutes les conséquences de ce mode de rotation ; et c'est dans ce sens que la forme elliptique de la susdite projection, et, plus spécialement, la position du plan d'oscillation constituent une preuve directe du mouvement rotatoire de la terre et satisfont d'une manière inattendue un désir du célèbre Laplace, qui, en parlant du mouvement de rotation de la terre, dit :

« Quoique ce mouvement soit maintenant établi avec toute la certitude que les sciences physiques comportent, cependant une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. »

Il est bien vrai que, même avant l'expérience de Foucault, les phénomènes dépendant du mouvement de la terre furent analysés. Laplace, dans le 4e volume de sa *Mécanique céleste,* comme aussi Poisson, dans le fascicule 26 du *Journal de l'Ecole polytechnique,* ont établi les formules qui renferment indirectement les principales relations entre l'action de la rotation et le mouvement du pendule conique; en sorte qu'un habile calculateur, descendant aux conséquences de ces formules, aurait pu constater longtemps d'avance les résultats auxquels arriva ensuite Foucault par une voie toute différente.

D'autre part, un développement des susdites formules de Laplace et de Poisson fut fait par M. Binet et communiqué à l'Académie des sciences de Paris peu après l'annonce de l'expérience de Foucault (1). Il démontre que les courbes décrites par le pendule sont des ellipses à axes constants et dont le plus grand est uniformément mobile autour de son centre dans le sens du nord à l'est et avec une vitesse

$$K = n \sin l$$

en indiquant par l la latitude du lieu d'observation, et par n la vitesse angulaire de la terre d'occident en orient (2).

(1) Comptes-rendus de l'Académie des sciences, vol. XXXII, p. 197.

(2) En prenant pour unité de temps la seconde sidérale on a

$$n = \frac{2\pi}{86400} = 15''$$

En exprimant le temps en secondes du temps solaire moyen, on obtient

$$n = \frac{2\pi}{86163} = 15''\,39.$$

III.

Des divers modes tentés pour obtenir sur un plan la trace des courbes décrites par le pendule de Foucault, celui qui me donna les résultats les plus satisfaisants consista à employer une balle percée dans la direction du fil de suspension, et munie inférieurement d'un entonnoir à très petit orifice. Dans cet entonnoir s'introduisait à un moment donné une quantité de sable suffisante pour produire, durant une oscillation entière, une mince traînée, qui, se déposant sur un papier mouillé avec de l'eau gommée, s'y collait et formait une trace fidèle de la courbe décrite. J'eus soin de couper en ligne droite un des côtés de la *feuille sans fin* employée, et de le maintenir toujours dans la même direction ; de cette manière le plan d'oscillation du pendule, correspondant à chaque courbe, était donné par l'angle formé par le grand axe de la courbe relative et le côté taillé de la carte. La balle était de carbonate de chaux (1) (pierre blanche de Syracuse) du diamètre de 30 centimètres et du poids d'environ 17 kilogrammes. La distance du point de suspension à l'extrémité de l'entonnoir était de 50,69 mètres ; l'intervalle entre celle-ci et la feuille, un centimètre dans la position d'équilibre du pendule, et de 17 à 18 millimètres à l'extrémité de la première oscillation. La première ligne fut tracée dans la direction et dans le sens du sud au nord. La quantité de sable, plus que suffisante à la trace d'une courbe, n'excédait pas 6 à 8 grammes, elle était introduite dans la balle dans le moment où celle-ci était le plus voisine de sa position d'équilibre.

Dans la première expérience faite le 28 mars 1868, il se traça 25 lignes de 5 en 5′ temps moyen. L'angle formé

(1) Je choisis cette matière, parce que je m'étais proposé d'étudier encore l'influence de la résistance de l'air sur la forme des courbes, en remplaçant dans la balle des segments sphériques de pierre, de plus en plus grands, par d'autres en plomb, d'égale grandeur.

par le grand axe de chaque courbe et le bord rectiligne du papier fut déterminé en le faisant entrer dans un triangle, dont on mesura les trois côtés. Malgré l'extrême soin apporté dans cette opération, les résultats, construits graphiquement, donnèrent lieu à une ligne assez irrégulière, laquelle, pourtant, dans son ensemble forme une courbe bien distinctement ascendante, qui, convenablement rectifiée, fournit les résultats suivants :

Déviation du plan d'oscillation du pendule.	Intervalle de temps.
36′	en 5′ temps moyen
37′	de la 5e à la 10e minute.
38′	10e à la 15e
38′ ½	15e à la 20e
39′	20e à la 25e
39′ ½	25e à la 30e
40′	30e à la 35e
40′ ½	35e à la 40e
41′	40e à la 45e
42′	45e à la 50e
43′	50e à la 55e
45′	55e à la 60e
46′ ½	60e à la 65e
48′	65e à la 70e
49′ ½	70e à la 75e
52′	75e à la 80e
54′ ½	80e à la 85e
57′	85e à la 90e
59′ ½	90e à la 95e
1° 2′ ½	95e à la 100e
1° 5′ ½	100e à la 105e
1° 8′ ½	105e à la 110e
1° 12′ ½	110e à la 115e
1° 16′	115e à la 120e

En additionnant les déviations particulières, on trouve un déplacement total du plan d'oscillation de 19° 51′ 30″

en 24 fois 5′ et par suite un déplacement moyen qui est sensiblement de 49′ $\frac{2}{3}$ pour chaque 5′.

