La trigonométrie dans ses rapports avec la géométrie

Autor(en): **Streit, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **19 (1913)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-685113

LA TRIGONOMÉTRIE

DANS SES RAPPORTS

AVEC

LA GÉOMÉTRIE

PAR

ARNOLD STREIT

DOCTEUR ÈS SCIENCES

PROFESSEUR AU GYMNASE DE L'ÉCOLE CANTONALE

DE PORRENTRUY.

I.

Introduction.

Dans cette étude, nous donnerons d'abord une nouvelle démonstration des formules de Sin $(\alpha \pm \beta)$ et Cos $(\alpha \pm \beta)$ basée sur un théorème de géométrie. Puis nous appliquerons ces formules, celles qui en découlent et d'autres formules de *trigonométrie* à la *géométrie*, ce qui nous permettra de retrouver les relations de théorèmes importants de géométrie, entre autres celles des théorèmes de **Pythagore**, de **Pythagore généralisé**, de **Céva**, de **Ménélaüs**, de **Ptolémée** et d'établir des théorèmes nouveaux.

Notations.

Nous désignerons les sommets d'un triangle par A, B, C; les côtés opposés respectivement par a, b, c; les hauteurs correspondantes par h', h", h''' et les angles par α, β, γ.

Les segments, déterminés par les hauteurs, qu'il faut suivre pour aller de A vers B, puis de B vers C et enfin de C vers A seront appelés c' c" (sur c), a' a" (sur a) et b' b" (sur b).

II.

Formules de sin ($\alpha \pm \beta$) et cos ($\alpha \pm \beta$).

(Démonstration nouvelle basée sur un théorème de géométrie.)

(A).— Formule du sinus de la somme de deux arcs.

La somme de deux angles d'un triangle quelconque et le troisième angle étant supplémentaires, leurs sinus sont égaux :

1) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$$

Il est donc tout naturel de partir de cette relation pour chercher à établir une nouvelle démonstration de la formule du sinus de la somme de deux arcs. D'après la figure 1:

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b}$$

La relation 1) devient :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'}{b}$$

On a successivement :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'\,c}{b\,c} = \frac{h'\,(c' + c'')}{b\,c} = \frac{h'}{c}\;\frac{c' + c''}{b}$$

mais

$$\frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a}$$

Par suite

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{a}\;\frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''\,c''}{a\,b} + \frac{h'''\,c'}{a\,b}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{b}\;\frac{c''}{a} + \frac{c'}{b}\;\frac{h'''}{a}$$

ou

(I). $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

(B). — Formule du cosinus de la somme de deux arcs.

α, β et γ étant les angles d'un triangle, nous avons :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$$

La figure 1) donne

$$\cos \gamma = \frac{a''}{b}$$

d'où en remplaçant

$$\cos (\alpha + \beta) = - \frac{a''}{b} = - \frac{a\ a''}{a\ b}$$

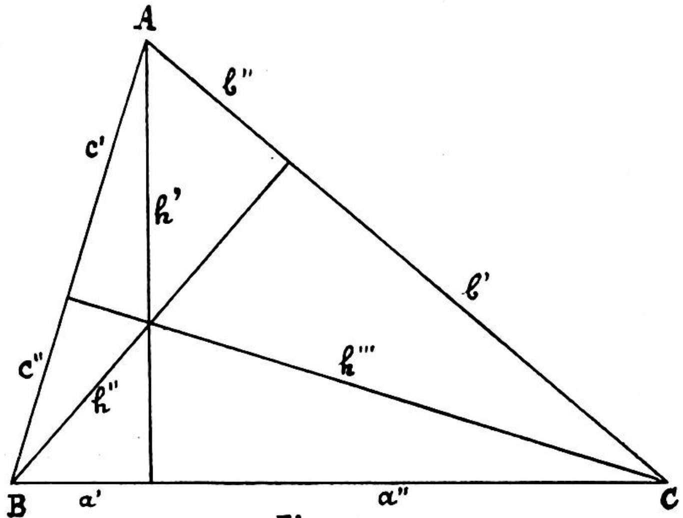

Fig 1.

Nous établirons plus loin la relation suivante :

$$h'''^2 = c'\ c'' + a\ a''$$

d'où

$$a\ a'' = h'''^2 - c'\ c''$$

Substituons ci-dessus...

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{c'\ c'' - h'''^2}{a\ b} = \frac{c'}{b}\ \frac{c''}{a} - \frac{h'''}{b}\ \frac{h'''}{a}$$

ou

(II) $$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha .\ \cos \beta - \sin \alpha .\ \sin \beta$$

(C). — Formule du sinus de la différence de deux arcs.

Au lieu de déduire cette formule de la relation (I) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'obtenir directement de la figure 1) par un procédé peu différent de celui déjà employé.

Supposons que α soit un angle aigu du triangle et désignons par α' l'angle extérieur correspondant à α. Il vaut la somme des angles intérieurs non adjacents :

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

d'où

$$\gamma = \alpha' - \beta$$

$$\sin \gamma = \sin (\alpha' - \beta)$$

mais

$$\sin \gamma = \frac{h'}{b}$$

Par suite

$$\sin (\alpha' - \beta) = \frac{h'}{b} = \frac{h' (c' + c'')}{b\ c} = \frac{h'}{c}\ \frac{c' + c''}{b}$$

$$\sin (\alpha' - \beta) = \frac{h'''}{a}\ \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''}{b}\ \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b}\ \frac{h'''}{a}$$

$$= \frac{h'''}{b}\ \frac{c''}{a} - \left[- \frac{c'}{b} \right] \frac{h'''}{a}$$

or

$$\sin \alpha' = - \frac{c'}{b} \qquad \text{puisque } \alpha' \text{ est obtus ;}$$

donc

(III) $$\sin (\alpha' - \beta) = \sin \alpha' . \cos \beta - \cos \alpha' . \sin \beta$$

(D). — Formule du cosinus de la différence de deux arcs.

Au lieu de tirer cette formule de la relation (II) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'établir en se basant sur la figure 1).

Choisissons un angle aigu α du triangle et soit α' l'angle extérieur correspondant. Nous pouvons écrire successivement :

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\gamma = \alpha' - \beta$$

$$\cos \gamma = \cos (\alpha' - \beta)$$

$$\cos (\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{a\ a''}{a\ b}$$

$$h'''^{2} = c'\ c'' + a\ a''$$

$$\cos (\alpha' - \beta) = \frac{h'''^{2} - c'\ c''}{a\ b} = \frac{h'''}{b}\ \frac{h'''}{a} - \frac{c'}{b}\ \frac{c''}{a}$$

α' est obtus... $\sin \alpha' = \dfrac{h'''}{b}$; $\sin \beta = \dfrac{h'''}{a}$;

$$\cos \alpha' = -\frac{c'}{b} ; \cos \beta = \frac{c''}{a}$$

(IV) $$\cos (\alpha' - \beta) = \cos \alpha' . \cos \beta + \sin \alpha' . \sin \beta$$

III.

Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.

En appliquant les formules précédentes et celles qui en découlent au triangle quelconque, on retrouve les relations de certains théorèmes importants de géométrie, et l'on arrive à établir des théorèmes nouveaux.

(A). Application de la formule de sin $(\alpha + \beta)$

Déduction du théorème de Pythagore généralisé.

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$$

En nous basant sur la figure 1), nous pouvons écrire :

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{h''}{c}\ \frac{a'}{c} + \frac{b''}{c}\ \frac{h'}{c} = \frac{a'\ h'' + b''\ h'}{c^{2}}$$

ou, en tenant compte de la relation

$$b\,h'' = a\,h' :$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a'\dfrac{a\,h'}{b} + b''\,h'}{c^2} = \frac{h'}{b}\,\frac{a\,a' + b\,b''}{c^2}$$

Or

$$\frac{h'}{b} = \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$$

Par suite

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\,\frac{a\,a' + b\,b''}{c^2}$$

D'où résulte... $c^2 = a\,a' + b\,b''$

Par permutation cyclique... (1) $b^2 = b\,b' + c\,c''$

et... $a^2 = c\,c' + a\,a''$

Les relations (1) s'expriment comme suit (fig. 2) :

Théorème I.

Dans tout triangle acutangle, le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.

