Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées, dans les aigus, sur une guitare?

Autor(en): **Félix, Charles**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **101 (1998)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

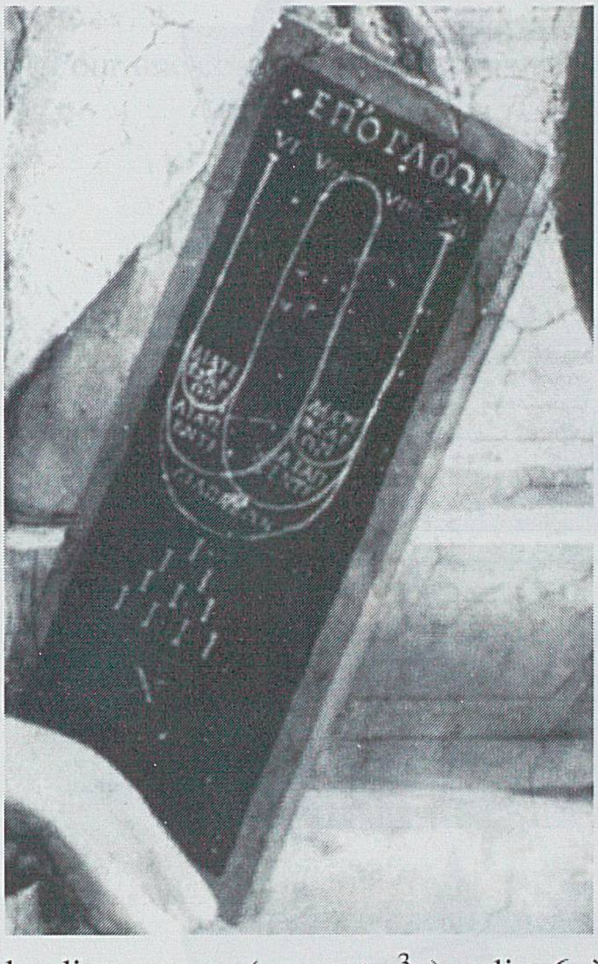
Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-684438

Pourquoi les frettes sont-elles plus serrées, dans les aigus, sur une guitare ?

Charles Félix d'après un article de Ian Stewart[1]

HARMONIE MUSICALE ET NOMBRES

Pythagore, intrigué par les rapports qui pouvaient lier la nature et les nombres, se rendit compte que les phénomènes naturels sont associés à des lois qui peuvent être traduites mathématiquement. Il en est ainsi notamment pour la musique. Une corde qui vibre engendre une note de base; un pincement situé à mi-longueur engendrera une note d'une octave plus haute et en harmonie avec la note de base; d'autres harmoniques seront obtenues en pinçant la corde en d'autres points qui sont des fractions simples (le tiers, le quart, le cinquième) de la longueur.



Dans ce détail de *L'Ecole d'Athènes* de Raphaël, on voit une tablette où est inscrit le mot ΕΠ''ΟΓΛΟΩΝ, qui désigne un entier augmenté de sa huitième partie ($1 + \frac{1}{8}$), c'est-à-dire le rapport associé à l'intervalle d'un ton. Au-dessous, on lit les mots ΔΙΑΤΕΣΣΑΡΩΝ (diatessaron), ΔΙΑΠΕΝΤΕ (diapente), ΔΙΑΠΑΣΩΝ (diapason) qui sont disposés de telle sorte que le diatessaron (rapport $\frac{3}{4}$) relie 6 à 8 et 9 à 12, le diapente (rapport $\frac{2}{3}$) 6 à 9 et 8 à 12 et le diapason (octave, rapport $\frac{1}{2}$) 6 à 12.

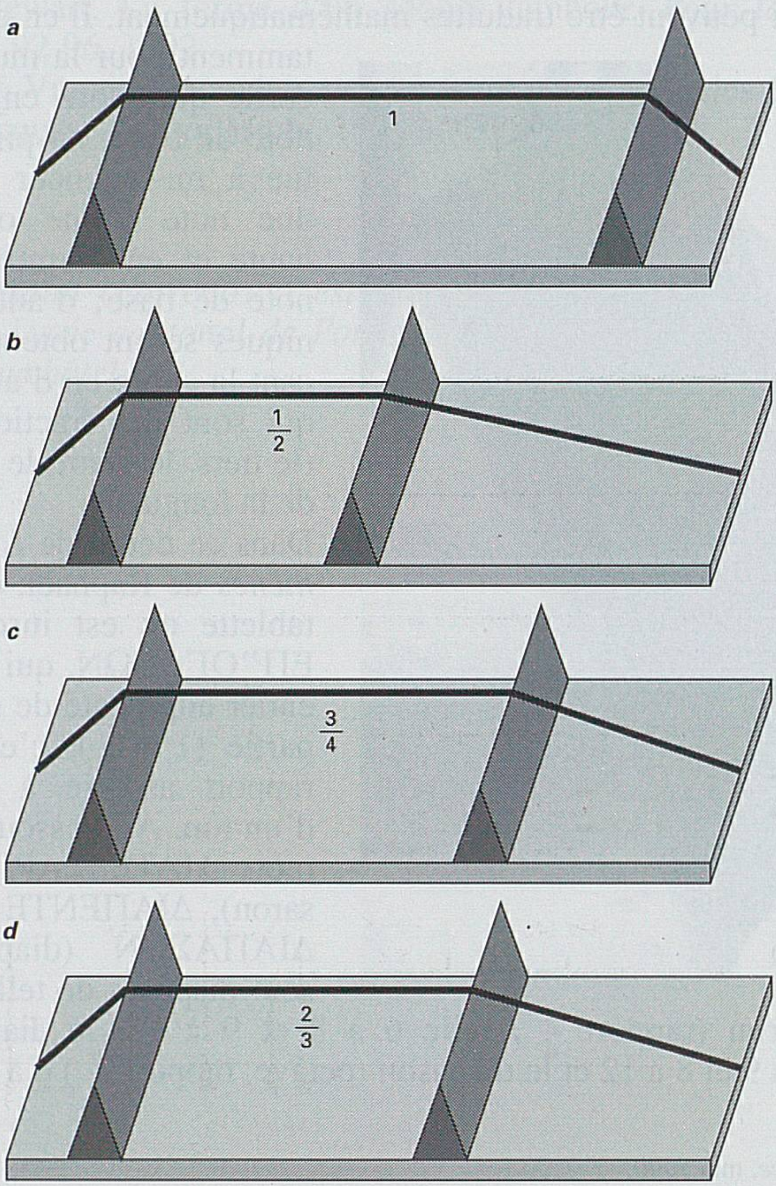
[1] *Pour la science*, mai 1990.