La théorie donne une valeur un peu plus petite. En effet, l'angle de rotation de la terre en 5′ temps moyen est

$$15'',39 \times 300 = 4617''$$

et cet angle, multiplié par le sinus de la latitude du lieu d'observation (37° 30′, 15″, 5), donne 46′ 50″,8 pour la déviation du plan d'oscillation en 5′ temps moyen.

Dans une seconde expérience, faite le 30 mars, il se traça 15 lignes à des intervalles de 5′, temps moyen, dans la direction et dans le sens indiqués dans l'expérience précédente. Les résultats déterminés et rectifiés comme ceux rapportés ci-dessus furent les suivants :

Déviation du plan d'oscillation du pendule.	Intervalle de temps.
35′	en 5′ temps moyen
35′ $\frac{1}{2}$	de la 5ᵉ à la 10ᵉ minute.
36′	10ᵉ à la 15ᵉ
37′	15ᵉ à la 20ᵉ
38′	20ᵉ à la 25ᵉ
39′ $\frac{1}{2}$	25ᵉ à la 30ᵉ
41′	30ᵉ à la 35ᵉ
43′	35ᵉ à la 40ᵉ
45′	40ᵉ à la 45ᵉ
48′	45ᵉ à la 50ᵉ
51′	50ᵉ à la 55ᵉ
53′ $\frac{1}{2}$	55ᵉ à la 60ᵉ
57′	60ᵉ à la 65ᵉ
1°	65ᵉ à la 70ᵉ
1° 3′	70ᵉ à la 75ᵉ

Le déplacement total du plan d'oscillation fut donc 11° 22′ 30″ en 15 fois 5′, ou en moyenne 45′ $\frac{1}{2}$ pour chaque 5′, au lieu de 46′ 50″,8 comme le voudrait la théorie.

Cette expérience et la précédente fournissent pour la moyenne du déplacement moyen du plan d'oscillation des valeurs qui s'écartent peu de celles données par la théorie, et par conséquent, en quelque sorte, la confirment; mais d'après la théorie, le plan d'oscillation se déplace avec un mouvement uniforme, et d'après les expériences avec un mouvement accéléré. Une différence aussi essentielle entre la théorie et l'expérience me fit douter, déjà depuis la première épreuve, de l'exactitude des résultats obtenus, et pour cette raison je m'étudiai à éviter toute cause d'erreur dans un second essai. Je m'assurai surtout que, dans le point de suspension, le pendule avait une égale mobilité en tous les sens.

N'obtenant pas, malgré cela, des résultats plus concordants avec la théorie, je commençai à mettre en doute l'insensibilité supposée du mouvement du pendule, soit au voisinage des spectateurs, soit au choc du sable tombant dans l'entonnoir, doute qui devint ensuite justifié, alors que, dans une troisième expérience, je vis, dans le moment où le plus de personnes s'approchèrent du pendule, disparaître, en une seule fois, la courbe elliptique, et s'y substituer une ligne droite.

IV.

De cette manière ayant reconnu que les dispositions adoptées ne pouvaient me fournir des données exactes, et que le pendule ne pouvait être approché, ni non plus heurté par la petite quantité de sable nécessaire pour la trace d'une courbe, j'abandonnai totalement le mode de construction indiqué pour m'arrêter au suivant. Dans l'intérieur de la balle je plaçai un récipient capable de contenir le sable nécessaire à la trace de toutes les lignes d'une même expérience.

Ce récipient était terminé inférieurement en entonnoir, fermé par une soupape en communication avec un échappement et avec un électro-aimant, de manière à pouvoir être instantanément ouverte ou fermée.

La balle était suspendue avec deux fils isolés, lesquels, inférieurement, communiquaient avec le fil de l'électro-aimant, et supérieurement, dans le point de suspension, se divisaient pour descendre séparément jusqu'au pavé de l'église, où ils pouvaient être mis en communication avec les pôles d'une pile. En vue d'obtenir une traînée de sable plus mince et plus uniforme, le sable du premier entonnoir tombait dans un second, mobile dans tous les sens, et dont l'orifice, assez resserré, pouvait se placer dans la direction du fil de suspension.

Pour conserver finalement une plus grande régularité au plan, sur lequel devaient se tracer les courbes, je remplaçai le papier par des châssis rectangulaires, sur lesquels était fortement tendue une étoffe blanche mouillée d'eau gommée. Courant entre deux points fixes, ces châssis conservaient invariablement pour toutes les courbes une même direction ; en sorte que, pour avoir les déviations respectives du plan d'oscillation, il suffisait de rapporter le grand axe de chaque courbe à un même côté du châssis.

Pour faire trancher davantage les courbes sur le fond blanc, elles furent tracées avec du sable teint en noir, et tout enfin fut disposé de manière que les spectateurs et les personnes nécessaires à l'expérience se tinssent éloignées de la balle d'au moins trois mètres.

Avec cet appareil, et sans le moindre accident, se tracèrent le jour du 11 mai, 31 courbes, soit 14 à des intervalles de 5′ temps moyen, et 17 autres à intervalles de 10′. La première oscillation eut lieu dans la direction et dans le sens du S. au N.

