Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien [Fortsetzung]

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Allgemeine schweizerische Schulblätter**

Band (Jahr): **7 (1841)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **26.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-865828

aufgelöst 576. Was ich hinzugethan habe, muß ich natürlich wieder wegnehmen, wenn ich die Wurzel einer quadrirten zweitheiligen Zahl finden will: daher $a^2 + 2ab + b^2$ und ebenso leicht ergibt sich die Wahrheit des $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Noch ein Wort über die Menge Methoden, die in diesem Fache angewendet werden; wir glauben, daß die eine besser, die andere weniger gut ist, daß die eine leichter, die andere mit mehr Mühe zum Ziele führt. Aber man hüte sich ja 1. vor Pedanterie und Aengstlichkeit, 2. vor Verwirrung, indem man zu viel geben will. Viele Wege führen zum Ziel, aber der Wechselsprung vom einen zum andern fördert nicht. Und die praktische Richtung nur immer im Auge behalten.

Gerade in dieser Beziehung wird die Formenlehre als Uebungsstoff sehr wichtig. (Schluß folgt.)

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien (Fortsetzung).

Dritter Abschnitt.

§. 35.

Aehnlichkeit der Figuren.

I. Es sei fig. 100 die Seite DE des Dk. DEF in 3 gleiche Theile DI = IG = GE getheilt; aus den Theilpunkten G und I gehen nach der Seite EF mit DF # die Geraden GH und IK: wie verhalten sich nun die Theile EH, HK, KF? Man ziehe GL und IM # EF. Die Dke. DIM, GIL und EGH haben nun DI = IG = GE, dann W. D = W. m = W. n, und W. u = W. x = W. E (No. 4, a), sind also einerlei, mithin ist IM = GL = EH. Es ist aber IM = KF, und GL = HK (No. 17, b), folglich ist auch KF = HK = EH.

Anm. Dies findet auch Statt, wenn man DE in mehr als 3 gleiche Theile theilt. Man erhält an diesen gleichen Theilen eben so viel einerlei Dke., in denen alle mit EH gleichlaufenden Seiten (die Hilfslinien) gleich sind. Jede Hilfslinie liegt aber in einem

Parallelogramm und ist einem Theile von EF gleich; daher sind auch alle diese Theile von EF dem Theil EH und somit unter sich gleich.

II. Es sei umgekehrt DI = IG = GE, und FK = KH = HE; man ziehe GH und IK. Da nun die Theile von DE gleich sind, so kann die Gleichheit der Theile von EF nur eine Folge davon sein, daß GH und IK mit DF gleichlaufend sind.

III. Es sei fig. 101 die Seite AB des Dk. ABC in eine beliebige Anzahl, z. B. in 100 gleiche Theile getheilt; man denke aus den Theilpunkten g. L. # zu CB nach AC gezogen, so theilen sie auch AC in 100 unter sich gleiche Theile. Eine solche Parallele sei DE; AD enthalte 40 und DB also 60 Theile, so muß auch AE in 40 und CE in 60 gleiche Theile zerlegt sein. Also hat man

$$AB : AD = 100 : 40 \text{ und } AC : AE = 100 : 40$$
$$AB : DB = 100 : 60 \text{ und } AC : EC = 100 : 60$$
$$AD : DB = 40 : 60 \text{ und } AE : EC = 40 : 60$$

folglich ist

$$AB : AD = AC : AE$$
$$AB : DB = AC : EC$$
$$AD : DB = AE : EC$$

Anm. Vertauscht man die innern Glieder dieser 3 Gleichungen, so erhält man $AB : AC = AD : AE = DB : EC$.

IV. Alle diese Gleichungen sind durch die Parallelität von DE zu BC bedingt und finden zugleich Statt. Ist eine derselben gegeben, so kann sie nur eine Folge davon sein, daß DE # BC ist.

V. Die Gerade DE schneidet von ABC das Dk. ADE ab. In diesen Dken. ist AB : AD = AC : AE, und W. A = W. A, B = m, C = n. Wie verhalten sich nun auch die Seiten BC und DE? — Man ziehe DF # AC; dann ist AB : AD = BC : FC; weil aber FC = DE (No. 17, b), so ist auch AB : AD = BC : DE. Da jedoch AB : AD = AC : AE, so ist auch AC : AE = BC : DE also

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE.$$

Die Dke ABC und ADE haben somit alle Seitenpaare, welche den gleichen W. entsprechen, proportional oder verhältnißmäßig (= groß). Gleichheit der

W. und Verhältnißmäßigkeit oder Proportionalität der ihnen entsprechenden Seiten begreift man unter dem Namen **Aehnlichkeit**, und zwar sowohl bei den Dkn., als auch bei den übrigen Figuren von gleicher Seitenzahl. — H. f.