Les notes pythagoriciennes

Claude Ptolémée (150 après J. C., Alexandrie) décrit, dans son traité des *Harmoniques*, le système pythagoricien selon lequel les notes doivent être représentées par des rapports de nombres entiers :

$$\text{rapport} = \frac{\text{longueur de la corde pour la note de base}}{\text{longueur de la corde pour la note considérée}}$$

Ces rapports apparaissent expérimentalement sur un monocorde (guitare).

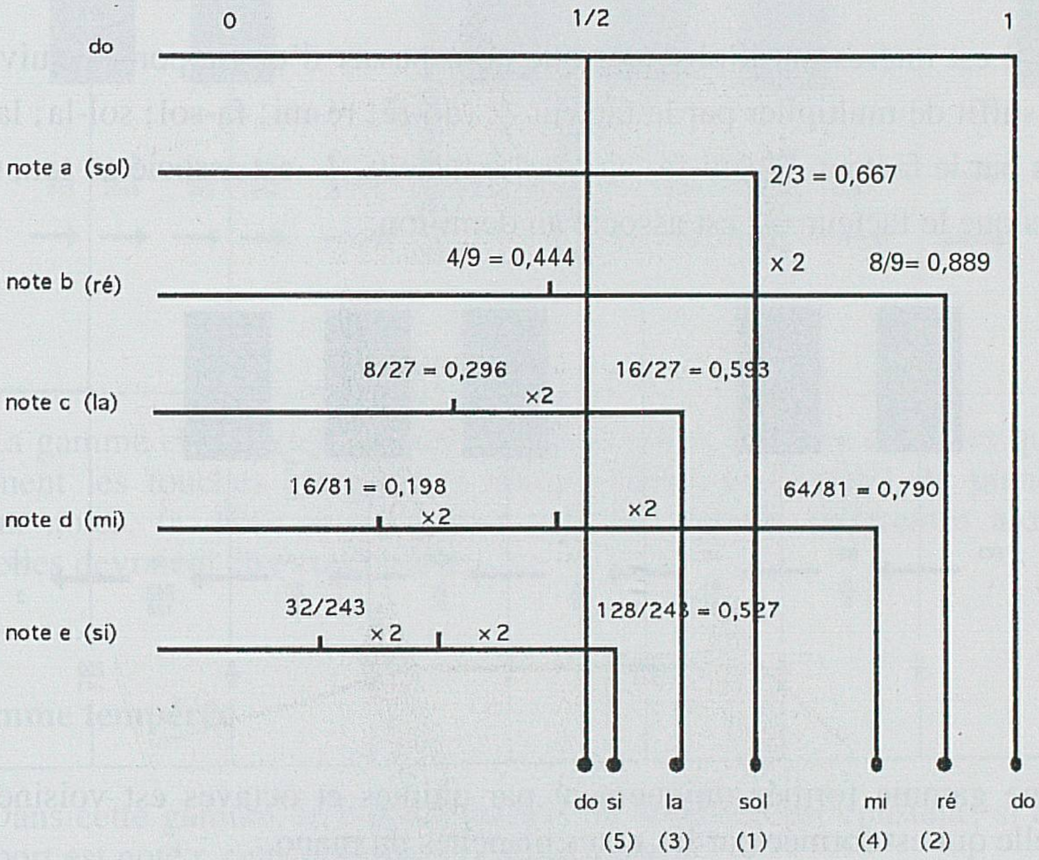


Le monocorde permet d'étudier les rapports d'harmonie entre les notes de musique. La corde complète donne la note de base (dessin a). La corde raccourcie de moitié (rapport 2/1) forme l'octave au-dessus de la note de base (dessin b). La corde raccourcie d'un quart (rapport 4/3) forme la quarte au-dessus de la note de base (dessin c). La corde raccourcie d'un tiers (rapport 3/2) forme la quinte au-dessus de la note de base (dessin d).

Idée pythagoricienne: rechercher, pour créer une échelle harmonieuse, les notes obtenues par *quintes successives*.

$$1 \xrightarrow[\text{quinte}]{\text{rapport } \frac{3}{2}} \overset{\text{note } a}{\frac{3}{2}} \xrightarrow[\text{quinte}]{\text{rapport } \frac{3}{2}} \overset{\text{note } b}{(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}} \xrightarrow[\text{quinte}]{\text{rapport } \frac{3}{2}} \overset{\text{note } c}{(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}} \xrightarrow[\text{quinte}]{\text{rapport } \frac{3}{2}} \overset{\text{note } d}{(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}},$$

Pour une corde de la longueur 1, on obtient

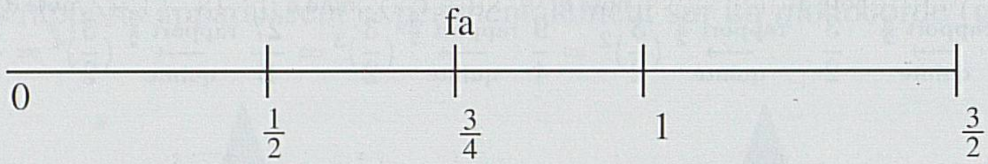


Remarque: chaque fois que la longueur de la corde est inférieure à $\frac{1}{2}$ on la double; ce qui permet de garder la même note mais une octave plus bas.

Les notes sont alors baptisées ainsi: note a: sol; note b: ré; note c: la; note d: mi; note e: si.

Il apparaît que l'écart entre mi et sol est plus grand que les autres; cette trop grande différence est réduite en introduisant une nouvelle note appelée fa et définie ainsi:

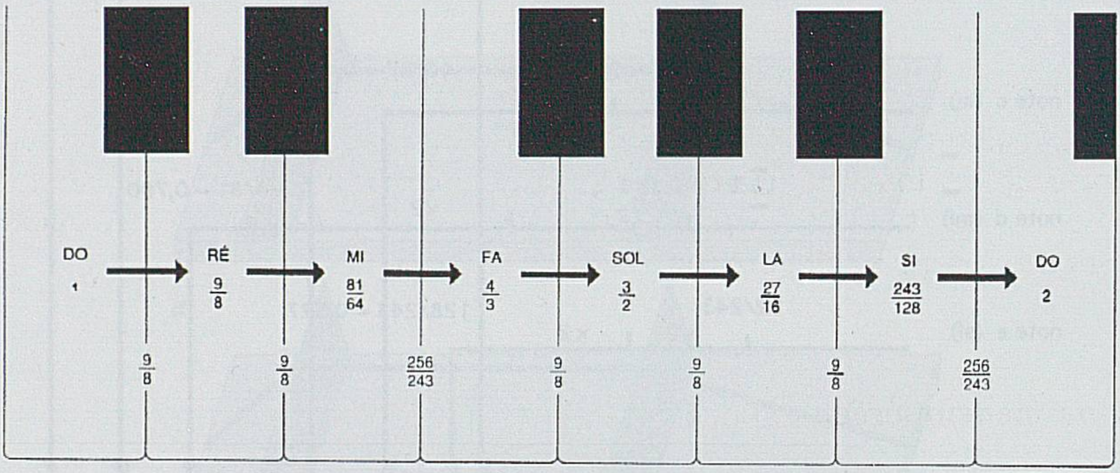
partir de la note de base, descendre d'une quinte (rapport $\frac{2}{3}$ ou longueur de la corde $\frac{3}{2}$), puis remonter d'une octave (rapport $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ou longueur de la corde $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$).