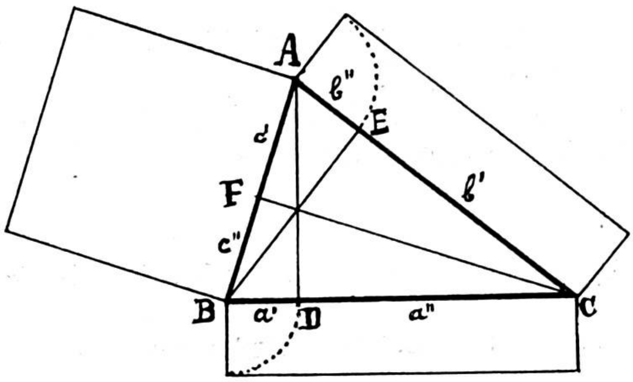

Fig 2.

Si un triangle renferme un angle obtus, le carré construit sur l'un des côtés adjacents est égal au rectangle construit sur le plus grand côté et la projection du premier sur lui diminué du rectangle construit sur le troisième côté et la projection du premier sur lui.

Remarque.

En prenant

$$\sin \alpha = \frac{h'''}{b} \text{ et } \cos \alpha = \frac{c'}{b}$$

la formule de sin $(\alpha + \beta)$ conduirait aussi à la première des relations (1); dans le cours des opérations il y aurait lieu toutefois de remplacer c c' par b b''. —

Cas particuliers.

1. $$C = 90^{o}.$$

Alors h' est confondu avec b et h'' avec a.

Par suite

$$a' = a,\ b'' = b$$

et la première des relations (1) devient :

$$c^2 = a^2 + b^2 \ldots \textit{ théorème de Pythagore.}$$

2. $$A = 90^{o}.$$

h'' est confondu avec c, donc $b'' = 0$.

La formule

$$c^2 = a\,a' + b\,b''$$

devient:

$$c^2 = a\,a'$$

ou:

Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moy. prop. entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.

*

Les relations (1) peuvent être mises sous une autre forme.

En effet :

$$c^2 = a\,a' + b\,b'' = a\,(a - a'') + b\,(b - b')$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - a\,a'' - b\,b'$$

mais

$$b\,b' = a\,a''$$

par suite

(2) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,a''.$$

(C est aigu). On retrouve ainsi le théorème de **Pythagore généralisé :**

Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins le double produit d'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.

(B). — Application de la formule de cos $(\alpha + \beta)$.

Déduction du théorème de Pythagore.

Soient α, β et γ les angles d'un triangle quelconque.

Nous avons alors (fig. 1) :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b}$$

mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'\,c}{b\,c} = \frac{a'}{c}\,\frac{c}{b} = \frac{a'}{c}\,\frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c}\,\frac{c'}{b} + \frac{a'\,c''}{b\,c}$$

Remplaçons

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c}\,\frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}\right]$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\,\cos\beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}\right]$$

or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$$

d'où a) $$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}$$

mais $$\left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{h'''}{b} = \dfrac{h''}{c} \\ \sin\beta = \dfrac{h'}{c} = \dfrac{h'''}{a} \end{array} \right.$$

Prenons d'abord

$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{h'''}{b}\,\frac{h'}{c}$$

par suite

$$\frac{h'\,h'''}{b\,c} = \frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c} = \frac{a\,c - a'\,c''}{b\,c}$$

ou

$$h'\,h''' = a\,c - a'\,c''$$

Par permutation cyclique on obtient deux nouvelles formules formant avec la première le groupe suivant :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h'\,h''' = a\,c - a'\,c'' \\ h''\,h' = b\,a - b'\,a'' \\ h'''\,h'' = c\,b - c'\,b'' \end{array} \right.$$

Les relations du groupe (3) donnent lieu au théorème suivant :

Théorème II.

Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.

*

Revenons à la relation a) ci-dessus :

$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}$$

et combinons d'autres valeurs de sin α et sin β pour former le produit sin α. sin β (fig. 1) :

$$\sin \alpha . \sin \beta = \frac{h'''}{b} \frac{h'''}{a}$$

d'où :

$$\frac{h'''^2}{a\,b} = \frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}$$

$$h'''^2 = a^2 - \frac{a\,a'\,c''}{c};$$

mais $a\,a' = c\,c''$, car $\cos \beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a}$

Il en résulte

$$h'''^2 = a^2 - c''^2$$

ou

(4) $$a^2 = c''^2 + h'''^2$$

La formule de cos $(\alpha + \beta)$ nous a donc permis de retrouver le **théorème de Pythagore** (triangle rectangle B C F).

*

En troisième lieu, nous pouvons aussi écrire :

$$\sin \alpha . \sin \beta = \frac{h''}{c} \frac{h'}{c}$$

d'où, si l'on compare avec l'égalité a) :

$$\frac{h'\,h''}{c^2} = \frac{a}{b} - \frac{a'\,c''}{b\,c}$$

$$h'\,h'' = \frac{a\,c^2}{b} - \frac{a'\,c''\,c}{b} = \frac{c\,(a\,c - a'\,c'')}{b}$$

Nous avons trouvé [formules (2)] :

$$h'\,h''' = a\,c - a'\,c''$$

Substituons

$$h'\,h'' = \frac{c\,h'\,h'''}{b}$$

d'où

(5) $$\frac{h''}{h'''} = \frac{c}{b}$$

Nous retrouvons une propriété connue :

Le rapport de deux hauteurs est égal au rapport inverse des côtés correspondants. —

Enfin, si l'on choisissait les valeurs encore disponibles de sin α et sin β pour obtenir le produit sin α. sin β, on arriverait aussi à la propriété précédente.

(C). — Application des formules de sin $(\alpha - \beta)$ et cos $(\alpha - \beta)$.

La formule de sin $(\alpha - \beta)$, appliquée au triangle quelconque, conduit aux relations (1) auxquelles a donné lieu celle de sin $(\alpha + \beta)$ et en appliquant la formule de cos $(\alpha - \beta)$ on retrouve les relations (3), (4) et (5) fournies par celle de cos $(\alpha + \beta)$.

(D). — Application de la formule $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Appliquée au triangle quelconque, cette formule permet d'établir le théorème suivant :

Théorème III.

Si d'un sommet B d'un triangle quelconque A B C on abaisse la ⊥ sur la bissectrice de l'angle A et de son pied S la ⊥ sur le côté A B, cette dernière perpendiculaire S T a toujours pour mesure la moitié de la hauteur issue du sommet B.

En effet, d'après la figure 3, la relation

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

peut s'écrire

$$\frac{B\ E}{c} = 2 \frac{S\ T}{A\ S} \frac{A\ S}{c}$$

d'où

(6) $$S\ T = \frac{B\ E}{2} = \frac{h''}{2}$$ c. q. f. d

On aurait de même

$$L\ M = \frac{h'''}{2}$$

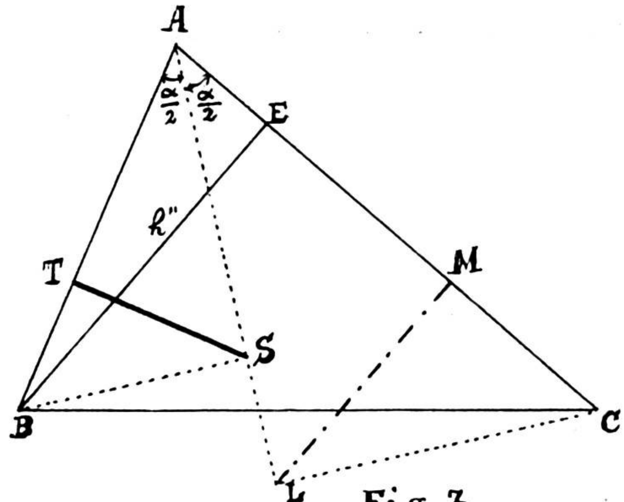

Fig 3

On arriverait au même résultat en prenant sin $\frac{a}{2} = \frac{B\ S}{c}$;
il faudrait alors remplacer le produit B S. A S par c. S T.