31) a. Wenn man eine Dreieksseite in eine Anzahl gleicher Theile theilt und aus den Theilpunkten auf die 2te Seite g. L. # mit der 3ten Seite zieht; so wird auch die 2te Seite in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt.

b. Wenn zwei Dksseiten in gleich viele je unter sich gleiche Theile getheilt und die gleichvielsten Theilpunkte durch g. L. verbunden werden; so sind Letztere unter sich und mit der 3ten Seite #.

c. Wenn eine Gerade 2 Dksseiten durchdringt und zur 3ten Seite # ist; so sind jene beiden Seiten mit ihren an einander liegenden Abschnitten, so wie mit ihren Abschnitten an der 3ten Seite, und jene Abschnitte mit diesen proportional.

d. Wenn eine Gerade 2 Dksseiten so theilt, daß Letztere mit ihren entsprechenden Abschnitten proportional sind; so ist sie # zur 3ten Seite.

e. Wenn eine Gerade 2 Dksseiten durchdringt und zur 3ten Seite # ist; so schneidet sie ein kleineres Dk. ab, das dem größeren ähnlich ist.

Anm. Die Aehnlichkeit bezeichnet man durch das Zeichen ∾.

§. 36.

I. In den Dken. ABC und abc fig. 101 und 102 sei AB : ab = AC : ac = BC : bc; sind dann auch die W. gleich, also die Dke. ähnlich? — Im größern Dk. ABC mache man AD = ab und ziehe DE # BC; dann ist Dk. ADE ∾ Dk. ABC (No. 31, e), also AB : AD = AC : AE = BC : DE. Diese und die angenommene Proportion haben das erste Verhältniß gleich, folglich sind auch ihre übrigen Verhältnisse gleich, nämlich AC : AE = AC : ac und BC : DA = BC : bc, und somit AE = ac und DE = bc. Die Dk. ADE und abc sind nun einerlei (No. 9, a), folglich ist auch Dk. abc ∾ Dk. ABC.

II. In den nämlichen Dken sei AB : ab = AC : ac, und W. A = W. a. — Man mache AD = ab, AE = ab, und ziehe CE; dann ist auch AB : AD = AC : AE, mithin DE # BC, und daher Dk. ADE ∾ Dk. ABC (No. 31 d und e). Die Dke. ADE und abc sind aber einerlei (No. 9, b), also ist auch Dk. abc ∾ Dk. ABC.

III. Es sei nun W. A = W. a, W. B = W. b, W. C = W. c. — Man mache AD = ab, und ziehe DE # BC; dann ist Dk. ADE ∾ Dk. ABD. Weil aber AD = ab, W. A = W. a, W. m = W. B = W. b, so sind die Dke. ADE und abc einerlei, daher ist auch Dk. abc ∾ Dk. ABC.

IV. In den bei B und b rechtwinkligen Dken GHL und ghl fig. 103 und 104 sei GL : gl = GH : gh. — Man mache GM = gh, GN = gl. und ziehe MN. Dann ist GL : GN = GH : CM, mithin MN # HL, und daher Dk. GMN ∾ Dk. GHL. Die Dke. GMN und ghl sind aber einerlei (No. 9, d), folglich ist auch Dk. ghl ∾ Dk. GHL.

V. Da alle gleichseitigen Dke. W. von beständiger Größe, also gleiche W. haben, so sind sie ähnlich.

Da alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dke unveränderliche, somit wechselweise gleiche W. haben, so sind auch sie ähnlich.

VI. Zieht man fig. 101 und 102 in den ähnlichen Dken ABC und abc noch die Senkrechten AH und ah, so sind die Dke ABH und abh wegen der Gleichheit der W. ähnlich, eben so die Dke ACH und ach, mithin ist AH : ah = AB : ab = BH : bh, und AH : ah = AC : ac = CH : ch. Es ist aber AB : ab = BC : bc, folglich auch AH : ah = BC : bc.

32) a. Dreiekke sind ähnlich, wenn ihre drei Seiten wechselweise proportional sind;

b. wenn sie 2 Seitenpaare proportional und den eingeschlossenen W. gleich haben.

c. wenn sie alle 3 W. wechselweise gleich haben.

d. Rechtwinkliche Dke sind ähnlich, wenn sie die Hypotenusen und ein Paar der Katheten proportional haben.

e. Alle gleichseitigen Dke sind ähnlich, eben so alle gleichschenkligen rechtwinkligen Dke.

f) In ähnlichen Dkn sind die Höhen (aus gleichen W.), und die entsprechenden Seiten, so wie auch die entsprechenden Abschnitte der Grundlinien unter sich proportional.