Les rapports associés aux notes sont donc les suivants:

rapports	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do

Il est intéressant d'observer que pour passer d'un rapport au suivant, il suffit de multiplier par le facteur $\frac{9}{8}$ (do-ré; ré-mi; fa-sol; sol-la; la-si) ou par le facteur $\frac{256}{243}$(mi-fa; si-do). Le facteur $\frac{9}{8}$ est associé au ton, tandis que le facteur $\frac{256}{243}$ est associé au demi-ton.

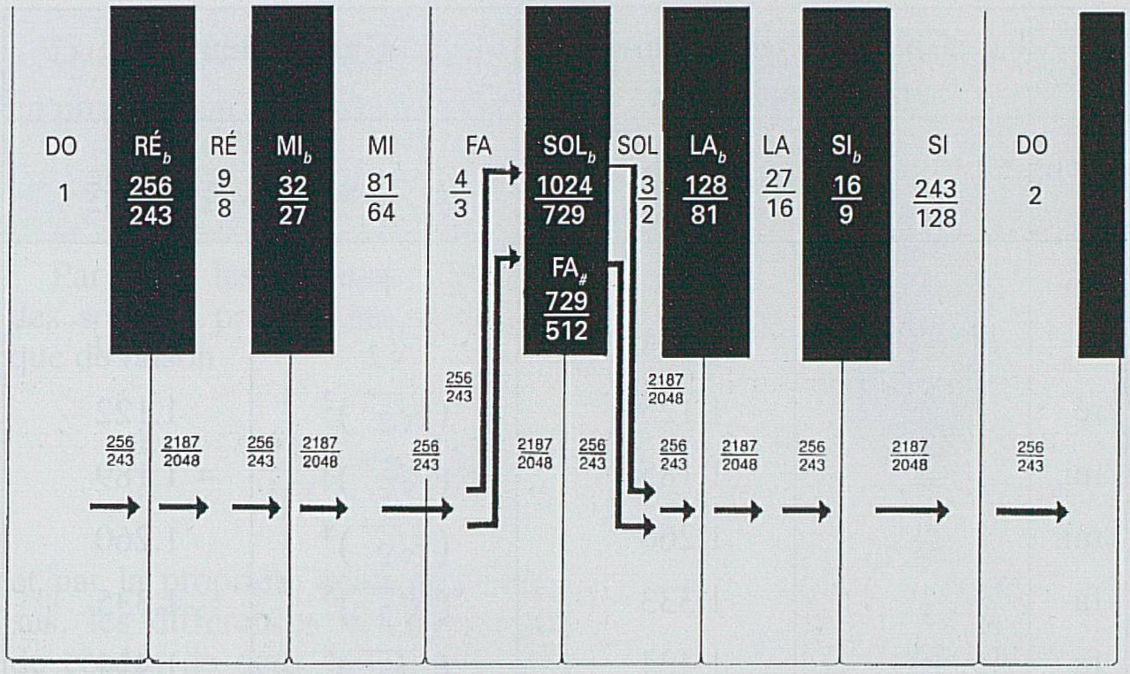


Une gamme formée uniquement par quintes et octaves est voisine de celle qui est formée par les notes blanches du piano.

La gamme chromatique (pythagoricienne)

Cette gamme comporte douze notes distantes d'un demi-ton ; entre do et ré apparaît ré bémol ou do dièse ; de même entre ré et mi apparaît une nouvelle note appelée mi bémol ou ré dièse ; ainsi de suite.

Puisque le demi-ton est associé au rapport $\frac{256}{243}$, on devrait avoir $\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$; or cette égalité est fausse et conduit à choisir pour le second facteur le rapport $\frac{2187}{2048}$ puisque $\frac{256}{243} \cdot \frac{2187}{2048} = \frac{9}{8}$. Ces deux rapports, légèrement différents, 1,0536 et 1,0679 introduisent un léger effet de dissymétrie ; à noter aussi la non superposition de $fa_{\#}$ (1,4238) et sol_{b} (1,4047).



La gamme chromatique comporte douze notes, voisines de celles que donnent les touches blanches et noires (dièses et bémols) du piano. Deux notes, fa dièse et sol bémol, ont des valeurs différentes alors qu'elles devraient être confondues.

Gamme tempérée

Dans cette gamme, le rapport associé au demi-ton est constant ; si ce rapport est noté r, cette condition conduit à poser :

$$r^{12} = 2$$

$$\text{ou :} \quad r = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946$$

La gamme fondée sur ce nombre est la gamme tempérée; elle permet des changements de clef en cours de morceau; cet avantage est largement utilisé par Bach.

Les pianos et les guitares (notes fixées) utilisent généralement la gamme tempérée.

En comparant le demi-ton pythagoricien $\frac{256}{243} = 1{,}05349$

avec le demi-ton de la gamme tempérée $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$

il apparaît que les rapports sont voisins et dans les deux cas, il sera question de demi-ton.

Pour résumer:

Table des rapports

	Gamme chromatique (pythagoricienne)		**Gamme tempérée**	
			$\mathbf{2^x}$ $\mathbf{x = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{12}{12}}$	
do	1	1	1	1
ré_b	$\frac{256}{243}$	1.053	$\sqrt[12]{2}$	1.059
ré	$\frac{9}{8}$	1.125	$(\sqrt[12]{2})^2$	1.122
mi_b	$\frac{32}{27}$	1.185	$(\sqrt[12]{2})^3$	1.189
mi	$\frac{81}{64}$	1.266	$(\sqrt[12]{2})^4$	1.260
fa	$\frac{4}{3}$	1.333	$(\sqrt[12]{2})^5$	1.335
$\text{fa}_\#$	$\frac{729}{512}$	1.424	$(\sqrt[12]{2})^6$	1.414
sol_b	$\frac{1024}{729}$	1.405	$(\sqrt[12]{2})^6$	1.414
sol	$\frac{3}{2}$	1.500	$(\sqrt[12]{2})^7$	1.498
la_b	$\frac{128}{81}$	1.580	$(\sqrt[12]{2})^8$	1.587
la	$\frac{27}{16}$	1.688	$(\sqrt[12]{2})^9$	1.682
si_b	$\frac{16}{9}$	1.778	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	1.782
si	$\frac{243}{128}$	1.898	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	1.888
do	2	2	2	2

POURQUOI LES FRETTES SONT-ELLES PLUS SERRÉES, DANS LES AIGUS, SUR UNE GUITARE ?