L'ensemble de ces courbes est représenté dans la fig. 1.

La construction graphique des déviations observées du plan d'oscillation conduit aux résultats suivants :

Déviation du plan d'oscillation du pendule.	Intervalle de temps.
31′	en 5′ temps moyen
31′ ½	de la 5e à la 10e minute.
32′	10e à la 15e
32′ ½	15e à la 20e
33′	20e à la 25e
33′	25e à la 30e
33′ ½	30e à la 35e
34′	35e à la 40e
34′ ½	40e à la 45e
34′ ½	45e à la 50e
35′	50e à la 55e
35′ ½	55e à la 60e
36′	60e à la 65e
36′ ½	65e à la 70e
37′	70e à la 75e
37′ ½	75e à la 80e
38′ ½	80e à la 85e
42′	85e à la 90e
45′ ½	90e à la 95e
50′	95e à la 100e
55′	100e à la 105e
1° 1′	105e à la 110e
1° 7′	110e à la 115e
1° 12′	115e à la 120e
1° 19′	120e à la 125e
1° 26′	125e à la 130e
1° 35′	130e à la 135e
1° 47′	135e à la 140e
2° 2′	140e à la 145e
2° 21′	145e à la 150e
2° 42′	150e à la 155e
3° 2′	155e à la 160e
3° 22′	160e à la 165e
3° 42′	165e à la 170e

Déviation du plan d'oscillation du pendule.		Intervalle de temps.
3°	59′	170e à la 175e
4°	7′	175e à la 180e
4°	13′	180e à la 185e
4°	11′	185e à la 190e
4°	8′	190e à la 195e
4°	1′	195e à la 200e
3°	51′	200e à la 205e
3°	41′	205e à la 210e
3°	30′	210e à la 215e
3°	17′	215e à la 220e
3°	3′	220e à la 225e
2°	51′	225e à la 230e
2°	34′	230e à la 235e

En additionnant les déplacements particuliers, on obtient pour la déviation totale du plan d'oscillation du pendule 87° 2′ en 3 heures 55′ temps moyen; selon la théorie, cette déviation aurait dû être :

$$(46' \, 50'',8) \times 47 = 36° \, 41' \, 47'',6.$$

La détermination du plan d'oscillation dans chaque courbe est une opération plus compliquée que ce qu'il peut paraître à première vue, par la raison que, auparavant, il faut trouver le grand axe de chaque courbe. Des divers moyens essayés pour l'obtenir, celui qui me réussit le mieux consista à copier la courbe, au moyen d'un papier transparent, en pliant ensuite chaque courbe dans le sens de la longueur et dans le sens de la largeur, de manière à obtenir chaque fois la superposition la plus parfaite possible. Etant trouvé de cette manière le grand axe d'une courbe sur le papier, et celui-ci rappliqué sur le châssis, il devenait facile de tracer le grand axe sur le châssis lui-même.

En ployant les courbes dans le sens de la largeur, les deux moitiés étaient toujours superposables, mais en les pliant dans le sens de la longueur, les deux moitiés coïncidaient avec peine dans la première et dans la seconde courbe, et présentaient une différence sensible dans la 3e, laquelle différence allait en croissant jusqu'à la 8e, pour diminuer ensuite et devenir peu sensible dans la 15e, et inobservable dans le reste des courbes.

Les courbes décrites n'étaient donc pas rigoureusement elliptiques, mais d'une forme beaucoup plus compliquée. Ce qui donne une certaine importance à ce fait, c'est la circonstance que les moitiés plus grandes des courbes susdites étaient toujours situées côté ouest, et les parties plus petites côté est. Le pendule, en décrivant la moitié plus convexe de la courbe, passait de nord à sud, et au contraire de sud à nord, en traçant la partie aplatie.

Voici du reste les valeurs par lesquelles on pourra résumer la forme des diverses courbes de cette expérience.

Courbes.	Grands axes.	Petits axes.	Demi-petits axes situés côté ouest.	Demi-petits axes situés côté est.
1re	sensiblement une ligne droite.			
2e	1094,0 millim.	29,5 millim.	sans différence sensible.	
3e	1003,0	45,0		
4e	915,5	66,5	34,0	32,5
5e	839,5	81,0	41,5	39,5
6e	760,5	95,5	48,5	47,0
7e	699,5	101,3	51,3	51,0
8e	646,0	109,0	55,5	53,5
9e	599,0	115,0	59,5	55,5
10e	555,0	119,5	60,5	59,0
11e	517,0	122,7	62,7	60,0
12e	482,0	123,0	63,0	60,0
13e	445,5	126,0	64,5	61,5
14e	413,5	127,0	65,0	62,5
15e	362,0	126,0	63,5	63,0
16e	319,0	126,0	sans différence sensible.	
17e	279,0	124,0		
18e	246,0	118,0		
19e	217,5	114,5		
20e	192,0	108,5		
21e	169,5	103,5		
22e	149,5	97,5		
23e	130,0	91,0		
24e	116,0	83,5		
25e	112,5	76,0		
26e	93,0	68,0		
27e	85,0	60,0		
28e	79,0	52,5		
29e	68,0	43,5		
30e	59,0	35,0		
31e	53,5	33,0		

V.