(E). — Application de la formule

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1.$$

Complétons la figure 3 pour obtenir la figure 4. En nous basant sur cette dernière, nous pouvons écrire la relation ci-dessus comme suit :

$$\frac{A\ E}{A\ B} = 2 \left(\frac{A\ S}{A\ B}\right)^2 - 1$$

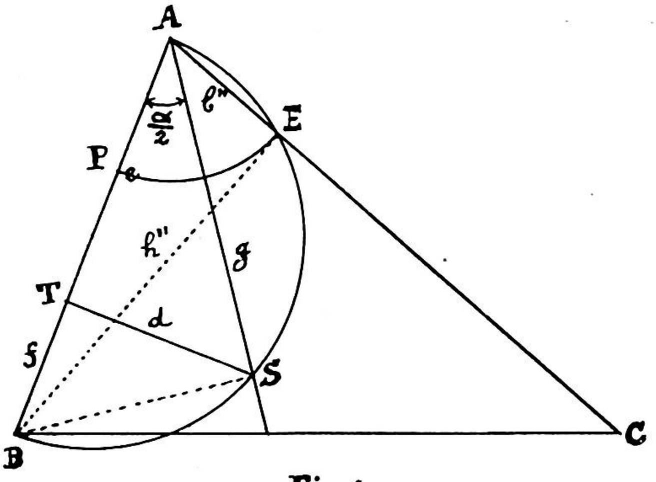

Fig 4.

Posons

A E = b'', A B = c, S T = d, A T = e, B T = f, A S = g.

L'égalité devient :

$$\frac{b''}{c} = 2\,\frac{g^2}{c^2} - 1$$

d'où

$$g^2 = \frac{c\,(c + b'')}{2}$$

mais

$$g^2 = c\,e$$

Remplaçons

$$ce = \frac{c\,(c + b'')}{2}$$

d'où

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} e &= \frac{c + b''}{2} \\ f &= \frac{c - b''}{2} \qquad \text{car } f = c - e \end{aligned} \right.$$

En outre

Par suite, T est le point milieu de B P et puisque S est situé sur le cercle décrit sur A B comme diamètre, on aboutit à la propriété suivante :

Théorème IV.

Si avec un sommet A d'un triangle quelconque comme centre et sa distance au pied E de la hauteur B E comme rayon on décrit un arc de cercle coupant le côté A B en P et qu'on élève au point milieu T du segment B P une perpendiculaire à A B sur laquelle on porte la moitié de la hauteur considérée B E, l'extrémité obtenue S appartient à la bissectrice de l'angle A et au cercle décrit sur le côté A B comme diamètre.

Remarque.

Dans le cas où l'angle A que traverse la bissectrice est obtus, la propriété reste la même, mais le point P tel que A P = A E doit être pris sur le prolongement du côté A B.—

*

Formons le produit e. f (fig. 4):

$$e\,f = \frac{c^2 - b''^2}{4}$$

Mais $d = e.\ \mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$ et $d = f.\ \mathrm{tg}\,(90 - \frac{a}{2})$

d'où $d^2 = e.\ f$

Remplaçons

$$d^2 = \frac{c^2 - b''^2}{4}; \quad \text{or} \quad d = \frac{h''}{2}$$

Donc $\frac{h''^2}{4} = \frac{c^2 - b''^2}{4}$

d'où $c^2 = h''^2 + b''^2$... *théorème de Pythagore.*

(F). — Application des relations entre les éléments d'un triangle rectangle.

(Déduction des théorèmes du triangle rectangle).

Soit A B C un triangle rectangle en A, p la projection de b sur l'hypoténuse a et q celle de c, h la hauteur.

Ces relations sont les suivantes :

1) *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle compris.*

2) *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier.*

D'après la première relation, on a :

$$b = a. \cos C \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p}{\cos C}$$

d'où (8) $b^2 = a. p$

c'est-à-dire :

(I) *Chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.*

D'après la seconde relation :

$$h = p. \ \text{tg } C \qquad \text{et} \qquad h = q. \ \text{tg } B$$

d'où $h^2 = p. \ q \ (\text{tg } C. \ \text{tg } B)$

mais $\text{tg } C. \ \text{tg } B = 1$

Par suite (9) $h^2 = p. \ q$ ou :

(II) *La hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

(G). — Application du théorème du Sinus.

(Déduction des théorèmes de Céva et de Ménélaüs).

1. Appliquons le théorème du sinus aux six triangles P A' B, P B' C, P C' A; P A' C, P B' A, P C' B (fig. 5) :

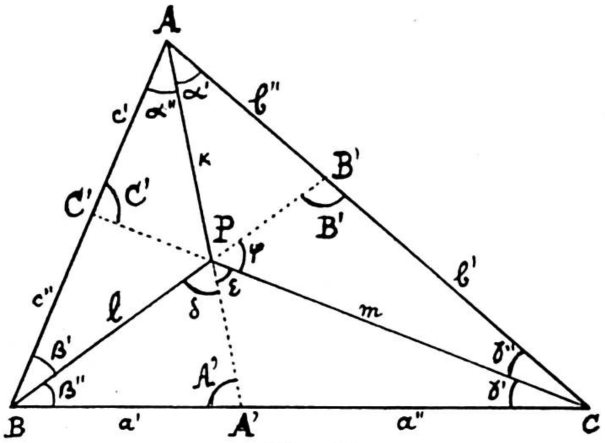

Fig 5.

$$\frac{a'}{l} = \frac{\sin \delta}{\sin A'}, \quad \frac{b'}{m} = \frac{\sin \varphi}{\sin B'}, \quad \frac{c'}{k} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin C'}$$

d'où

1) $$\frac{a'\,b'.\,c'.}{k.\,l.\,m} = \frac{\sin \delta.\,\sin \varepsilon.\,\sin \varphi}{\sin A'.\,\sin B'.\,\sin C'};$$

et

$$\frac{m}{a''} = \frac{\sin A'}{\sin \varepsilon}, \quad \frac{k}{b''} = \frac{\sin B'}{\sin \delta}, \quad \frac{l}{c''} = \frac{\sin C'}{\sin \varphi}$$

d'où

2) $$\frac{k.\,l.\,m}{a''.\,b''.\,c''} = \frac{\sin A'.\,\sin B'.\,\sin C'}{\sin \delta.\,\sin \varepsilon.\,\sin \varphi}$$

Multiplions 1) et 2) membre à membre :

$$\frac{a'.\,b'.\,c'}{a''.\,b''.\,c''} = 1$$

d'où résulte

(10) $$a'.\,b'.\,c' = a''.\,b''.\,c''$$

C'est la relation du

Théorème de Céva.

Trois transversales issues des trois sommets d'un triangle quelconque et se coupant en un même point déterminent sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.

Remarque.

En appliquant le théorème du sinus aux six triangles A B A', B C B', C A C'; A C A', B A B', C B C', on aboutirait aussi à la relation du théorème de Céva. On obtiendrait:

$$\frac{a'.\ b'.\ c'}{a''.\ b''.\ c''} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta'}\ \frac{\sin\beta''}{\sin\gamma'}\ \frac{\sin\gamma''}{\sin\alpha'} = \frac{l}{k}\ \frac{m}{l}\ \frac{k}{m}$$

d'où

$$a'.\ b'.\ c' = a''.\ b''.\ c''$$

Cas particulier.

En exprimant, dans un triangle quelconque, l'un quelconque des produits $\cos\alpha.\ \cos\beta.\ \cos\gamma$, $\sec\alpha.\ \sec\beta.\ \sec\gamma$, $\operatorname{tg}\alpha.\ \operatorname{tg}\beta.\ \operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{cotg}\alpha.\ \operatorname{cotg}\beta.\ \operatorname{cotg}\gamma$ de deux manières différentes et en égalant les deux expressions, on arrive à la relation du *théorème de Céva* pour le cas particulier où les transversales issues des sommets se coupent à l'orthocentre du triangle.

En effet (fig. 1) :

$$\cos\alpha = \frac{c'}{b} = \frac{b''}{c}\ ;\quad \cos\beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{b'}{a} = \frac{a''}{b}$$

Par suite

$$\cos\alpha.\ \cos\beta.\ \cos\gamma = \frac{c'}{b}\ \frac{a'}{c}\ \frac{b'}{a} = \frac{b''}{c}\ \frac{c''}{a}\ \frac{a''}{b}$$

d'où

$$a'.\ b'.\ c' = a''.\ b''.\ c''$$

*

2. Considérons un triangle A B C et une transversale coupant les côtés a, b, c respectivement aux points X, Y, Z et formant avec eux les angles δ, ε et γ (fig. 6).