Propriété : si a_1, a_2, a_3, … sont les termes d'une progression géométrique de raison q, alors les différences $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, … sont aussi les termes d'une progression géométrique de même raison q.

En effet, $$\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \frac{a_1 q^k - a_1 q^{k-1}}{a_1 q^{k-1} - a_1 q^{k-2}} = \frac{a_1 q^{k-1}(q-1)}{a_1 q^{k-2}(q-1)} = q$$

Dans la gamme tempérée, les rapports correspondant aux notes sont en progression géométrique de raison $\sqrt[12]{2}$ (= r).

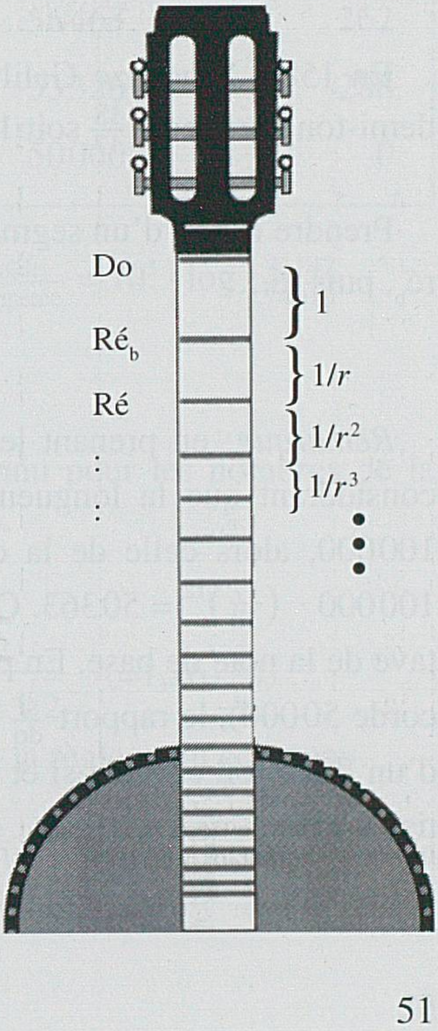
Par suite, les longueurs des cordes sont en progression géométrique de raison

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = 0{,}94387$$

et par la propriété énoncée ci-dessus, les différences des longueurs de cordes de deux notes consécutives sont donc en progression géométrique de raison

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \quad (<1)$$

Donc, plus on va dans les aigus, plus la différence des longueurs est petite, ce qui explique que les frettes d'une guitare sont de plus en plus rapprochées vers le centre.



CONSTRUCTION D'UNE GUITARE, D'UNE VIOLE, D'UN LUTH

Comme il est impossible de construire $\sqrt[3]{2}$ «à la règle et au compas», ce que les Grecs savaient déjà, il n'est pas possible non plus de construire $\sqrt[12]{2}$ $(= \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}})$ avec ces mêmes instruments. Dès lors, aux XVI^e et XVII^e siècles, les méthodes géométriques pour le placement des frettes ont suscité bien des recherches; et lorsqu'un procédé était mis au point par un artisan, il était jalousement gardé. Pour approcher $\sqrt[12]{2}$ Galilei proposa le nombre $\frac{18}{17}$ et Mersenne remplacera $\sqrt[3]{2}$ par $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$, deux nombres qui peuvent être construits à la règle et au compas. Strähle nous soumettra une construction «artisanale»…

Méthode de Galilei (1581)

En 1581, Vincenzo Galilei, père du fameux Galilée, proposa pour le demi-ton le rapport $\frac{18}{17}$ soit 1,05882 ($\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$)

Prendre les $\frac{17}{18}$ d'un segment est une construction aisée: on place ainsi ré$_b$, puis ré,…

Remarque: en prenant le rapport $\frac{18}{17}$ pour chaque demi-ton, et en considérant que la longueur de la corde de la note de base (do) est 100000, alors celle de la corde du do supérieur devrait être égale à $100000 \cdot (\frac{17}{18})^{12} = 50363$. Cette note ne se trouverait donc pas à une octave de la note de base. En plaçant l'octave correctement (longueur de la corde 50000), le rapport $\frac{\text{si}}{\text{do}}$ est de 1,06652, ce qui signifie qu'il y a plus d'un demi-ton entre le si et le do. Cette méthode n'est donc pas très satisfaisante.

Longueur de la corde

	Gamme tempérée	Galilei	Erreur *
do	100000	100000	0
$ré_b$	94387	94444	26
ré	89090	89198	52
mi_b	84090	84242	79
mi	79370	79562	105
fa	74915	75142	131
sol_b	70711	70967	157
sol	66742	67025	183
la_b	62996	63301	210
la	59460	59784	236
si_b	56123	56463	262
si	52973	53326	288
do	50000	50000	0

* Calcul de l'erreur : pour fa : $10^5 \times \log \frac{\text{Galilei}}{\text{tempérée}} = 10^5 \cdot \log \frac{75142}{74915}$

Méthode de Mersenne (1636)

En 1636, le moine Marin Mersenne (connu pour les nombres de la forme $2^n - 1$), propose d'approcher

$$\sqrt[3]{2}\ (=1{,}25992) \qquad \text{par} \qquad \frac{2}{3-\sqrt{2}}\ (=1{,}26120)$$

nombre qu'il est possible de construire « à la règle et au compas ».

Comme $\sqrt[3]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4$, il est aisé de construire, par l'approximation de Mersenne, la longueur correspondant à la note mi.

L'octave est ainsi partagée en deux parties: l'une contenant quatre demi-tons et l'autre huit demi-tons. Dans la première partie, un demi-ton vaut

$$t = \sqrt[4]{\frac{2}{3-\sqrt{2}}} = 1{,}05973$$

dans la deuxième partie

$$u = \sqrt[8]{2 : \frac{2}{3-\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{3-\sqrt{2}} = 1{,}05933^{(1)}$$

t et *u* peuvent être construits géométriquement.

Le tableau ci-dessous permet de comparer la longueur de la corde pour la gamme tempérée et pour la gamme de Mersenne.