Sans rien changer dans la disposition du pendule, je fis une dernière expérience le jour du 14 mai; il se traça 38 lignes, 26 à intervalles de 5′, et 12 à intervalles de 10′ temps moyen. Le plan de la première oscillation fut celui de est-ouest. De chaque courbe la partie située côté sud décrite en passant d'est à ouest, l'autre partie en passant d'ouest à est. L'ensemble de ces courbes est représenté dans la fig. 2.

Quant au déplacement du plan d'oscillation, on obtint les résultats suivants :

Déviation du plan d'oscillation du pendule.	Intervalle de temps.
45′	en 5′ temps moyen
46′	de la 5e à la 10e minute.
47′ ½	10e à la 15e
49′ ½	15e à la 20e
51′ ½	20e à la 25e
54′	25e à la 30e
57′	30e à la 35e
1°	35e à la 40e
1° 4′ ½	40e à la 45e
1° 9′	45e à la 50e
1° 14′	50e à la 55e
1° 19′	55e à la 60e
1° 25′	60e à la 65e
1° 31′ ½	65e à la 70e
1° 38′ ½	70e à la 75e
1° 47′	75e à la 80e
1° 57′	80e à la 85e
2° 8′	85e à la 90e
2° 20′	90e à la 95e
2° 34′	95e à la 100e
2° 50′	100e à la 105e
3° 8′	105e à la 110e
3° 26′	110e à la 115e
3° 42′	115e à la 120e
3° 52′ ½	120e à la 125e
3° 59′	125e à la 130e
4° 1′ ½	130e à la 135e
4° 1′	135e à la 140e
3° 57′	140e à la 145e

Déviation du plan d'oscillation du pendule.	Intervalle de temps.
3° 51′	145e à la 150e
3° 42′	150e à la 155e
3° 24′	155e à la 160e
3° 2′ $\frac{1}{2}$	160e à la 165e
2° 41′	165e à la 170e
2° 20′	170e à la 175e
2° 1′	175e à la 180e
1° 42′	180e à la 185e
1° 27′	185e à la 190e
1° 16′	190e à la 195e
1° 5′ $\frac{1}{2}$	195e à la 200e
53′ $\frac{1}{2}$	200e à la 205e
45′ $\frac{1}{2}$	205e à la 210e
37′ $\frac{1}{2}$	210e à la 215e
31′ $\frac{1}{2}$	215e à la 220e
26′ $\frac{1}{2}$	220e à la 225e
22′	225e à la 230e
18′ $\frac{1}{2}$	230e à la 235e
15′	235e à la 240e
12′	240e à la 245e

Donc, en 4 h. 5′ la déviation totale du plan d'oscillation était 90° 49′ au lieu de 37° 34′ 41″ donnée par la théorie.

Quant à la forme des courbes, il est à noter que, dans chacune, les deux moitiés étaient toujours exactement superposables, soit qu'on pliât dans le sens de la longueur, soit qu'on pliât dans le sens de la largeur. Pour les dimensions des axes voyez le tableau suivant :

Courbe.	Grand axe	Petit axe
1re	sensiblement une ligne droite.	
2e	1219,0 millim.	34,0 millim.
3e	1117,0	55,0
4e	987,5	77,0
5e	902,5	89,0
6e	822,5	102,5

Courbe.	Grand axe	Petit axe
7e	753,5 millim.	112,5 millim.
8e	689,5	120,0
9e	637,5	128,0
10e	586,0	133,5
11e	542,5	136,5
12e	502,5	140,0
13e	466,5	140,5
14e	432,5	143,0
15e	399,5	143,5
16e	370,0	143,5
17e	336,5	143,5
18e	321,5	143,5
19e	303,5	139,5
20e	280,5	137,5
21e	261,0	134,5
22e	243,5	131,5
23e	228,0	126,5
24e	213,5	124,5
25e	199,5	120,0
26e	189,0	114,5
27e	169,0	113,5
28e	152,5	91,5
29e	140,0	78,5
30e	129,0	67,5
31e	120,0	50,0
32e	109,0	42,5
33e	101,5	33,5
34e	93,0	26,5
35e	86,5	20,5
36e	78,0	16,0
37e	69,0	10,0
38e	66,0	5,0

Avec un appareil diversement construit, dans des jours divers et dans diverses circonstances, on obtint donc dans la 3e et la 4e expérience des résultats qui, semblablement à ceux de la 1re et de la 2e, démontrent que la déviation du plan d'oscillation du pendule se fait avec un mouvement accéléré (au moins pour un certain temps) et non avec un mouvement uniforme comme conclut la théorie. Il est vrai que M. Binet, dans sa savante analyse, fait abstraction de la résistance de l'air et qu'il n'effectue pas, si ce n'est approximativement, l'intégration des équations différentielles du pendule ; en sorte qu'il manque toujours une théorie sur le mouvement du pendule dans un milieu résistant. Il y a deux voies pour l'obtenir, l'analyse et la synthèse : dans celle-là on tente l'intégration des équations différentielles du pendule, en tenant compte de la résistance de l'air, dans celle-ci on juge les phénomènes correspondant à une latitude donnée par ceux qui s'observent à l'équateur et aux pôles. Et cette voie synthétique est justement celle que je suivrai pour éclaircir la contradiction existant entre la théorie de M. Binet et les résultats des expériences rapportées ci-dessus.