D'après le théorème du sinus appliqué aux triangles A Y Z, B Z X, C X Y, nous avons successivement :

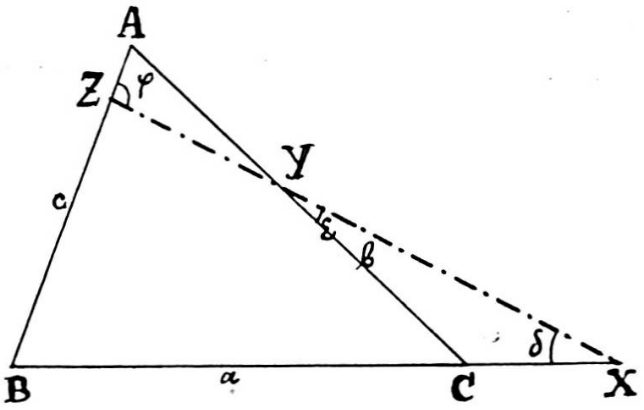

Fig 6.

$$\frac{A\ Y}{A\ Z} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon}\ ; \quad \frac{B\ Z}{B\ X} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}\ ; \quad \frac{C\ X}{C\ Y} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta}$$

Multiplions ces trois relations membre à membre :

$$\frac{A\ Y.\ B\ Z.\ C\ X}{A\ Z.\ B\ X.\ C\ Y} = 1$$

d'où

(11) $\qquad A\ Z.\ B\ X.\ C\ Y = A\ Y.\ C\ X.\ B\ Z,$ $\qquad$ c'est-à-dire :

Théorème de Ménélaüs.

Toute transversale située dans le plan d'un triangle détermine sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.

(H). — Application du théorème du Cosinus.

(Déduction des théorèmes de Ptolémée).

La figure 7 donne :

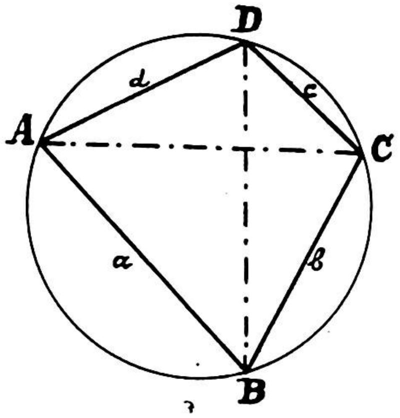

Fig 7.

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos B$$
$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2\,c\,d\cos B$$

d'où

$$\frac{a^2 + b^2 - \overline{AC}^2}{2\,a\,b} = \frac{\overline{AC}^2 - c^2 - d^2}{2\,c\,d}$$

De cette relation on tire :

1) $$AC = \sqrt{\frac{(a\,d + b\,c)\,(a\,c + b\,d)}{a\,b + c\,d}}$$

On trouverait de même

2) $$BD = \sqrt{\frac{(a\,b + c\,d)\,(a\,c + b\,d)}{a\,d + b\,c}}$$

En multipliant d'abord, puis en divisant les formules 1) et 2) membre à membre, on obtient :

(12) $$\left\{\begin{array}{l} AC.\,BD = a\,c + b\,d \\ \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{a\,d + b\,c}{a\,b + c\,d} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

Théorèmes de Ptolémée.

(I) *Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

(II) *Dans tout quadrilatère inscriptible, les diagonales sont entre elles dans le même rapport que les sommes des produits des côtés qui concourent avec elles.*

IV.

Application des formules du groupe (3).

1. — Soit A B C un triangle quelconque. Construisons le triangle A' B' C' ayant pour sommets les pieds des hauteurs. Les relations (3) permettent d'établir le théorème ci-dessous et d'exprimer les côtés du triangle A' B' C' en fonction de ceux du triangle A B C.

1° Partons de la seconde des relations (3) :

$$h'. h'' = a. b — a''. b'$$

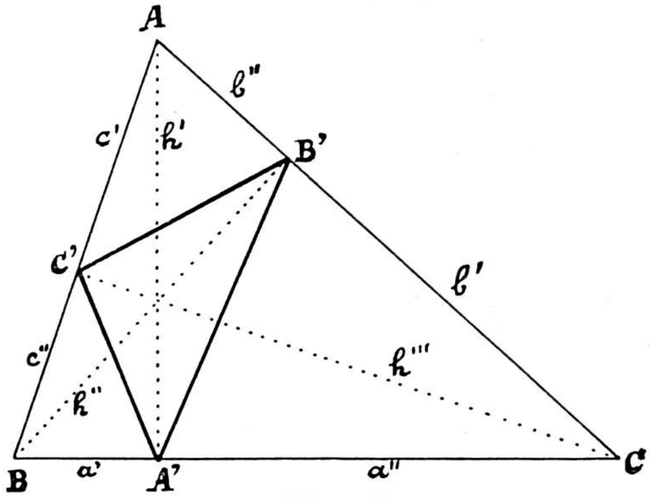

Fig 8.

La figure A B A' B' est un quadrilatère inscriptible; d'après le premier *théorème de Ptolémée,* le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits de ses côtés opposés :

$$h'.\,h'' = (A'\,B').\,c + a'\,b''$$

Par suite $$(A'\,B').\,c + a'\,b'' = a\,b - a''\,b'$$

d'où $$A'\,B' = \frac{a\,b - a'\,b'' - a''\,b'}{c}$$

Mais
$$a\,b = (a' + a'')\,(b' + b'') = a'\,b' + a''\,b'' + a'\,b'' + a''\,b'$$

Remplaçons, puis appliquons la permutation cyclique :

$$(13)\quad \begin{cases} A'\,B' = \dfrac{a'\,b' + a''\,b''}{c} \\[2mm] B'\,C' = \dfrac{b'\,c' + b''\,c''}{a} \\[2mm] C'\,A' = \dfrac{c'\,a' + c''\,a''}{b} \end{cases}$$

d'où

$$(13)'\quad \begin{cases} c.\,A'\,B' = a'\,b' + a''\,b'' \\ a.\,B'\,C' = b'\,c' + b''\,c'' \\ b.\,C'\,A' = c'\,a' + c''\,a'' \end{cases}$$

Nous obtenons donc le théorème suivant (relations (13 ')) :

Théorème V.

Le rectangle construit sur un côté d'un triangle quelconque et la distance des pieds des hauteurs abaissées sur les deux autres côtés est équivalent à la somme des rectangles construits sur les segments non consécutifs déterminés par ces hauteurs sur les côtés correspondants.

*

2° Exprimons maintenant les côtés du triangle A' B' C' des pieds des hauteurs en fonction de ceux du triangle A B C (fig. 8).

Nous avions (formule 13) :

$$A'\,B' = \frac{a'\,b' + a''\,b''}{c}$$

Or $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,b''$$

et $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,a''$$

d'où

$$a'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a} \qquad \text{et} \qquad b'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b}$$

En outre

$$a' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}$$

car $\quad a' = a - a'' \quad$ et $\quad b' = b - b''$

Portons ces valeurs dans l'expression de A' B' :

$$A'\,B' = \frac{\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdot \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}}{c}$$

$$A'\,B' = \frac{[a^2 + (b^2 - c^2)]\,[a^2 - (b^2 - c^2)] + [b^2 + (c^2 - a^2)]\,[b^2 - (c^2 - a^2)]}{4\,a\,b\,c}$$

ou, en effectuant et en simplifiant :

Par permutation... (14) et

$$\left\{\begin{aligned} A'\,B' &= \frac{c\,(a^2 + b^2 - c^2)}{2\,a\,b} \\ B'\,C' &= \frac{a\,(b^2 + c^2 - a^2)}{2\,b\,c} \\ C'\,A' &= \frac{b\,(c^2 + a^2 - b^2)}{2\,c\,a} \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules exprimant les côtés du triangle des pieds des hauteurs en fonction des côtés du triangle donné.

* * *

2. — Partons de la première des formules du groupe (3) :

$$h'\,h''' = a\,c - a'\,c''$$

D'autre part (fig. 1) $\quad \dfrac{h'}{h'''} = \dfrac{a'}{c''}$

Multiplions membre à membre :

$$h'^2 = \frac{a\,a'\,c}{c''} - a'^2$$

Or :

Deux sommets d'un triangle quelconque et les pieds des hauteurs qui en partent sont sur une circonférence ayant pour diamètre la distance de ces deux sommets :

A, B, D, E sont sur une circonférence de diamètre A B;
B, C, E, F » » » » B C;
C, A, F, D » » » » C A.