Longueur de la corde

	Gamme tempérée	Mersenne	Erreur
do	100000	100000	0
$ré_b$	94387	94363	– 11
ré	89090	89044	– 22
mi_b	84090	84025	– 33
mi	79370	79289	– 44
fa	74915	75849	– 38
sol_b	70711	70657	– 23
sol	66742	66700	– 27
la_b	62996	62964	– 22
la	59460	59438	– 16
si_b	56123	56109	– 11
si	52973	52966	– 6
do	50000	50000	0

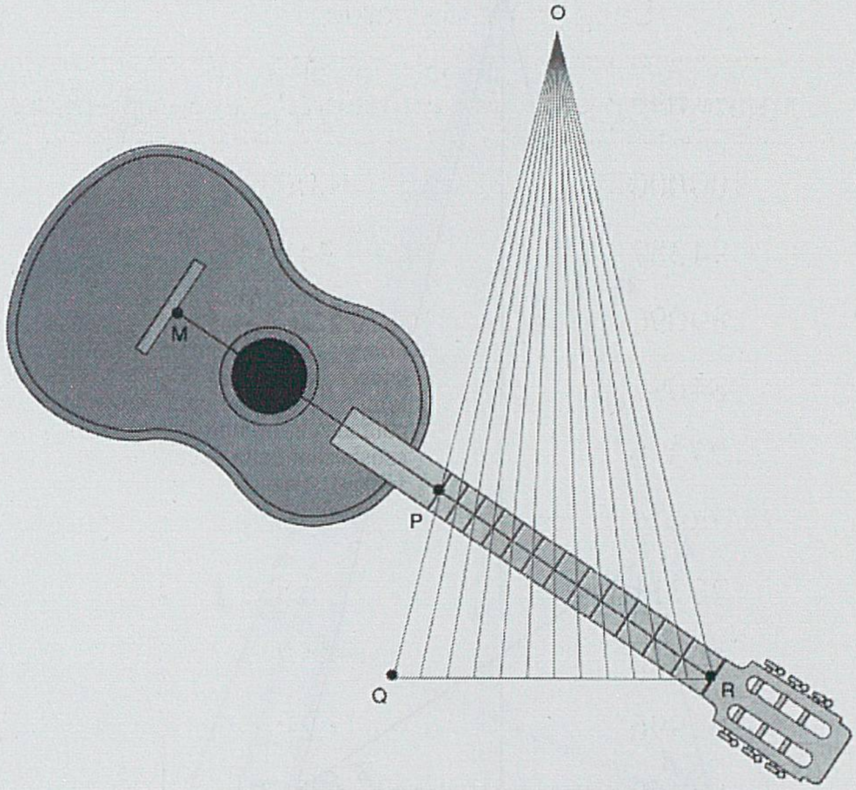
(1) Condition: $t^4u^8 = 2$, $u = \sqrt[8]{\frac{2}{t^4}}$; rappel: $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$

CONSTRUCTION DE STRÄHLE (1743)

Malgré la percée de Mersenne, la recherche d'une méthode de constructions géométriques du demi-ton continua.

En 1743, Daniel Strähle, un artisan sans aucune connaissance mathématique proposa une construction aussi simple qu'ingénieuse dans les *Comptes Rendus* de l'Académie de Suède.

Construction:



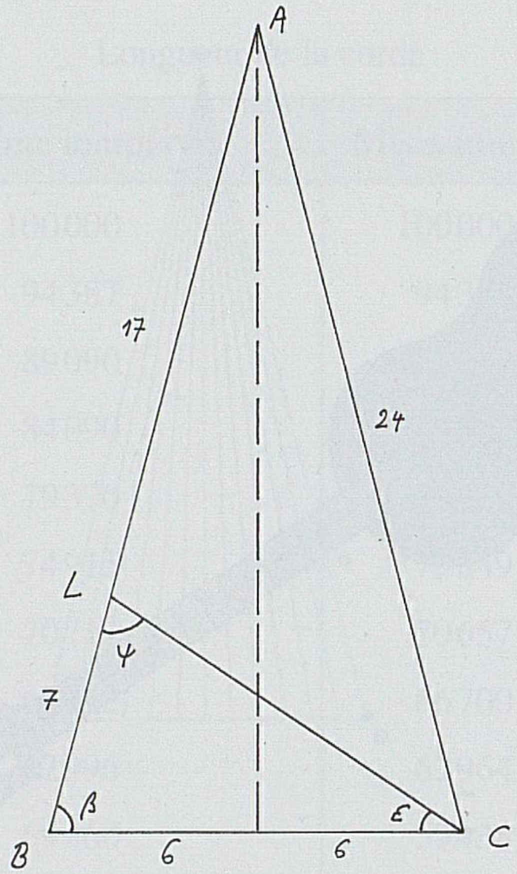
Tracer un segment QR de longueur 12 divisé en douze intervalles égaux. Tracer ensuite des segments OR et OQ égaux à 24. Joindre O aux onze points de partage de QR. Placer P sur OQ de sorte que QP soit égal à 7. Puis tracer la droite RP et le point M tels que PM soit égal à PR. Si RM est la corde de la note de base, alors PM correspond à l'octave. Strähle propose de considérer les onze points d'intersection de RP avec les onze rayons issus de O, comme les positions de frettes donnant les demi-tons.

Jacob FAGGOT calcula (~1776)

Quelle est la précision de cette construction? Pour l'évaluer, le géomètre et économiste Jacob Faggot effectua un calcul trigonométrique et ajouta son résultat à la suite de l'article de Strähle: il concluait que l'erreur maximale était de 1,7%, soit cinq fois supérieure à ce que tolèrent les musiciens.

Faggot était un des fondateurs de l'Académie de Suède; il en fut le secrétaire pendant trois ans et publia dix-huit articles dans les *Comptes Rendus*.

Effectuons quelques calculs (à la Faggot…) et calculons les longueurs de corde



pour β:

$$\cos\beta = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ d'où } \beta = 75{,}52°$$

pour ε:

$$LC^2 = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cdot \cos\beta = 49 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 0{,}25$$
$$= 49 + 144 - 42 = 151 \quad \text{d'où } LC = \sqrt{151} = 12{,}29$$

puis:

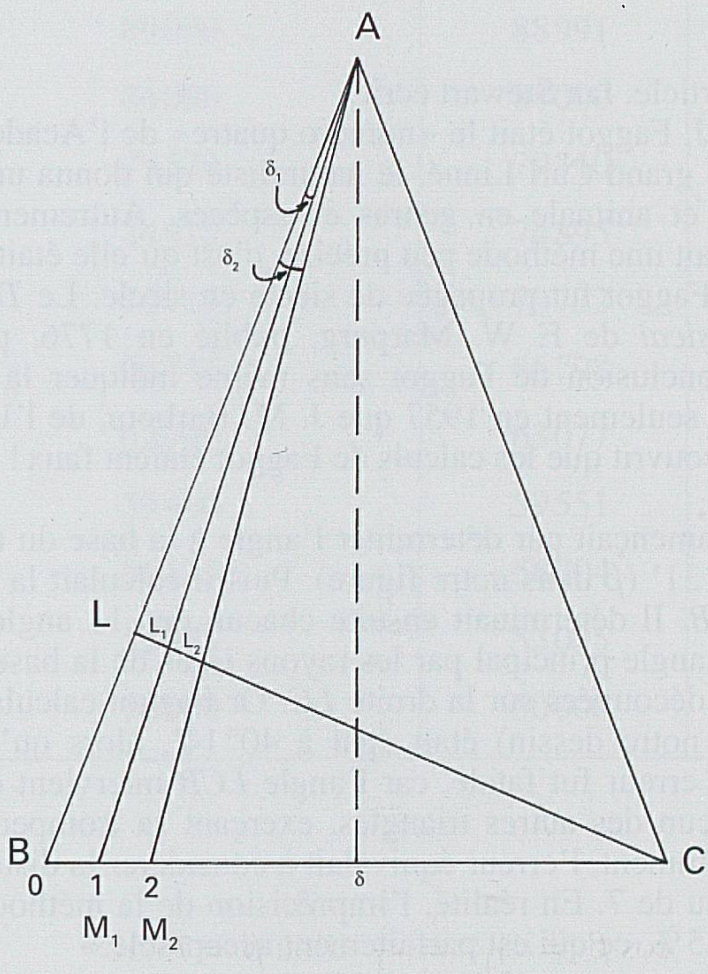
$$\frac{\sin \varepsilon}{7} = \frac{\sin 75{,}52°}{\sqrt{151}} \qquad \sin \varepsilon = \frac{7 \cdot \sin 75{,}52°}{\sqrt{151}} = 0{,}5516$$