VII. Die Fünfekke DEFGH und defgh fig. 105 und 106 seien durch Gehren aus D und d in Dke zerlegt, und es seien die Dke DEF und def, dann DFG und dfg, ferner DGH und dgh ähnlich; — so ist

$$DE : de = EF : ef = DF : df$$
$$DF : df = FG : fg = DG : dg$$
$$DG : dg = GH : gh = DH : dh$$

folglich $DE : de = EF : ef = FG : fg = GH : gh = DH : dh$.

Ferner ist W. E = W. e, und W. H = W. h; und da auch die übrigen entsprechenden W. der ähnlichen Dke gleich sind, so sind auch die aus ihnen bestehenden W. beider Fünfekke gleich, nämlich W. D = W. d, W. F = W. f, W. G. = W. g. Da nun beide Vielekke alle entsprechenden Seiten proportional und alle entsprechenden W. wechselweise gleich haben, so sind sie ähnlich.

Anm. Der Beweis gilt ebenso für alle übrigen Vlke. von gleich vielen Seiten. Das 3te Verhältniß jeder Gleichung ist wieder das erste der folgenden Gleichung; daher bleibt die Schlußfolge stets die nämliche.

VIII. Es seien nun umgekehrt die beiden Vlke ähnlich. — Man ziehe aus D und d die Gehren. Die Aehnlichkeit beider Vlke kann nur eine Folge davon sein, daß sie aus ähnlichen Dken (wie oben) bestehen; folglich müssen die entsprechenden Dke, in welche die Gehren aus D und d beide Vlke zerlegen, ähnlich sein.

1. Anm. Dies läßt sich auch direkt beweisen. Wegen der Aehnlichkeit beider Figuren sind die entsprechenden Seitenpaare proportional und die entsprechenden W. gleich. — Da nun DE : de =

EF : ef, und W. E = W. e ist, so ist Dk. DEF ∼ Dk. def, also DE : de = DF : df, daher auch DF : df = FG : fg; auch ist W. DFE = W. dfe, mithin W. F − W. DFE = W. f − W. def, oder W. DFG = W. dfg, demnach Dk. DFG ∼ Dk. dfg (No. 32, b), u. s. w.

2. Anm. Aus Obigem (VII und VIII) ergibt sich zugleich, daß die Seiten auch mit den entsprechenden Gehren proportional sind.

IX. Da alle Seiten und W. eines ordentlichen Vlks. unter sich gleich sind, so ergeben sich in ordentlichen Vlken von gleich vielen Seiten alle Seiten als proportional und alle W. als gleich, diese Figuren sind somit ähnlich. Es sind also auch alle Kreise ähnlich.

X. Es seien die Vlke fig. 105 und 106 ähnlich; also ist

$$DE : de = EF : ef = FG : fg = GH : gh = HD : hd$$

und $(DE + EF + FG + GH + HD) : (de + ef + fg + gh + hd) = DE : de$ u. s. w.

oder Umfang DEFGH : Umfang defgh = DE : de.

XI. Ordentliche Vlke. von gleicher Seitenzahl werden durch die Winkelhalbmesser in Dke. zerlegt, die wegen der Gleichheit ihrer W. ähnlich sind; deßhalb stehen ihre Seiten mit diesen Winkelhalbmessern und dann (nach No. 32, f), auch mit den Seitenhalbmessern in gleichem Verhältniß, eben so auch mit den gleichnamigen Durchmessern, weil diese aus 2 Halbmessern bestehen. In dem gleichen Verhältniß stehen (nach X.) auch die Umfänge. H. f.

33) a. Wenn gleichnamige Vlke. aus ähnlichen Dken. bestehen, die in gleicher Ordnung auf einander folgen, so sind sie ähnlich.

b. Wenn ähnliche Vlke. durch entsprechende Gehren in Dke. zerlegt werden, so sind die entsprechenden Dke. ähnlich.

c. Gleichnamige ordentliche Vlke., so wie die Kreise, sind unter sich ähnlich.

d. Die Umfänge ähnlicher Vlke. verhalten sich wie ihre entsprechenden Seiten.

e. Die Umfänge gleichnamiger ordentlicher Vlke. verhalten sich, wie ihre Seiten und wie ihre gleichnamigen Halb- oder Durchmesser.

§. 37.

Die Kreise als ordentliche Vlke. verhalten sich ebenfalls wie ihre Halb- oder Durchmesser; es finden hier aber noch andere Verhältnisse Statt.