Par suite, d'après le théorème des sécantes :

$$a\,a'' = b\,b' \;;\quad b\,b'' = c\,c' \;;\quad c\,c'' = a\,a'$$

Remplaçons a a' par c c" dans h'^2 :

$$h'^2 = c^2 - a'^2$$

ou $c^2 = a'^2 + h'^2$... *Théorème de Pythagore.*

*

— Reprenons l'expression de h'^2 (fig. 1):

$$h'^2 = \frac{a\,a'\,(c' + c'')}{c''} - a'^2$$

ou $$h'^2 = a'\,(a - a') + \frac{a\,a'\,c'}{c''}$$

mais $$a\,a' = c\,c''$$

Donc
ou aussi, puisque c c' = b b"...

$$\left.\begin{aligned} h'^2 &= a'\,a'' + c\,c' \\ h'^2 &= a'\,a'' + b\,b'' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Les relations (15) donnent lieu au théorème suivant :

Théorème VI.

Le carré construit sur une hauteur d'un triangle quelconque est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant plus le rectangle ayant pour dimensions l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.

Cas particulier.

$A = 90^\circ$; $b'' = c' = 0$:

(15) devient : $$h'^2 = a'\,a''$$

On retrouve ainsi une relation connue.—

*

La seconde des égalités (15) peut s'écrire (fig. 1) :

$$h'^2 = a'\ a'' + b'\ b'' + b''^2$$

Par permutation $h''^2 = b'\ b'' + c'\ c'' + c''^2$

et $h'''^2 = c'\ c'' + a'\ a'' + a''^2$

d'où résulte

(I)' $h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2\,(a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'')$

En partant de l'autre égalité

$$h'^2 = a'\ a'' + c\ c',$$

on trouve, après les mêmes transformations :

(I)'' $h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2\,(a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'')$

De (I)' et (I)'' résulte :

(16) $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2$$

c'est-à-dire :

Théorème VII.

Les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs correspondantes sont égales.

La relation (16) a été établie sans l'intermédiaire du théorème de Pythagore.

Conséquence géométrique.

De (16) :

$$(b'^2 - b''^2) = (a''^2 - a'^2) + (c''^2 - c'^2)$$

ou

$$(b' + b'')\ \ (b' - b'') = (a'' + a')\ \ (a'' - a') + (c'' + c')\ \ (c'' - c')$$

ou (Fig. 9) :

$$b.\ C\ L = a.\ C\ K + c.\ B\ M$$

ou

$$\overline{C\ S}^2 = \overline{C\ R}^2 + \overline{B\ T}^2$$

Par suite les segments C S, C R et B T sont les côtés d'un triangle rectangle; d'où le théorème suivant :

Théorème VIII.

Si avec les pieds des hauteurs d'un triangle comme centres et les petits segments qu'elles déterminent sur les côtés correspondants comme rayons on décrit des circonférences et qu'aux points où elles coupent les grands segments on élève des ⊥ aux côtés jusqu'à leurs points d'intersection avec les circonférences décrites sur ces côtés comme diamètres, les distances de ces points aux extrémités des grands segments sont les côtés d'un triangle rectangle.

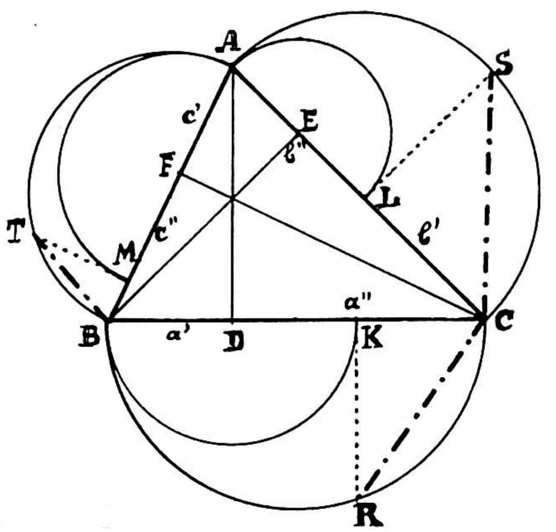

Fig 9.

Remarque.

De (I)' ou (I)'' on peut déduire le théorème de Pythagore en supposant A = 90°.

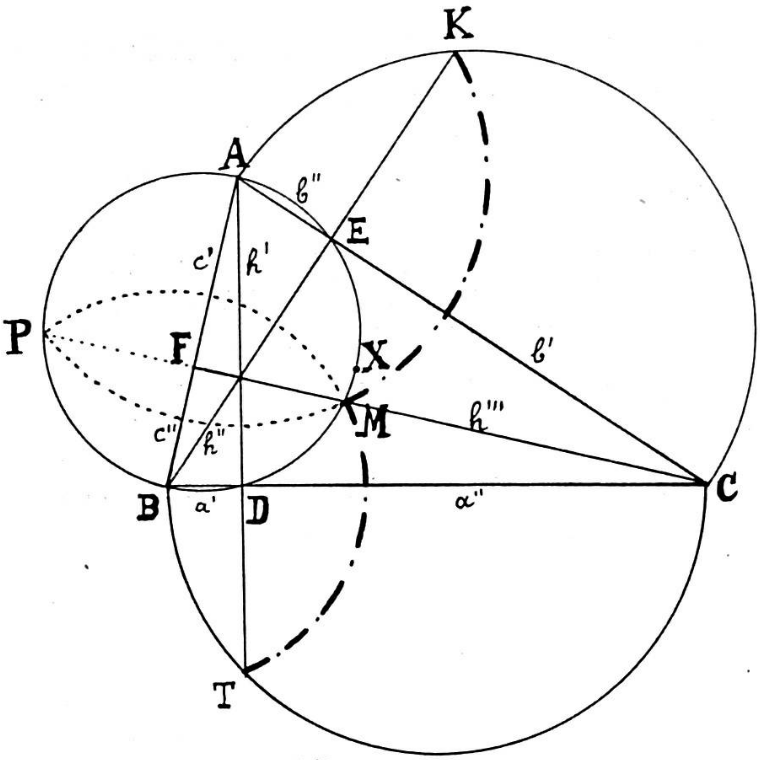

Fig 10.