VI.

Le pendule, bien que dans la position d'équilibre, participe au mouvement de rotation de la terre, et le corps suspendu décrit en général autour de l'axe de la terre un cercle qui coïncide avec l'équateur, si la latitude du point de suspension est zéro ; et qui au contraire est un cercle plus petit si le lieu de l'observation est situé entre l'équateur et un pôle. Au pôle seulement le corps suspendu est immobile relativement à l'axe de la terre.

Qu'on fasse maintenant abstraction de la résistance de l'air et qu'on suppose que la première oscillation ait lieu dans le plan est ouest. Sous l'équateur la direction du mouvement oscillatoire coïncide avec celle du mouvement rotatoire. Les forces motrices agissent dans le même plan, et par suite tous les mouvements du pendule auront lieu dans ce même plan.

Sous l'équateur donc, les oscillations dans la direction est ouest sont toujours planes, et le plan d'oscillation n'éprouve aucun déplacement.

Aux pôles et dans la position d'équilibre, le corps suspendu n'a aucun mouvement relativement à la terre; quand il oscille, il est sous l'influence seule de la pesanteur, laquelle ne produit que des oscillations planes et toutes comprises dans le plan de la première oscillation.

Aux pôles donc, le plan d'oscillation dans quelle direction que ce soit est fixe, et son déplacement apparent dans un temps T *est*

$$n\,\mathrm{T}$$

en représentant par n *l'angle de rotation de la terre dans l'unité de temps.* (B)

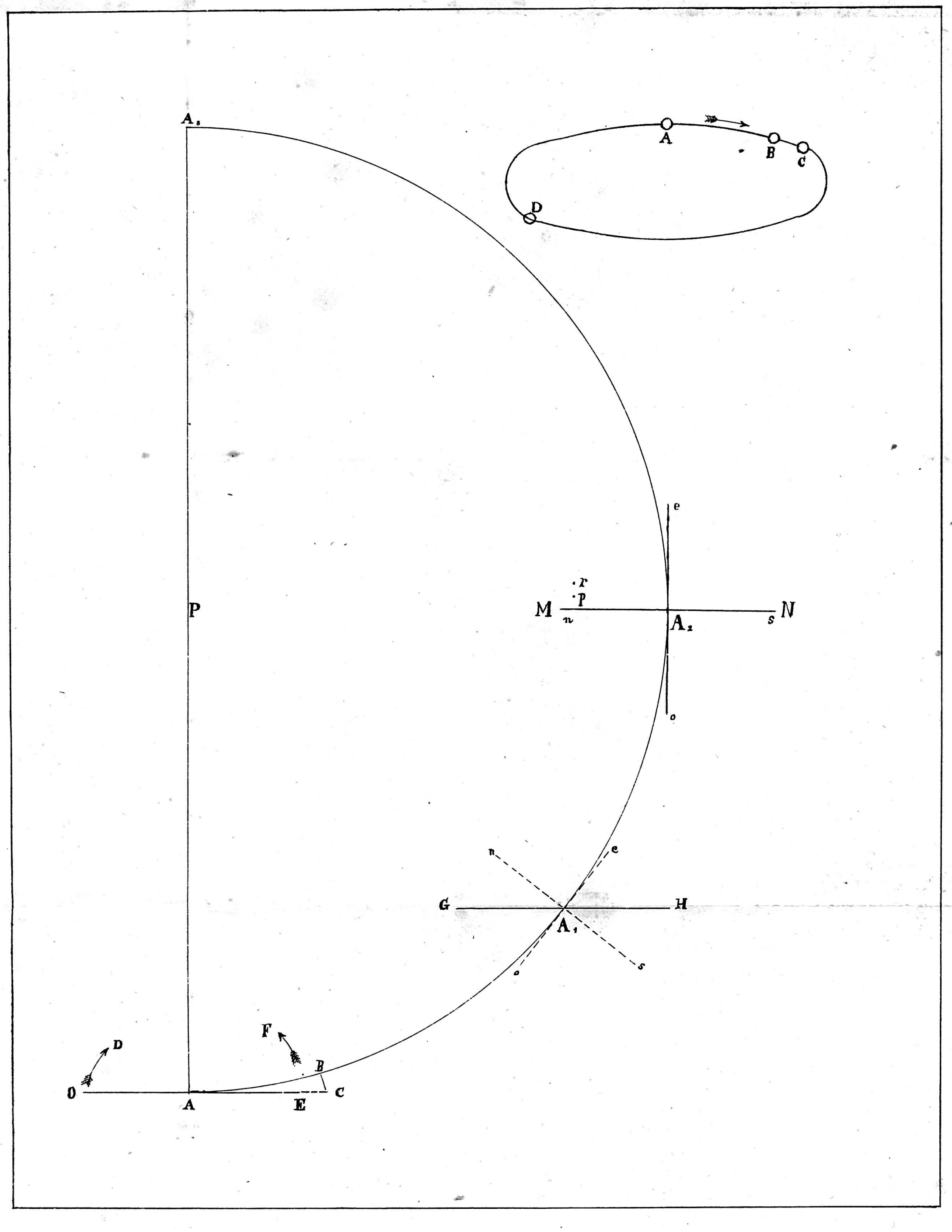
Dans tous les points compris entre l'équateur et un pôle, la direction supposée de la première oscillation (est-ouest) est située dans un plan qui forme avec celui du plus petit cercle parcouru par le corps dans la position d'équilibre, un angle égal à la latitude du lieu d'observation. Il en résulte que la pesanteur agit dans un plan et la force de rotation dans un autre plan, et que le mouvement du pendule est déterminé par la résultante de ces deux forces.