I. Es sei fig. 107 z. B. W. M = 40°, W. N = 120°, W. O = 70°, W. Q = 130°. Denkt man sich alle Halbmesser gezogen, welche jene W. in die angegebene Anzahl von Graden zerlegen; so werden auch die Bogen AB, BC, CD, DA in eben so viele gleiche Theile getheilt (No. 22, d), daher ist

Bog. AB : Bog. BC = 40 : 120 = 40° : 120° = W. M : W. N
Bog. AB : Bog. CD = 40 : 70 = 40° : 70° = W. M : W. O
Bog. AB : Bog. DA = 40 : 130 = 40° : 130° = W. M : W. Q

oder Bog. AB : Bog. BC = W. M : W. N
Bog. AB : Bog. CD = W. M : W. O
Bog. AB : Bog. DA = W. M : W. Q

oder Bog. AB : Bog. BC : Bog. CD : Bog. DA = W. M : W. N : W. O : W. Q.

Anm. Die Zahlen in dem 2ten Verhältniß der 3 ersten Proportionen bedeuten, wie sich von selbst versteht, die Bogentheile, in welche die gedachten Halbmesser die ganzen Bogen zerlegen. — Zugleich ist klar, daß solche Verhältnisse auch bei jeder andern Annahme für die Größe der W. bestehen.

II. In fig. 108 ist ebenso

Bog. ab : Bog. bc = W. m : W. n
Bog. ab : Bog. cd = W. m : W. o
Bog. ab : Bog. da = W. m : W. q

Ist nun M = m, N = n, O = o, Q = q, so sind auch diese und die obigen Verhältnisse der W. gleich, mithin sind auch die Verhältnisse der Bogen gleich; daher

Bog. AB : Bog. BC = Bog. ab : Bog. bc
Bog. AB : Bog. CD = Bog. ab : Bog. cd
Bog. AB : Bog. DA = Bog. ab : Bog. da

oder Bog. AB : Bog. ab = Bog. BC : Bog. bc
= Bog. CD : Bog. cd
= Bog. DA : Bog. da

folglich (Bog. AB + Bog. BC + Bog. CD + Bog. DA) : (Bog. ab + Bog. bc + Bog. cd + Bog. da) = Bog. AB : Bog. ab = Bog. BC : bc u. s. w.

Bezeichnet man durch P und p die größere und kleinere Kreislinie, durch R und r ihre Halbmesser, durch D und d ihre Durchmesser, und bemerkt zugleich, daß die Kreislinien sich wie ihre Halb- oder Durchmesser verhalten, so folgt:

P : p = Bog. AB : Bog. ab = Bog. BC : bc u. s. w
= R : r = D : d.

Zieht man nun noch die Sehnen AB und ab, so sind die Dke. ABO und abo ähnlich (No. 32, b), also ist AB : ab = AO : ao = R : r. Durch die Halbmesser sind aber diese Sehnen auch noch mit den Durchmessern, Kreislinien und den entsprechenden Bogen verhältnißmäßig. H. f.

34) a. Bogen eines Kreises verhalten sich, wie ihre zugehörigen Mittelpunktswinkel.

b. Kreislinien, ihre Halb- und Durchmesser, Bogen derselben von gleichen Mittelpunktswinkeln und eben solche Sehnen sind proportional.

§. 38.

I. Das Dk. ABC fig. 109 sei bei B rechtwinklig und die Gerade BD senkrecht zur Hypotenuse AC. Dann haben die Dke. ABC und ABD W. A = W. A, W. B = W. u, also W. C = W. m, sind somit ähnlich. Eben so sind die Dke. ABC und BCD, also auch die Dke. ABD und BCD ähnlich. — Nun ist

in den beiden ersten Dken.	in den beiden andern Dken.
AC : AB = AB : AD	AC : BC = BC : DC
also AC . AD = AB . AB = AB^2	also AC . DC = BC . BC = BC^2

II. Ferner ist in den Dken. ABD und BCD
AD : BD = BD : DC, also AD . DC = BD . BD = BD^2

III. Zählt man die beiden letzten Gleichungen unter I. zusammen, so erhält man

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC \cdot (AD + DC) = AC \cdot AC = AC^2.$$ H. f.

35) a. Wenn eine Senkrechte aus dem rechten W. auf die Hypotenuse geht, so ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und ihrem an jener liegenden Abschnitt; **oder** das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse in ihrem an jener liegenden Abschnitt.

b. Die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; **oder** das Quadrat der Senkrechten ist gleich dem Produkte aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

c. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe beider Quadrate der Katheten. — Hieraus folgt weiter:

d.
$$AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)};$$
$$AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)};$$
$$BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)}.$$

Anm. Die eben genannten Produkte erscheinen hier nur in ihrem Zahlenwerthe, lassen sich aber nach No. 40 auch als Flächen — Quadrate und Rechtekke — erklären.