d'où $\varepsilon = 33{,}47°$

pour ψ:

$$\psi = 180° - 75{,}52° - 33{,}4° = 71{,}01°$$

Calcul de LL_1 (distance entre les frettes do et si) et LL_2 (distance entre les frettes do et si_b)



Les mesures des angles α_1, α_2, … sont aisément calculées en appliquant les théorèmes du cosinus et du sinus aux triangles ABM_1, ABM_2, …

Ainsi :

$$LL_1 = \frac{17 \cdot \sin 2{,}33°}{\sin 68{,}68°} \cong 0{,}7434 \qquad LL_2 = \frac{17 \cdot \sin 4{,}71°}{\sin 66{,}30°} \cong 1{,}5242$$

Il est facile de poursuivre ainsi et de calculer les longueurs des cordes ; en partant des valeurs ci-dessus, et par une simple proportion, on trouve : pour si : 53025, pour si bémol : 56204,… (voir tableau page suivante). C'est probablement ce procédé qu'appliqua Faggot.

J.-M. Barbour contrôla (1957)

Dans son article, Ian Stewart écrit :

« En 1776, J. Faggot était le « numéro quatre » de l'Académie de Suède, derrière le grand Carl Linné, le naturaliste qui donna une classification végétale et animale en genres et espèces. Autrement dit, quand Faggot déclarait une méthode peu précise, c'est qu'elle était peu précise. L'opinion de Faggot fut propagée de siècle en siècle. Le *Traité du tempérament musical* de F. W. Marpurg, publié en 1776, par exemple, présente la conclusion de Faggot sans même indiquer la méthode de Strähle. C'est seulement en 1957 que J. M. Barbour, de l'Université du Michigan, découvrit que les calculs de Faggot étaient faux !

Faggot commençait par déterminer l'angle à la base du triangle principal, soit 75° 31' (β dans notre figure). Puis il calculait la longueur *LC* et l'angle *LCB*. Il déterminait ensuite chacun des 11 angles formés au sommet du triangle principal par les rayons issus de la base et déduisait les longueurs découpées sur la droite *LC*. Or Faggot calcula que l'angle *LCB* (ε dans notre dessin) était égal à 40° 14', alors qu'il est égal à 33° 28'. Cette erreur fut fatale, car l'angle *LCB* intervient dans la résolution de chacun des autres triangles, exerçant sa trompeuse influence sur tous. Notamment, l'erreur équivalait à considérer la distance *LB* égale à 8,6 au lieu de 7. En réalité, l'imprécision de la méthode de Strähle est égale à 0,15 %, ce qui est parfaitement acceptable. »

Strähle. Placement des frettes

En poursuivant les calculs commencés plus haut, il est possible de dresser le tableau ci-dessous :

Longueur de la corde

	Gamme tempérée	Srähle	Erreur
do	100000	100000	0
$ré_b$	94387	94323	– 32
ré	89090	88991	– 49
mi_b	84090	84000	– 46
mi	79370	79310	– 33
fa	74915	74895	– 9
sol_b	70711	70732	11
sol	66742	66798	38
la_b	62996	63077	58
la	59460	59551	65
si_b	56123	56204	60
si	52973	53025	38
do	50000	50000	0

Nous verrons plus loin comment, à l'aide de la notion de projection centrale - la construction de Strähle ne nous y pousse-t-elle pas ? – il apparaîtra tout naturellement une fonction, que nous nommerons fonction de Strähle, et qui nous livrera, par un calcul élémentaire, la longueur de la corde. Il sera alors simple de comparer cette fonction à la fonction 2^x.

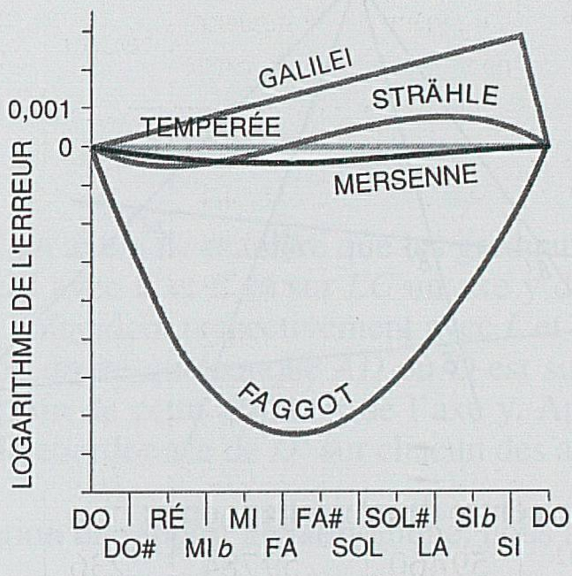
COMPARAISON DES DIVERSES APPROXIMATIONS ET DES ERREURS ASSOCIÉES

Les tableaux ci-dessous permettent de comparer la longueur de la corde des constructions de Galilei, Mersenne et Strähle, avec celle de la gamme tempérée ; voir aussi les « résultats » obtenus par Faggot…

Les courbes illustrent les erreurs associées à ces constructions et invitent à les commenter et… à choisir.