Soit donc :

OE fig. 3 la direction et l'amplitude de la première oscillation,

t sa durée,

APB l'angle de rotation de la terre pour le temps t. Le mouvement du corps sur l'arc AB ou sur la corde AB (puisque l'une coïncide sensiblement avec celle-là), peut se décomposer en les deux composantes AC et BC ; la 1re est située dans le plan d'oscillation et par suite ne le déplace en aucune manière ; la 2e tend à faire tourner ledit plan dans le sens OD, quand le corps parcourt l'arc OA, et dans le sens EF pendant la demi-oscillation AE. Et comme ces deux actions sont égales et contraires, elles



A
B
C
D
A_3
P
M
N
A_2
G
H
A_1
O
A
E
C
B
F
D

sont sans influence sur la position du plan d'oscillation, *lequel, abstraction faite de toute autre force, conserve donc sa première direction, et par suite se déplace en apparence en formant, après un temps* T, *avec la direction est ouest un angle, lequel mesuré dans le plan du petit cercle, vaut* n T, *et qui, considéré dans le plan horizontal du lieu d'observation est égal à*

$$n \, T \sin l$$

en représentant par l la latitude du lieu d'observation. (C)

La composante BC est sans influence sur la position du plan d'oscillation du pendule ; mais elle a évidemment pour effet de faire osciller le corps normalement à la direction OE. *Les courbes décrites par le pendule résultent donc de la combinaison des oscillations longitudinales et des oscillations latérales, et par conséquent elles sont elliptiques.* (D)

Pour savoir ensuite quelle moitié de l'ellipse est décrite par le corps en allant de l'O. à l'E. ou d'E. à O., on observe que le pendule, ce corps très mobile, obéit même dans la position d'équilibre, à la force centrifuge du lieu d'observation et s'éloigne, du côté sud, de la vraie direction verticale d'un angle X pour lequel

$$tg\, X = \frac{2\,\pi^2 r \sin 2\,l}{g\,T^1 - 4\,\pi^2 r \cos^2 l}$$

ou sensiblement

$$tg\, X = \frac{2\,r \sin.\, 2\,l}{T^2 - 4\,r \cos^2 l}$$

en représentant par r le rayon terrestre,
par l la latitude du lieu d'observation
et par t la durée d'une rotation de la terre.

Maintenant dans le passage que fait le corps d'est à ouest, la vitesse du mouvement oscillatoire se joint à la vitesse de rotation de la terre : la force centrifuge est accrue et le corps sort du plan d'oscillation en déviant vers le sud.

Dans le mouvement d'ouest à est la véritable vitesse du corps est égale à la différence entre les deux vitesses susdites; la force centrifuge est diminuée, et le corps suspendu sort du plan d'oscillation en déviant vers le nord.

Le pendule décrit donc une courbe convexe du côté sud en passant d'est à ouest, et une courbe convexe du côté nord en passant d'ouest à est. (E)

La composante BC, comme il a déjà été noté, *accroît ou tend à accroître le petit axe de l'ellipse, mais de quantités qui vont en diminuant de* A *vers* A_2, par la raison que l'angle que cette composante forme avec le plan d'oscillation va lui-même en décroissant et devient zéro en A_2.

Si les oscillations commencées en A dans la direction et dans le sens d'est à ouest, se prolongent au-delà de A_2, les accroissements du petit axe recommencent et vont en augmentant de A_2 jusque vers A_3 (F).

Le plan de la première oscillation, que j'ai supposé se trouver en A_1 dans la direction est ouest, forme, après un certain temps, en A_1 par exemple, un angle GA_1O avec la direction *o e*, c'est-à-dire avec la direction Est Ouest, et alors l'oscillation GH peut se décomposer en des mouvements *o e* et *n s*. Ayant jusqu'ici examiné l'influence de la rotation de la terre sur les oscillations faites dans le plan est ouest, examinons maintenant de quelle manière arrivent les oscillations dans la direction *n s*, c'est-à-dire dans la direction nord sud.

Supposons donc que la première oscillation se fasse en A, dans la direction MN, c'est-à-dire dans la direction nord sud. Comme la vitesse de rotation du corps suspendu est plus grande en N qu'en M, il en résulte que le pendule, en passant de N à M, tend vers un point *r*, mais perdant durant l'oscillation une partie de sa vitesse de rotation, il arrive en *p* et, par conséquent, décrit une courbe convexe du côté est. En passant de M à N le pendule arrive à un point q et décrit une courbe convexe du côté ouest (1).