IV. An der Grundlinie AC des Dks. ABC fig. 110 liegen spitze W.; fällt man die Höhe BD, und setzt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BD = h$, $AD = u$, $DC = x$,

so ist $c^2 = u^2 + h^2$

aber $u^2 = (b - x)^2 = b^2 - 2 \cdot bx + x^2$

$h^2 = a^2 - x^2$

also $u^2 + h^2 = b^2 - 2\,bx + x^2 + a^2 - x^2$

$= b^2 - 2\,bx + a^2$

folglich $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b^x$

V. Aus dieser letzten Gleichung erhält man ferner

$$2\,bx = a^2 + b^2 - c^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}$$

Anm. Diese beiden Endgleichungen (unter IV und V) sind für jede Seite, die einem spitzen W. gegenüber liegt, und für jeden Abschnitt der Grundlinie an einem spitzen W. ganz allgemein giltig. Der Schüler suche für a und u die entsprechenden Gleichungen.

VI. Liegt AB fig. 111 einem stumpfen W. gegenüber, fällt man die Höhe BD auf die verlängerte Grundlinie und setzt ebenfalls $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BD = h$, $AD = u$, $CD = x$, so ist

$$c^2 = u^2 + h^2$$
$$u^2 = (b + x)^2 = b^2 + 2 \,.\, bx + x^2$$
$$h^2 = a^2 - x^2$$

also $u^2 + h^2 = b^2 + 2\,bx + x^2 + a^2 - x^2 = b^2 + 2\,bx + a^2$
folglich $c^2 = a^2 + b^2 + 2 \,.\, bx$

VII. Aus dieser Gleichung findet man weiter:

$$2\,bx = c^2 - a^2 - b^2$$
$$x = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2\,b}$$

VIII. In fig. 110 findet man nun für BD

$$h^2 = a^2 - x^2$$

und setzt man hierin für x seinen Werth (aus V), so ist

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - b^2}{2\,b}\right)^2$$
$$= \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right) \times \left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right)$$
$$= \frac{2\,ab + a^2 + b^2 - c^2}{2\,b} \times \frac{2\,ab - a^2 - b^2 + c^2}{2\,b}$$
$$= \frac{a^2 + 2\,ab + b^2 - c^2}{2\,b} \times \frac{c^2 - (a^2 - 2\,ab + b^2)}{2\,b}$$
$$= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2\,b} \times \frac{c^2 - (a - b)^2}{2\,b}$$
$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4 \,.\, b^2}$$

also

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2\,b}$$

Anm. Die nämliche Formel für h ergibt sich, wenn man fig. 110 h mit Hilfe von c und u, oder fig. 111 mit Hilfe von c und u bestimmt. Der Schüler mag obige Formel auch auf diesem Wege aufsuchen. —

IX. Im gleichseitigen Dk. ist a = b = c, also wird

$$h = \frac{\sqrt{3\,a \,.\, a \,.\, a \,.\, a}}{2\,a} = \frac{a \,.\, a \times \sqrt{3}}{2\,a} = \tfrac{1}{2} \times a \,.\, \sqrt{3}\,.$$

X. Aus dieser letzten Gleichung erhält man ferner

$$a \,.\, \sqrt{3} = 2\,h$$

$$a = \frac{2\,h}{\sqrt{3}} = \frac{2\,h \,.\, \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \tfrac{2}{3} \times h \,.\, \sqrt{3}$$

Wir stellen nun obige Gleichungen zusammen:

36) a. $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,bx$
b. $x = \dfrac{a + b^2 - c^2}{2\,b}$
wenn c einem spitzen W. gegenüberliegt.

c. $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,bx$
d. $x = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2\,b}$
wenn c einem stumpfen W. gegenüberliegt.

e. $h = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-b+c-a)}}{2\,b}$

f. $h = \tfrac{1}{2} \times a \,.\, \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \times a \,.\, 1{,}7320508\ldots.$
g. $a = \tfrac{2}{3} \,.\, h \,.\, \sqrt{3} = \tfrac{2}{3} \times h \,.\, 1{,}7320508\ldots.$
im gleichseitigen Dreieck.

Uebungsaufgaben.

1. In fig. 110 sei a = 36′, b = 45′, x = 21′; was beträgt c?
2. Es sei a = 42′, b = 48′, c = 32′; was beträgt x und h?
3. In fig. 110 sei a = 56°, b = 83°, c = 48°; was ist h?
4. In fig. 111 sei b = 30′, a = 54′, x = 28′; man sucht c.
5. Oder es sei c = 60′, b = 45′, a = 32′; man sucht x und h.
6. Oder b = 16° 4′, a = 18° 2′, x = 7° 6′; man sucht c.
7. Oder es sei c = 20° 9′, b = 13° 7′, a = 14° 5′; man sucht x und h.