	Gamme tempérée		Approximation de Galilei		Approximation de Mersenne	
Notes	**2^x**	**longueur de la corde**	**longueur de la corde**	**erreur**	**longueur de la corde**	**erreur**
do	2	100000	100000	0	100000	0
ré_b	$2^{11/12}$	94387	94444	26	94363	– 11
ré	$2^{10/12}$	89090	89198	52	89044	– 22
mi_b	$2^{9/12}$	84090	84242	79	84025	– 33
mi	$2^{8/12}$	79370	79562	105	79289	– 44
fa	$2^{7/12}$	74915	75142	131	75849	– 38
sol_b	$2^{6/12}$	70711	70967	157	70657	– 23
sol	$2^{5/12}$	66742	67025	183	66700	– 27
la_b	$2^{4/12}$	62996	63301	210	62964	– 22
la	$2^{3/12}$	59460	59784	236	59438	– 16
si_b	$2^{2/12}$	56123	56463	262	56109	– 11
si	$2^{1/12}$	52973	53326	288	52966	–6
do	1	50000	50000	0	50000	0

Approximation de Strähle (calculs de Faggot)		Approximation de Strähle	
longueur de la corde	**erreur**	**longueur de la corde**	**erreur**
100000	0	100000	0
93790	– 276	94323	– 32
88110	– 479	88991	– 49
82900	– 619	84000	– 46
78090	– 706	79310	–33
73650	– 740	74895	– 9
69530	– 732	70732	11
65700	– 683	66798	38
62130	– 601	63077	58
58810	– 478	59551	65
55880	– 344	56204	60
52740	– 192	53025	38
50000	0	50000	0



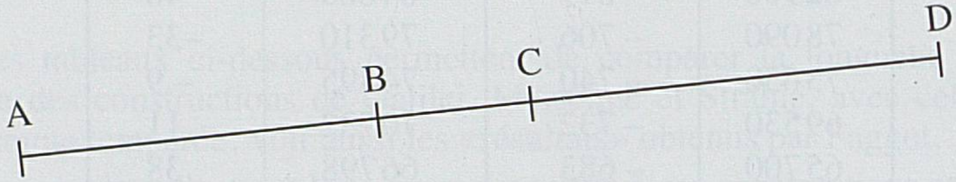
Ces courbes représentent les erreurs des diverses approximations de la gamme tempérée; elles sont exprimées par le logarithme du rapport de la valeur approchée à la valeur exacte.

FONCTION HOMOGRAPHIQUE DE STRÄHLE

Rapport anharmonique. Propriété

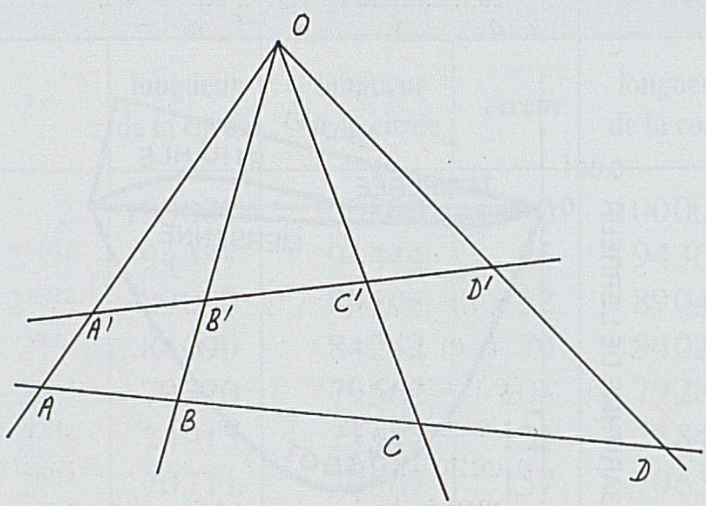
Etant donné quatre points A, B, C, D sur un axe, dans un ordre quelconque, on appelle rapport anharmonique (ou birapport) le nombre r:

$$r = \frac{\overline{CA}}{CB} : \frac{\overline{DA}}{DB} \quad \text{noté} \quad (ABCD)$$



$$\text{ici} \quad r = \frac{5}{1{,}5} : \frac{9}{5{,}5} \cong 2{,}04$$

Propriété: le rapport anharmonique est conservé par projection centrale



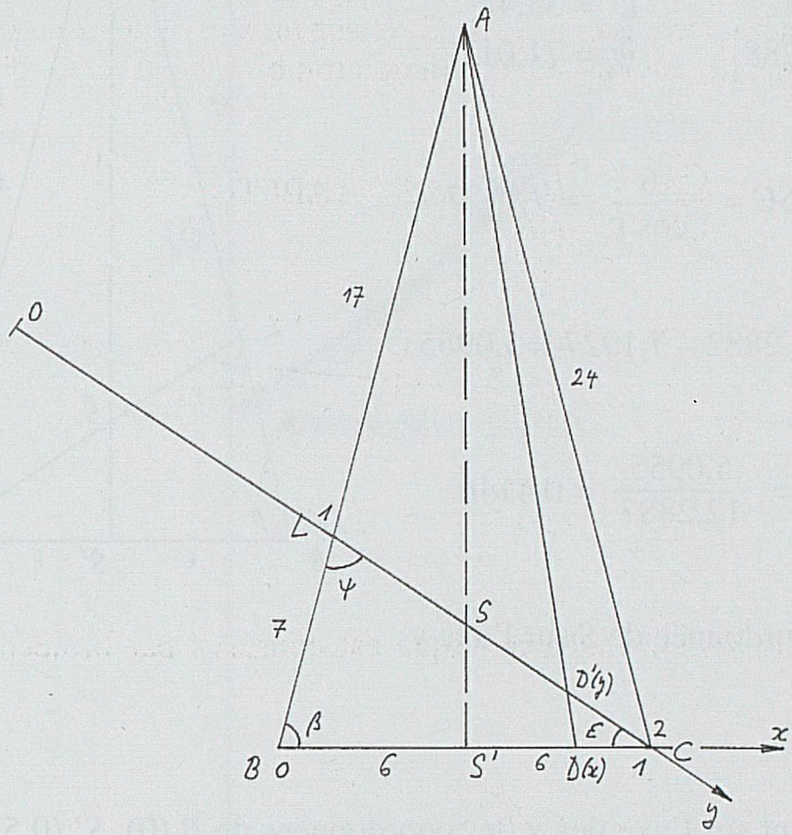
Ainsi, si O est le centre de projection, on a:

$$(ABCD) = (A'\ B'\ C'\ D')$$

ou
$$\frac{\overline{CA}}{CB} : \frac{\overline{DA}}{DB} = \frac{\overline{C'A'}}{C'B'} : \frac{\overline{D'A'}}{D'B'}$$

Fonction homographique de Strähle

Reprenons la construction de Strähle



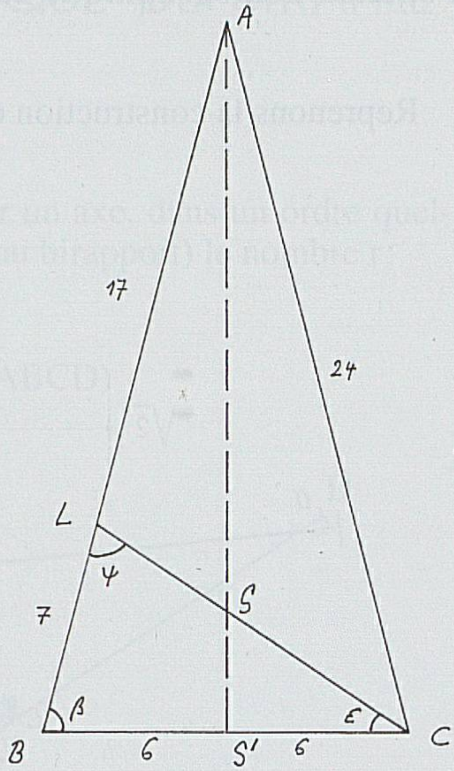
Plaçons sur BC un axe x de manière que les graduations 0 et 1 coïncident respectivement avec B et C et sur LC un axe y de manière que les graduations 1 et 2 coïncident respectivement avec L et C.