Le mouvement rotatoire de la terre rend donc elliptiques même les oscillations commencées dans la direction nord sud, et accroît ou tend à accroître le petit axe de quantités qui vont en décroissant à mesure que le plan d'oscillation s'éloigne de la direction nord sud (G).

Cela établi, et revenant au plan d'oscillation GH en A, on reconnaît facilement que, étant décomposée, l'oscillation GH en les mouvements o e et n s, un pendule libre passerait d'e à o du côté sud, et de s à n du côté est, c'est-à-dire ferait des mouvements en sens opposé ; d'où résulte *que le petit axe des courbes est sous l'influence de deux forces plus ou moins opposées, quand le plan d'oscillation est compris entre les directions est ouest et nord sud ; et que l'une de ces forces est très grande et l'autre très petite, quand le plan d'oscillation se trouve dans une des directions est ouest, nord sud.* (H)

Du fait que en A_2 le pendule, en partant de N, arrive en un point p, et en partant de M, arrive en un point q, et que ce déplacement se répète à chaque oscillation, il résulte que *le plan d'oscillation se déplace avec un mouvement accéléré toutes les fois que l'oscillation a une amplitude sensible dans la direction nord sud* (J).

Je vais maintenant examiner quelle peut être approximativement l'influence de l'air sur le mouvement du pendule conique; je dis approximativement, parce que dans le lieu resserré, où se meut le corps suspendu, l'air, refoulé tantôt avec une plus grande tantôt avec une plus petite vitesse, presse le corps en avant, s'échappe latéralement, et en partie forme un courant derrière la balle en mouvement ; et tout cela d'une manière tellement compliquée, qu'il serait très difficile, pour ne pas dire impossible, de s'en faire une idée un peu exacte (2).

(1) Cela naturellement n'a plus lieu sous l'équateur, où aux points extrêmes de l'oscillation correspond la même vitesse de rotation.

(2) Les irrégularités notables dans le déplacement du plan d'oscillation pendant toutes les expériences, proviennent évidemment de l'influence très compliquée de l'action de l'air sur le mouvement du pendule.

Toujours est-il cependant que *le déplacement de l'air devant la balle absorbe une partie des forces motrices, et par conséquent fait décroître les axes des courbes* (K).

Le courant d'air qui se forme derrière la balle, mérite une attention particulière. Il a sensiblement la vitesse du corps oscillant quand celui-ci se trouve dans la position A fig. 4; mais dans les points B, C, etc., la vitesse du courant d'air devient plus grande et exerce alors sur la balle une pression latérale d'autant plus sensible que le mobile s'approche plus de l'extrémité de l'oscillation. Cette pression et celle identique qui se produit en D, ont pour effet un déplacement accéléré du plan d'oscillation, *lequel déplacement a lieu dans le sens de celui provenant de la rotation de la terre, quand les oscillations commencent dans le plan est ouest, et au contraire a lieu dans un sens opposé, quand le pendule commence les oscillations dans le plan sud nord* (L).

De l'ensemble de la théorie établie dans les notes (A) (B), etc., il résulte :

1. Que les oscillations deviennent d'autant plus rapidement elliptiques, que la direction dans laquelle elles furent commencées, se rapproche plus de celle d'est ouest, ou de celle nord sud. — Voyez notes (D) (G).

2. Que les oscillations commencées dans la direction est ouest ou nord sud donnent lieu à des ellipses ; le petit axe de celles-ci croît rapidement, conserve pendant un certain temps une valeur très-grande, et ensuite décroît, d'abord lentement, puis toujours plus rapidement. — Voyez note (H).

3. Que le plan d'oscillation se déplace, au moins pendant un certain temps, avec un mouvement accéléré. — Voyez note (J).

4. Que le déplacement du plan d'oscillation est beaucoup plus rapide pour les oscillations commencées dans la direction est ouest que pour les oscillations commencées dans la direction nord sud. — Voyez note (L).

Les courbes dans les figures 1 et 2 et les tableaux pag.

136, 137, 139, 140, 141, 142, démontrent l'exactitude des conclusions 1°, 2°, 3° ; — le tableau suivant tend à confirmer la 4° :

Déplacement total observé	Première oscillation dans le plan Sud-Nord			Première oscillation *dans le plan* Est-Ouest
en	1re expérience.	2e expérience.	3e expérience.	4e expérience.
5'	0 36'	35'	31'	45'
10'	1° 13'	1° 10'	1° 2'½	1° 31'
15'	1° 51'	1° 46'½	1° 34'½	2° 18'½
20'	2° 29'½	2° 23'½	2° 7'	3° 8'
25'	3° 8'½	3° 1'½	2° 40'	3° 59'½
30'	3° 48'	3° 40'	3° 13'	4° 53'½
35'	4° 28'	4° 21'	3° 46'½	5° 50'½
40'	5° 8'½	5° 4'	4° 20'½	6° 50'½
45'	5° 49'½	5° 49'	4° 55'	7° 55'
50'	6° 31'½	6° 37'	5° 29'½	9° 4'
55'	7° 14'½	7° 28'	6° 4'½	10° 18'
1 h.	7° 59'½	8° 22'½	6° 40'	11° 37'
1 » 5'	8° 46'	9° 19'½	7° 16'	13° 2'
1 » 10'	9° 34'	10° 19'½	7° 52'½	14° 33'½
1 » 15'	10° 23'½	11° 22'½	8° 29'½	16° 12'
1 » 20'	11° 15'½		9° 7'	17° 59'
1 » 25'	12° 10'		9° 45'½	19° 56'
1 » 30'	13° 7'		10° 27'½	22° 4'
1 » 35'	14° 6'½		11° 13'	24° 24'
1 » 40'	15° 9'		12° 3'	26° 58'
1 » 45'	16° 14'½		12° 58'	29° 48'
1 » 50'	17° 23'		13° 59'	32° 56'
1 » 55'	18° 35'½		15° 6'	36° 22'
2 h.	19° 51'½		16° 18'	40° 4'
2 » 5'			17° 37'	43° 56'½
2 » 10'			19° 3'	47° 55'½
2 » 15'			20° 38'	51° 57'
2 » 20'			22° 25'	55° 58'
2 » 25'			24° 27'	59° 55'
2 » 30'			26° 48'	63° 46'
2 » 35'			29° 30'	67° 28'
2 » 40'			32° 32'	70° 52'