§. 39.

I. Im Kreise fig. 112 durchschneiden sich die Sehnen AB und CD. — Man ziehe AD und BC; dann sind die Dke. ADE und BCE ähnlich (No. 32, c), also AE : CE = DE : BE, und somit AE . BE = CE . DE.

II. Ist fig. 113 die eine Sehne CD ein Durchmesser und die andere AB zu ihm senkrecht, so ist ebenfalls $AE \cdot BE = CE \cdot DE$; weil aber (No. 23 a) $AB = AE$, so wird $AE^2 = CE \cdot DE$.

Anm. Dies ergiebt sich aus No. 35, b. Ist nämlich AE senkrecht zum Durchmesser CD, und zieht man die Hilfslinien AC und AD, so ist der W. $CAD = 90^0$, also $AE^2 = CE \cdot DE$.

III. Aus dem Punkte A fig. 114 gehen 2 Sekanten AB und AC. — Man ziehe BE und DC; dann ist in den Dken. ABE und ACD W. A = W. A, W. B = W. C, also auch W. AEB = W. ADC; daher sind beide Dke. ähnlich, mithin ist $AB : AC = AE : AD$, sonach $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

IV. Aus A fig. 114 gehen die Tangente AF und die Sekante AC. — Man ziehe noch FC und FE. Die Dke. ACF und AEF haben dann W. CAF = W. CAF, W. AFE = ECF, also W. AEF = W. AFC, somit sind beide Dke. ähnlich, und es ist $AC : AF = AF : AE$, also $AF^2 = AC \cdot AD$.

37) a. Wenn sich 2 Sehnen eines Kreises durchschneiden, so sind die Produkte aus den Abschnitten beider Sehnen gleich.

b. Wenn aus einem Punkte der Kreislinie eine Senkrechte auf den Durchmesser geht; so ist sie die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

c. Wenn 2 Sekanten aus einem Punkte außerhalb des Kreises gehen; so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte; oder die Produkte aus den Sekanten in ihre äußern Abschnitte sind gleich.

d. Wenn aus einem Punkte außerhalb des Kreises eine Tangente und Sekante gehen; so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.

V. Der zur Sehne AB fig. 115 gehörige Bogen sei in C halbirt und AC sei die Sehne des halben Bogens. Zieht man aus C den Durchmesser CF, und dann die Linie AF, so ist er senkrecht zur Sehne AB und hal-

birt sie (No. 23, d), und W. $CAF = 90^0$ (No. 25, c); daher ist $AC^2 = CF . CD$ (No. 35, a)
oder, wenn man den Halbmesser $= r$ setzt,

$$AC^2 = 2 r . CD$$

Nun ist aber $CD = CE - DE = r - DE$, und wenn man AE zieht,

$$DE = \sqrt{(AE^2 - AD^2)} = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} . AB^2)}$$
$$= \sqrt{\frac{4 r^2 - AB^2}{4}} = \tfrac{1}{2} \times \sqrt{(4r^2 - AB^2)}$$

also $CD = r - \tfrac{1}{2} \times \sqrt{(4r^2 - AB^2)}$

und folglich $AC^2 = 2 r \times [r - \tfrac{1}{2} \times \sqrt{(4 r^2 - AB^2)}]$
$$= r \times [2 r - \sqrt{(4 r^2 - AB^2)}]$$

Diese Gleichung zeigt, wie sich aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halben Bogens berechnen läßt. Zur Vereinfachung des Ausdrukks nimmt man r als Einheit an; dadurch wird

$$AC = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - AB^2)}]}$$

Ist AB die Seite eines ordentlichen Vielekks im Kreise, so ist AC die Seite eines ordentlichen Vlks. von doppelt so vielen Seiten im Kreise; und obige Gleichung zeigt, wie man aus jener Seite diese berechnen kann. Ist z. B. AB die Seite des ordentlichen Sechsekks, also $= r = 1$, so ist die Seite des ordentlichen Zwölfekks oder

$$s\,12\,e = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - 1)}]} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{(2 - 1{,}7320508)}$$
$$= \sqrt{0{,}267949} = 0{,}5176380 \ldots$$

Wird nun die Seite mit 12 vervielfacht, so ist der Umfang des ordentlichen Zwölfekks im Kreise oder

$$u\,12\,e = 12 \times 0{,}5176380 = 2 \times 3{,}1058285 \ldots$$

Vermittelst der Seite des ordentlichen Zwölfekks findet man nach obiger Gleichung die Seite und dann aus dieser den Umfang des ordentlichen 24ekks u. s. w.