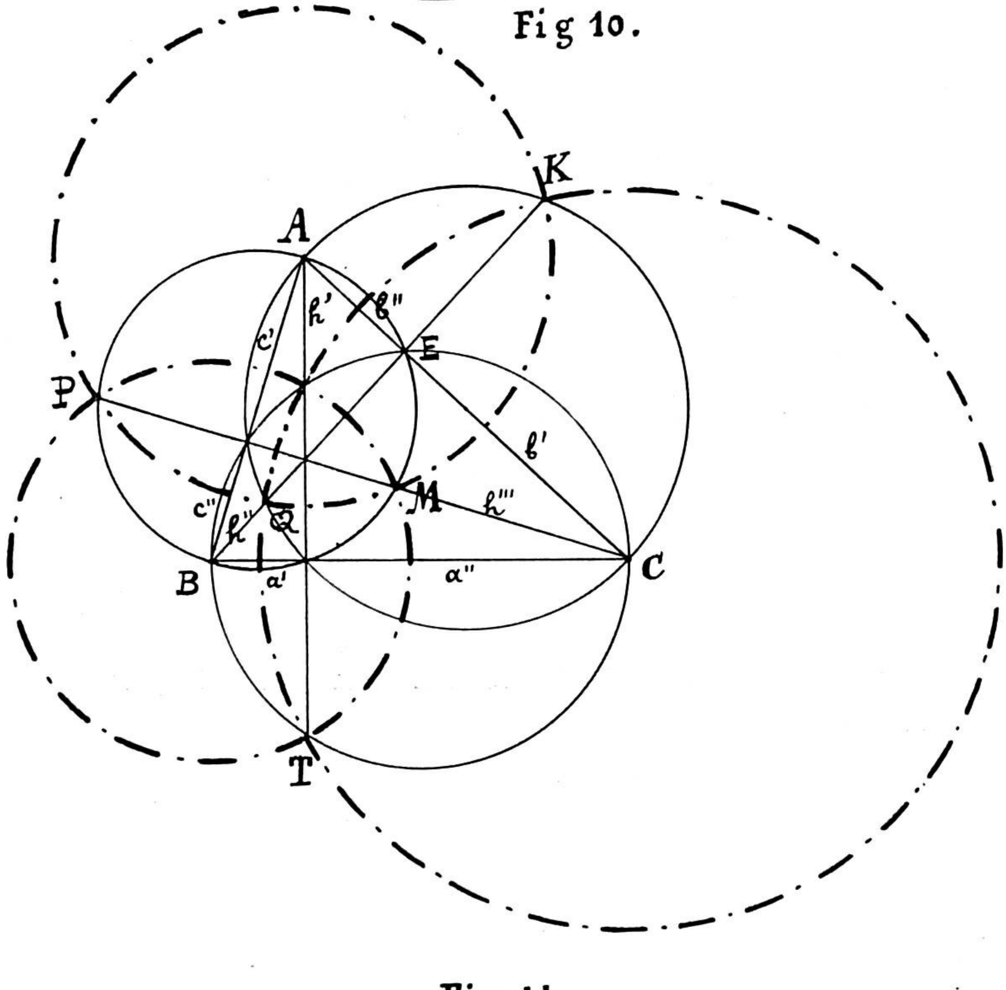

Fig 11.

V.

Application des formules du groupe (1)

1. Abaissons de deux sommets A et B d'un triangle A B C les hauteurs h' et h'' sur les côtés opposés B C et A C et prolongeons-les jusqu'à leurs points d'intersection T et K avec les circonférences décrites sur ces côtés comme diamètres. Puis dessinons des circonférences avec les extrémités A et B du troisième côté comme centres et leurs distances à ces points K et T comme rayons (fig. 10).

Soit *M* un point d'intersection de celles-ci.

Partons de la première des relations (1) :

$$c^2 = a\,a' + b\,b''$$

ou

$$c^2 = \overline{B\,T}^2 + \overline{A\,K}^2 = \overline{B\,M}^2 + \overline{A\,M}^2$$

Par suite, *M est situé sur la circonférence décrite sur A B comme diamètre.*

En outre, soit X le point d'intersection de cette circonférence et de la troisième hauteur h''' situé du même côté de A B que M. Nous avons :

1) $\overline{A\,X}^2 = c\,c' = b\,b''$

Mais 2) $\overline{A\,M}^2 = \overline{A\,K}^2 = b\,b''$

De 1) et 2) résulte $A\,M = A\,X$

On en conclut que *M est confondu avec X.*

Nous sommes donc conduits au théorème suivant :

Théorème IX.

Si l'on décrit des circonférences ayant pour centres les extrémités d'un côté d'un triangle acutangle et pour rayons leurs distances aux points d'intersection des hauteurs qui en partent avec les circonférences décrites sur les côtés opposés comme *diamètres, ces circonférences se coupent aux points d'intersection de la troisième hauteur et de la circonférence décrite sur le côté opposé comme diamètre.*

Du théorème ci-dessus découle le suivant :

Théorème X.

Si avec deux côtés d'un triangle comme diamètres on décrit des circonférences, elles sont coupées par les hauteurs correspondantes en quatre points situés sur une circonférence ayant pour centre le point d'intersection des deux côtés considérés (fig. 11).

Première démonstration (basée sur le théorème précédent).

D'après le théorème qui précède, les circonférences (A K) et (B T) de centres A et B se coupent aux points d'intersection M, P de la circonférence de diamètre A B et de la hauteur correspondante h'''. De même, les circonférences (A K) et (C T) de centres A et C se coupent aux points d'intersection K, Q de la circonférence de diamètre A C et de la hauteur correspondante h''. Les quatre points M, P, K, Q sont donc bien sur une même circonférence de centre A (rayon A K).

Deuxième démonstration.

Soient respectivement M, P et K, Q les points où les circonférences décrites sur les côtés A B et A C comme diamètres sont coupées par les hauteurs correspondantes h''' et h''.

M est le symétrique de P par rapport à A B, donc :

1) $$AP = AM$$

et Q le symétrique de K par rapport à A C, donc :

2) $$AQ = AK$$

mais

$$\overline{AK}^2 = b\,b'' \qquad \text{et} \qquad \overline{AM}^2 = c\,c'$$

d'où

3) $$AK = AM, \quad \text{car} \quad b\,b'' = c\,c'.$$

De 1), 2) et 3) résulte

$$AP = AM = AK = AQ.$$

Les quatre points M, P, K, Q sont donc sur une même circonférence de centre A.

Remarque.

Les trois circonférences de centres A, B, C et de rayons A K, B P, C T auxquelles donne lieu le théorème X ont pour *centre radical* l'orthocentre du triangle.

En effet, du théorème IX résulte que les cordes communes à ces trois circonférences sont les hauteurs du triangle A B C.

* * *

2. Considérons un cercle de rayon r; choisissons un point extérieur quelconque P que nous joignons aux extrémités d'un diamètre quelconque A B, puis envisageons le triangle A B P ainsi obtenu (fig. 12).

Soit $$BP = a, \quad PA = b, \quad AB = c.$$

Appliquons le théorème II au côté A B:

$$c^2 = a a' + b b''$$

$$c^2 - a(a - a'') + b(b - b')$$

d'où $$a^2 + b^2 - 2t^2 = 4r^2$$

ou (17) $$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2t^2 = 4r^2$$

Nous pouvons faire abstraction du triangle P A B et énoncer ce résultat sous forme de théorème :

Théorème XI.

La somme des carrés construits sur les distances d'un point extérieur **variable** *aux extrémités d'un diamètre* **quelconque** *d'un cercle fixe diminuée du carré inscrit dans le cercle ayant pour rayon la tangente du point considéré est une quantité constante et égale au carré construit sur le diamètre du cercle donné.*

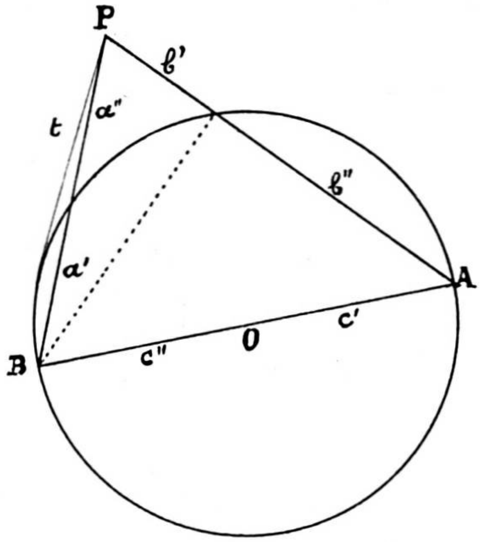

Fig 12.

La formule (17) est vérifiée directement dans les cas particuliers où le point P est sur la circonférence ou sur la tangente à l'une des extrémités du diamètre A B.

VI.

Conséquences résultant de la formule (17).

1. La formule (17) permet d'établir une nouvelle démonstration du **théorème de la médiane.**

Soit A B C un triangle quelconque et soit à déterminer la longueur de la médiane M_c du côté A B. Décrivons une circonférence sur A B comme diamètre et appliquons le théorème IX (formule 17) au point C (fig. 13):

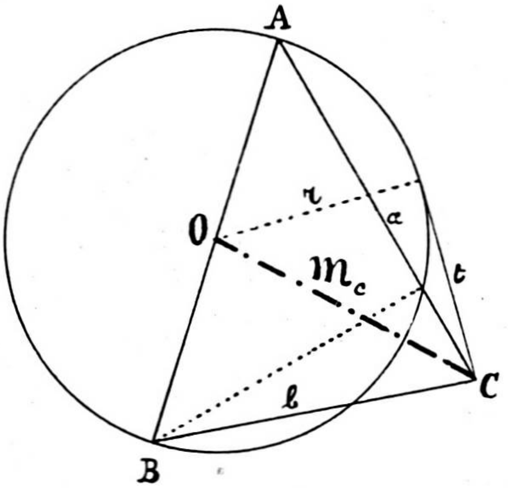

Fig 13.