Déplacement total observé en	Première oscillation dans le plan Sud-Nord.			Première oscillation *dans le plan* Est-Ouest
	1re expérience.	2e expérience.	3e expérience.	4e expérience.
2 h. 45'			35° 54'	73° 54'½
2 » 50'			39° 36'	76° 35'½
2 » 55'			43° 35'	78° 55'½
3 h.			47° 42'	80° 56'½
3 » 5'			51° 55'	82° 38'½
3 » 10'			56° 6'	84° 5'½
3 » 15'			60° 14'	85° 21'½
3 » 20'			64° 15'	86° 27'
3 » 25'			68° 6'	87° 20'½
3 » 30'			71° 47'	88° 6'
3 » 35'			75° 17'	88° 43'½
3 » 40'			78° 34'	89° 15'
3 » 45'			81° 37'	89° 41'½
3 » 50'			84° 28'	90° 3'½
3 » 55'			87° 2'	90° 22'
4 h.				90° 37'
4 » 5'				90° 49'

OBSERVATIONS

sur le Mémoire de M. le professeur Boltshauser

par C. LIAUSUN, *professeur*.

Je me permettrai quelques observations relatives aux conclusions de M. Boltshauser. Il me semble que la composante dirigée vers le centre du petit cercle passant par le lieu d'observation, doit être trop faible pour pouvoir en aucune manière exercer une influence sur la direction du pendule..... par suite, cette influence devant théoriquement diminuer jusqu'au bout de 6 heures, elle doit être nulle tout le temps.

La force centrifuge peut-elle être assez différente sur la boule du pendule et sur les châssis où se marquent les courbes pour pouvoir produire une déviation appréciable quelconque du pendule de la verticale du point de suspension? Je ne comprendrais pas comment la boule, parce qu'elle est plus libre relativement aux objets environnants, devrait avoir une force centrifuge différente de celle de ces objets. Ce serait, il me semble, contraire à un principe de mécanique en vertu duquel quand deux corps (la boule du pendule et un objet quelconque appuyé sur le sol), sont soumis à un mouvement commun (rotation de la terre autour de son axe), une seconde force agissant sur l'un d'eux lui communiquera par rapport à l'autre le même déplacement que si le mouvement commun n'existait pas. Or cette seconde force, c'est la force centrifuge dont l'effet sur les deux corps considérés est très-peu différent et dont par conséquent le déplacement correspondant doit être sensiblement nul. Cet effet ne pourrait différer qu'autant que la distance des 2 corps à l'axe de la terre ne fût pas la même. Or, cette différence est au plus de 2 centimètres.

M. Boltshauser passe ensuite à l'explication de ce qui arrive quand la première oscillation a lieu dans la direction N. S. Ici j'avoue que je ne comprends pas assez son raisonnement pour pouvoir porter un jugement sur ses conclusions ; il en est du reste ainsi dans plusieurs passages où un peu plus de détails auraient rendu plus claire son exposition. Je ne ferai donc pas d'observation spéciale sur cette partie, non plus que sur celle où il est question de l'influence de la résistance de l'air : une compréhension plus exacte du raisonnement m'est nécessaire dans ces questions. Je me bornerai donc à présenter encore quelques observations générales sur les expériences et les conditions dans lesquelles elles ont été faites.

La boule du pendule n'étant pas symétrique par rapport à son centre par suite de l'introduction dans son intérieur de divers objets : sable, réservoir, soupape , électro-aimant, etc, la pesanteur ne peut pas agir de la même manière sur tous les points et dans toutes les positions qu'ils occupent dans une oscillation.

Deux séries d'expériences faites chacune dans des conditions un peu différentes ne sont pas suffisantes à mon avis pour pouvoir avancer des conclusions un peu sûres ; il faudrait se placer plusieurs fois exactement dans les mêmes conditions et voir si les résultats sont identiques.

Quant à l'influence que pourrait exercer sur le pendule l'attraction du mont Etna, je ne crois pas qu'elle pût être sensible , attendu que dans les expériences spéciales faites en Ecosse et dans les Andes, l'attraction produite sur un corps de masse beaucoup moins grande que la boule du pendule et situé à proximité immédiate, ne fut que de quelques secondes.