$s\,24\,e = 0{,}2610523$	$u\,24\,e = 6{,}2652572 = 2 . 3{,}1326286$
$s\,48\,e = 0{,}1308062$	$u\,48\,e = 6{,}2787004 = 2 . 3{,}1393502$
$s\,96\,e = 0{,}0654381$	$u\,96\,e = 6{,}2820639 = 2 . 3{,}1410319$
$s\,192\,e = 0{,}0327234$	$u\,192\,e = 6{,}2829049 = 2 . 3{,}1414524$
$s\,384\,e = 0{,}0163622$	$u\,384\,e = 6{,}2831152 = 2 . 3{,}1415576$

Fährt man in der Verdoppelung der Seitenzahl fort, so wird der Umfang jedes folgenden Vlks. immer größer, und muß endlich mit der Kreislinie zusammenfallen, oder

der Unterschied zwischen Beiden so klein werden, daß er sich nicht mehr angeben läßt. Wie weit aber auch die Rechnung fortgesetzt werden mag, so bleibt doch schon die Größe 2 . 3,1415 beständig, und nur noch die folgenden Dezimalen sind veränderlich.

Auf gleiche Weise ist man von der Seite des Quadrats im Kreise ausgegangen, hat daraus die Seite des ordentl. Achtekks, aus diesem die des Sechszehnekks u. s. w. berechnet. — Die nämliche Rechnung ist auch mit den ordentlichen Figuren um den Kreis gemacht worden.

Vollständig genau hat man 2 . 3,1415926 . . . erhalten. Wenn also der Halbmesser als Einheit des Längenmaßes gesetzt wird, so ist die Kreislinie 2 . 3,1415926; und betrachtet man den Durchmesser als Einheit, so beträgt die Kreislinie 3,1415926 solcher Einheiten, d. h. es ist $p = 2\,r\,.\,3{,}1415926 = d \times 3{,}1415926$.

1. Anm. Wie früher bezeichnet p die Peripherie, r den Halb- und d den Durchmesser. Diese Bezeichnung wird auch in der Folge beibehalten.

2. Anm. Von ihrem Berechner, Ludolf von Cölln, gest. 1610, heißt 3,1415926 die Ludolfische Zahl. — Man drükkt die Abhängigkeit der Kreislinie vom Halb- oder Durchmesser auch durch folgende Proportion aus: $d : p = 1 : 3{,}1415926$ und $r : p = 1 : 2\,.\,3{,}1415926$. — Archimedes, ein griechischer Mathematiker, geb. auf Samos im Jahre 287 und gest. 208 vor Chr., fand das Verhältniß $d : p = 7 : 22 = 1 : 3^1/_7 = 1 : 3{,}142857$ (Periode), welches die Kreislinie zu groß angibt. — Adrian Metius fand das Verhältniß $d : p = 113 : 355 = 1 : 3{,}1415929$.

3. Anm. Statt 3,1415926 genügt in der Anwendung meistens schon 3,14 oder doch 3,1415, wofür man aber lieber 3,1416 nimmt. Das Ergebniß ist dann zwar etwas zu groß; aber dieser Fehler ist doch viel geringer, als das Zuwenig bei 3,1415.

VI. Aus obiger Gleichung für p läßt sich nun auch umgekehrt d und r bestimmen, nämlich

$$d = \frac{p}{3{,}1416} = \frac{1}{3{,}1416} \times p = 0{,}31831\ .\ p$$

$$r = \frac{p}{2\,.\,3{,}1416} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3{,}1416} \times p = \frac{1}{2} \times 0{,}31831\ .\ p$$

VII. Nun läßt sich auch die Länge eines Kreisbogens für einen bestimmten Mittelpunktsw. berechnen. — Der Bogen muß so viele Theile der Kreislinie haben, als der Mittelpunktsw. Theile von 360^0 enthält. Bezeichnet also b den Bogen und n die Anzahl der Grade des ihm zugehörigen Mittelpunktsw., so ist

$$b : p = n : 360$$

also $b = \frac{n \,.\, p}{360} = \frac{n \,.\, d \,.\, 3{,}1416}{360}$

und $n = \frac{b \,.\, 360}{p} = \frac{b \,.\, 360}{d \,.\, 3{,}1416} = \frac{b \times 360 \,.\, 0{,}31831}{d}$

Wir haben demnach folgende Bestimmungsgleichungen:

38) a. $p = d \times 3{,}1416 = 2\, r \times 3{,}1416$, d. h. die Kreislinie ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser (oder aus dem doppelten Halbmesser) in die Ludolfische Zahl.

b. $d = \frac{p}{3{,}1416} = 0{,}31831 \,.\, p$

c. $r = \frac{p}{2 \,.\, 3{,}1416} = \frac{1}{2} \times 0{,}31831 \,.\, p$

d. $b = \frac{n \,.\, p}{360} = \frac{n \,.\, d \,.\, 3{,}1416}{360}$

e. $n = \frac{b \,.\, 360}{p} = \frac{b \,.\, 360 \,.\, 0{,}31831}{d}$

Uebungsaufgaben.