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2t^2 = 4r^2$$

ou (fig. 13)... $$c^2 = a^2 + b^2 - 2t^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\left(M_c^2 - \frac{c^2}{4}\right)$$

d'où

(18) $$M_c^2 = \frac{a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}}{2}$$

C'est la formule exprimant une médiane d'un triangle en fonction des trois côtés.

*

2. Supposons que le point P soit *fixe* et la position du diamètre A B *variable* (fig. 14) :

Théorème XII.

Pour le même cercle, la somme des carrés construits sur les distances d'un point extérieur ***fixe*** *aux extrémités d'un diamètre* ***quelconque*** *est constante et égale au carré construit sur le diamètre augmenté du carré inscrit dans le cercle ayant pour rayon la tangente menée du point au cercle donné :*

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (2\,r)^2 + (t\sqrt{2})^2 = \text{const.}$$

*

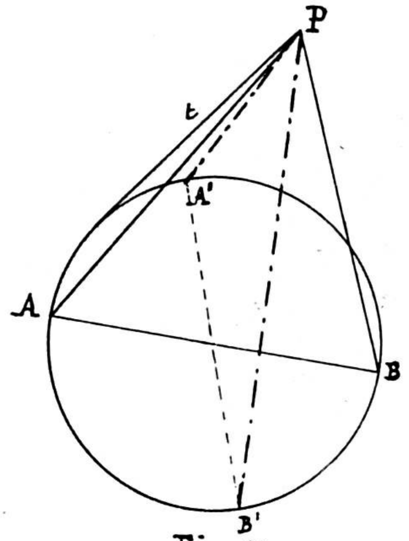

Fig 14.

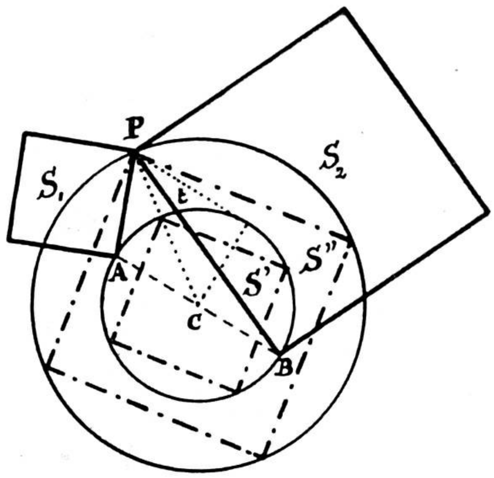

Fig 15.

$$S_1 + S_2 = S' + S''$$

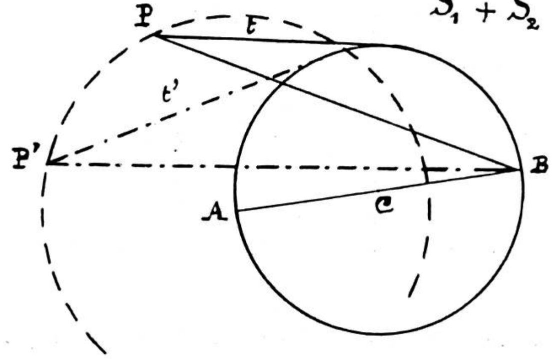

Fig 16.

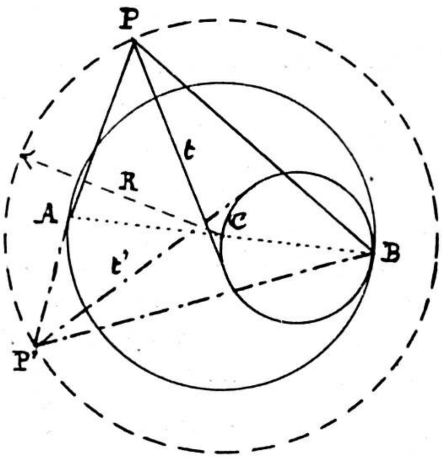

Fig 17.

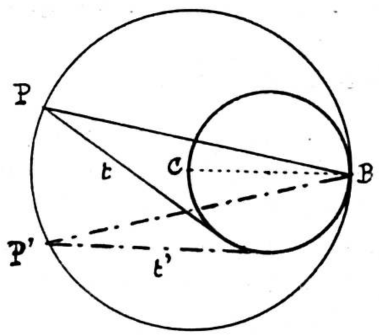

Fig 18.

3. Admettons que le point P soit *variable* mais assujetti à rester sur une circonférence concentrique au cercle donné et que la position du diamètre A B soit quelconque (fig. 15) :

Théorème XIII.

La somme des carrés construits sur les distances d'un point quelconque d'un cercle aux extrémités d'un diamètre quelconque d'un cercle intérieur concentrique est constante et égale à la somme des carrés inscrits dans les deux cercles.

En effet, nous avons (formule 17) :

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2t^2 = 4r^2$$

Ici, la longueur de la tangente t est la même pour chaque position de P : $t^2 = R^2 - r^2$

Remplaçons

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (r\sqrt{2})^2 + (R\sqrt{2})^2 = \text{const.}$$

ou $$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{P'A'}^2 + \overline{P'B'}^2 = \text{const.}$$

pour tous les points P, P',... sur la circonférence R et tous les diamètres A B, A' B',... du cercle r.

*

4. Supposons que P A soit constant, c'est-à-dire que le point P se déplace sur une circonférence ayant son centre à l'une des extrémités A du diamètre A B (fig. 16). La relation (17) devient :

$$\overline{PB}^2 - (t\sqrt{2})^2 = (2r)^2 - \overline{PA}^2 = \text{const.}$$

d'où :

Théorème XIV.

Si un point P se déplace sur une circonférence ayant pour centre une extrémité d'un diamètre d'un cercle donné, la différence entre le carré construit sur sa distance à l'autre extrémité du *diamètre et le carré inscrit dans le cercle ayant pour rayon la tangente du point P est constante et égale à la différence des carrés construits sur le diamètre du cercle donné et le rayon du cercle décrit par P.*

*

5. Soit P un point mobile sur une circonférence R, r un cercle concentrique et $\frac{r}{2}$ un cercle tangent intérieurement à r (fig. 17) :

Théorème XV.

Etant donnés deux cercles tangents intérieurement, le petit passant par le centre du grand, si un point P se déplace sur un cercle concentrique au grand : 1° Le carré inscrit dans le cercle ayant pour rayon la tangente du point P au petit cercle diminué du carré construit sur sa distance au point de contact des deux cercles est une quantité constante et égale à la différence des carrés construits sur les rayons des cercles concentriques. 2° Le carré construit sur la distance du point à l'extrémité du diamètre du point de tangence augmenté du carré inscrit dans le cercle dont le rayon est la tangente du point au petit cercle est une quantité constante et égale à la somme des carrés construits sur le rayon du grand cercle donné et sur le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle que décrit le point.

En effet :

1° Le cercle décrit par P ayant pour centre une extrémité C d'un diamètre du cercle $\frac{r}{2}$, on a, d'après le théorème précédent :

$$\overline{PB}^2 - 2\,t^2 = (2\,\frac{r}{2})^2 - R^2$$

ou

(I) $$2\,t^2 - \overline{PB}^2 = R^2 - r^2 = \text{const.}$$

La première partie est ainsi démontrée.

2° Le point P se déplaçant sur un cercle concentrique au cercle r, on a pour ce point par rapport au cercle r la relation (th. XIII) :

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\,r^2 + 2\,R^2$$

Additionnons avec (I) :

$$\text{(II)} \qquad \overline{PA}^2 + 2\,t^2 = r^2 + 3\,R^2 = \text{const.}$$

ce qui démontre la seconde partie.

En outre, si l'on additionne (I) et (II) :

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 + (2\,t)^2 = (2\,R)^2 = \text{const.},$$

donc indépendant des rayons des cercles donnés.

Cas particulier du théorème XV.

Si $R = r$, les relations (I) et (II) ci-dessus deviennent (fig. 18 et 19) :

$$\text{(I)'} \qquad \overline{PB}^2 = 2\,t^2 \quad \text{ou} \quad PB = t\sqrt{2}$$

$$\text{(II)'} \qquad \overline{PA}^2 + 2\,t^2 = 4\,r^2$$

et s'expriment comme suit :

Théorème XVI.