Considérons une droite quelconque AD où D est sur l'axe x. Soit D' le point d'intersection de cette droite et de l'axe y. Appelons x la coordonnée de D et y la coordonnée de D' sur chacun des axes.

Par la conservation du rapport anharmonique, nous avons:

$$\frac{\overline{DS'}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{CS'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{D'S}}{\overline{D'L}} : \frac{\overline{CS}}{\overline{CL}} \qquad (1)$$

Calculons encore la coordonnée de S :
pour mémoire, nous avions obtenu :



$\beta = 75{,}52°$ $\varepsilon = 33{,}47°$
LC $= 12{,}288$ $\psi = 71{,}01°$

$$\text{par suite, } SC = \frac{6}{\cos \varepsilon} = 7{,}1927$$

et $LS = 12{,}2882 - 7{,}1927 = 5{,}0955$

$$\text{Et : } \frac{\overline{LS}}{LC} = \frac{5{,}0955}{12{,}2887} = 0{,}4146$$

d'où la coordonnée de S sur l'axe y :
1,4146

Connaissant sur l'axe des x, les coordonnées de B (0), S' (0,5), D (x), C (1), et sur l'axe des y celles de L (1), S (1,4146), D'(y) et C (2), nous avons, par substitution dans (1) :

$$\frac{0{,}5 - x}{0 - x} : \frac{0{,}5 - 1}{0 - 1} = \frac{1{,}4146 - y}{1 - y} : \frac{1{,}4146 - 2}{1 - 2}$$

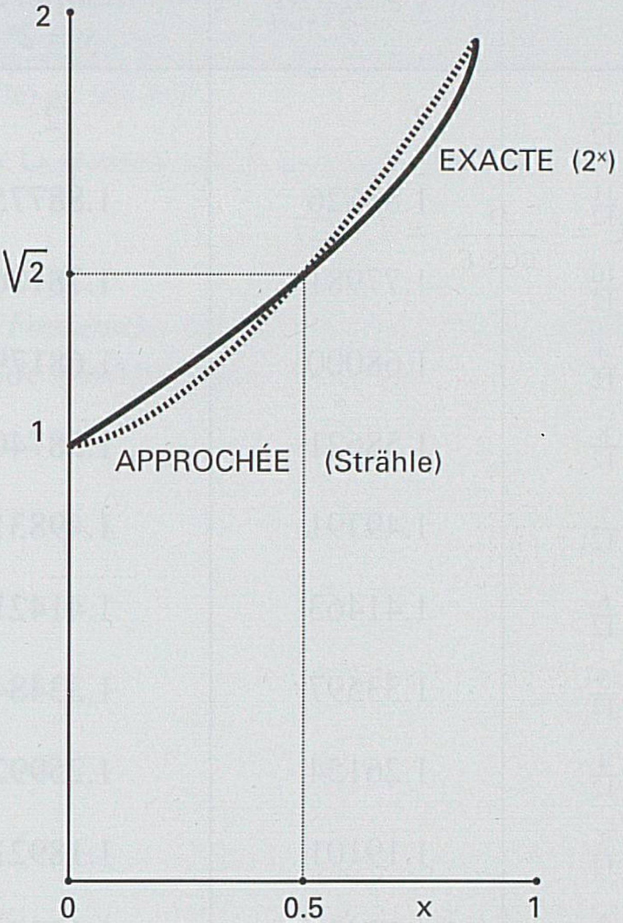
ou, encore, après réduction : $y = \dfrac{0{,}2438x + 0{,}5854}{-\,0{,}1708x + 0{,}5854}$

ou, en amplifiant par 40,9976 : $y = \dfrac{9{,}9952x + 24}{-\,7{,}0024x + 24}$

et finalement (en arrondissant) : $y = \dfrac{10x + 24}{-\,7x + 24}$

Il s'agit de la fonction homographique, dite fonction de Strähle. N'est-elle pas élégante !

Graphiquement, dans l'intervalle [0; 1], la fonction de Strähle et la fonction associée à la gamme tempérée $y = 2^x$ se présentent ainsi :



Et le tableau de la page suivante permet la comparaison des longueurs de cordes correspondant à ces deux fonctions.

Tableau des longueurs de cordes

		Strähle $y = \frac{10x + 24}{-7x + 24}$	Gamme tempérée $y = 2^x$	Erreur*
do	$x = \frac{12}{12}$	2	2	0
ré$_b$	$x = \frac{11}{12}$	1.88626	1.88775	– 34
ré	$x = \frac{10}{12}$	1.77981	1.78180	– 48
mi$_b$	$x = \frac{9}{12}$	1.68000	1.68179	– 47
mi	$x = \frac{8}{12}$	1.58621	1.58740	– 33
fa	$x = \frac{7}{12}$	1.49791	1.49831	– 12
sol$_b$	$x = \frac{6}{12}$	1.41463	1.41421 $(\sqrt{2})$	13
sol	$x = \frac{5}{12}$	1.33597	1.33484	36
la$_b$	$x = \frac{4}{12}$	1.26154	1.25992	56
la	$x = \frac{3}{12}$	1.19101	1.18921	66
si$_b$	$x = \frac{2}{12}$	1.12409	1.12246	63
si	$x = \frac{1}{12}$	1.06050	1.05946	43
do	$x = 0$	1	1	0

* Calcul de l'erreur: $10^5 \times \log \left[\frac{\text{Strähle}}{\text{tempérée}}\right]$

Quant à savoir comment Strähle a eu l'idée de cette construction, c'est une autre question…

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ian Stewart, Calculs bien tempérés, *Pour la Science* N° 151, mai 1990.

[2] J.M. Barbour, A geometrical approximation to the roots of numbers, *American Mathematical Monthly*, 64 (1957) pp. 1-9.

[3] Isaac Schoenberg, On the location of the frets on a guitar, *American Mathematical Monthly*, 93 (1976) pp. 550-552.

[4] Charles Bouleau, La géométrie secrète des peintres, *Charpentes*, 1963.

Charles Félix (Fontenais) est directeur du Lycée cantonal de Porrentruy et professeur de mathématique.