Pour deux cercles tangents intérieurement de rayons dans le rapport 1 : 2, chaque corde du grand menée par le point de contact est égale au côté du carré inscrit dans le cercle ayant pour rayon la tangente menée au petit cercle par l'extrémité de la corde.

Théorème XVII.

Etant donnés deux cercles tangents intérieurement de rayons dans le rapport 1 : 2, le carré construit sur la distance d'un

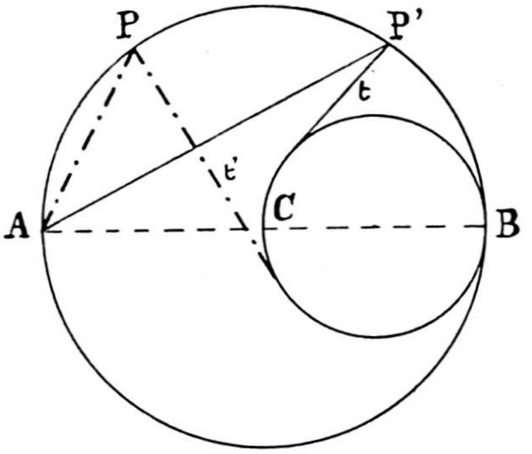

Fig 19.

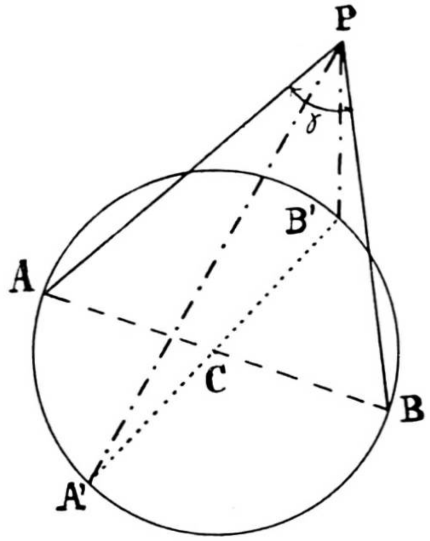

Fig 21.

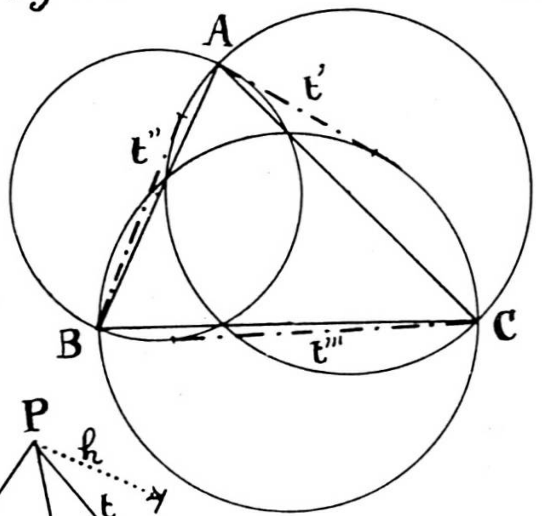

Fig 20.

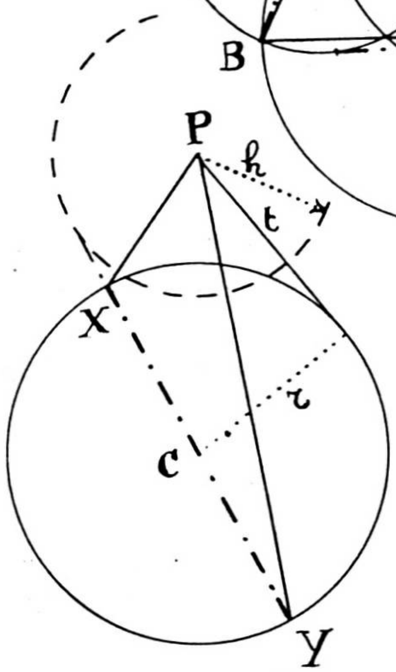

Fig 22

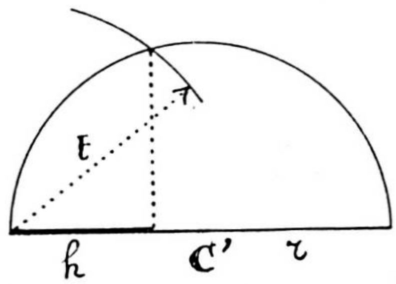

Fig 23

point P du grand à l'extrémité du diamètre du point de contact augmenté du carré inscrit dans le cercle dont le rayon est la tangente menée du point au cercle intérieur est une quantité constante et égale au carré construit sur le diamètre du grand cercle.

*

6. Soit A B C un triangle quelconque. Décrivons une circonférence sur chaque côté comme diamètre et menons-lui une tangente du sommet opposé; appelons a, b, c, les côtés du triangle, r', r'', r''' les rayons des circonférences et t', t'', t''' les longueurs des tangentes en question (fig. 20).

En appliquant le théorème IX, nous avons successivement :

$$a^2 + b^2 - 2\,t'''^2 = 4\,r'''^2$$
$$b^2 + c^2 - 2\,t'^2 = 4\,r'^2$$
$$c^2 + a^2 - 2\,t''^2 = 4\,r''^2$$

Additionnons membre à membre :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (t'\sqrt{2})^2 + (t''\sqrt{2})^2 + (t'''\sqrt{2})^2 \quad \text{ou :}$$

Théorème XVIII.

La somme des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle quelconque est équivalente à la somme des carrés inscrits dans les trois cercles ayant pour centres les sommets du triangle et pour rayons respectifs les tangentes menées de ces sommets aux circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres.

*

7. Soit A B un diamètre quelconque d'un cercle donné, P un point extérieur fixe ou mobile sur un cercle concentrique (fig. 21).

Nous avons (formule 17) :

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2\,t^2 = 4\,r^2$$

d'autre part

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2\,PA.\,PB\cos\gamma = 4\,r^2$$

d'où $\quad PA.\,PB.\cos\gamma = t^2$

ou, en désignant par S la surface du triangle P A B :

$$S.\ \text{cotg}\ \gamma = \frac{t^2}{2}$$

c'est-à-dire :

Propriété.

Etant donné un cercle, si l'on joint un point extérieur P fixe (ou mobile sur un cercle concentrique) aux extrémités d'un diamètre variable du cercle donné, le produit de la surface du triangle ainsi formé par la cotangente de l'angle en P est constant.

Cette propriété permet de résoudre le problème suivant :

Problème.

On donne un cercle de rayon *r* et un point extérieur P. Construire un diamètre de ce cercle tel que si l'on joint ses extrémités au point P, l'angle en P soit de 45° (fig. 22).

$$\gamma = 45^0;\ \text{cotg}\ \gamma = 1$$

La relation précédente devient :

$$1) \qquad 2\ S = t^2$$

Soit *h* la hauteur du triangle déterminé par le diamètre X Y cherché et le point P (fig. 23) :

$$2) \qquad 2\ S = 2\ r\ h$$

$$\text{De 1) et 2) :} \qquad t^2 = (2\ r)\ h$$

t est donc moyen proportionnel entre 2 r et h; *t* et *r* étant connus, on peut construire h. Connaissant *h*, on décrira avec P comme centre une circonférence de rayon *h* et on lui mènera du centre O du cercle *r* des tangentes qui coupent la circonférence *r* aux extrémités X Y, X' Y' des diamètres demandés. Il y a deux solutions.

Remarques.

1) Si $\gamma = 30^{\circ}$:

$$t^2 = 2\,S\,\sqrt{3} = (2\,r\,\sqrt{3})\,h$$

On peut construire la longueur $(2\,r\,\sqrt{3})$ puis h. On termine alors comme ci-dessus.

2) Si $\gamma = 60^{\circ}$:

$$t^2 = 2\,S\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\,r}{\sqrt{3}}\,h$$

On construit facilement $\frac{2\,r}{\sqrt{3}}$, puis h et par suite X Y et X' Y'.

3) Si γ est quelconque :

$$t^2 = 2\,S.\ \mathrm{cotg}\ \gamma = (2\,r.\ \mathrm{cotg}\ \gamma).\ h.$$

On construit la longueur $(2\,r.\ \mathrm{cotg}\ \gamma)$; on peut alors construire h, puis X Y et X' Y' comme dans le problème ci-dessus.

Porrentruy, Novembre 1913.