1. Was ist p, wenn der Halbmesser 3′, 4½′, 5′ 4″, oder der Durchmesser 9′, 12′, 15′ 8″, 30′, 100′ beträgt?

2. Der Umfang der Erde beträgt 5400 Meilen; wie groß ist sein Durchmesser?

4. Welcher Durchmesser gehört zu einer Kreislinie von 40′, 50′, 64′, 100′, 216′, 520′, 2800′?

4. Welcher Bogen gehört zu einem Mittelpunktsw. von 25^0, wenn der Durchmesser 8′ ist?

5. Wie groß ist der Bogen, wenn $n = 36^0$, $d = 12'$, oder $n = 43^0\ 20'$, $d = 6'$, und wie lang ist auf der Erde ein Bogen

des Aequators, der zu 1 Minute gehört? — Anm. Zu der letzten Aufgabe gehört $p = 5400$ Meilen.

6. Welcher W. gehört zu einem Bogen von 18′, wenn $d = 40'$ ist, und welcher entspricht einem Bogen auf unserer Erde von 15 oder $24^1/_2$ Meilen?

7. Der Durchmesser eines Rades ist 5′; wie viel Umläufe macht es auf einem Wege von einer neuen Schweizerstunde?

8. Welchen Weg hat ein Rad durchlaufen, wenn sein Durchmesser $4^1/_2$ Fuß beträgt und es 5640 Umläufe gemacht hat?

Vierter Abschnitt.

Flächeninhalt.

§. 40.

Geradlinige Figuren.

Gleiche Figuren sind Figuren von gleich großem Flächeninhalte. Während die Einerleiheit gleiche Form und gleiche Größe in sich begreift, so schließt die Gleichheit der Figuren jede Bedingung hinsichtlich ihrer Form aus. Es können z. B. Dke. und Vke. gleich, aber nie einerlei sein.

I. Es seien ABCD und abcd fig. 116 und 117 zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. — Wegen der Gleichheit der Grundlinien AB und ab läßt sich über AB ein Parallelogramm ABEF errichten, das mit dem Prllgrm. abcd einerlei ist, und dessen Grundlinie in AB fällt; wegen der Gleichheit der Höhen muß dann die Seite FE in die Richtung von DC fallen. Die Dke. ADF und BCE haben nun AD = BC, AF = BE (No. 17, b), W. DAF = W. CBE (No. 4, f), sind also einerlei, und somit auch gleich groß; demnach ist Dk. ADF + Trapez ABCF = Trapez ABCF + Dk. BCE, oder Prllgrm. ABCD = Prllgrm. ABEF; weil aber Prllgrm. ABEF = Prllgrm. abcd, so ist auch Prllgrm. ABCD = Prllgrm. abcd.

Anm. Man kann daher auch ein schiefwinkliges Prllgrm. in ein Rechtekk verwandeln und umgekehrt.

II. Jedes Dk. ist die Hälfte eines Prllgrms., mit dem es gleiche Grundlinie und Höhe hat. Dreiekke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind also Hälften von Parllgrmen mit gleicher Grundlinie und Höhe, d. h. Hälften von gleichen Prllgrmen., sind folglich selbst gleich.

III. Es sei ABCD fig. 118 ein Trapez. Man ziehe die Gehren AC und BD. Die Dke. ABD und ACD haben die nämliche Grundlinie AD und, weil sie zwischen den beiden Parallelen AD und BC liegen, auch gleiche Höhe, sind demnach gleich. Nimmt man von diesen beiden Dken. das ihnen gemeinsame Dk. ADE weg, so bleiben als gleiche Reste die Dke. ABE und DEC.

IV. Das Dk. ABC fig. 119 sei bei A rechtwinklig. Man errichte über BC das Quadrat BCDE, und über den Katheten AB und AC die Quadrate ABHL und ACFG. — Aus A ziehe man die Gerade AM senkrecht zu BC (oder # BE und CD), dann die Geraden AD und BF.

Das Rechtekk CDMN und das Dk. CDA haben die gleiche Grundlinie CD und die gleiche Höhe CN (oder liegen zwischen den Parallelen CD und MN), daher ist $1/2$ Rechtekk CDMN = Dk. CDA.

Die Dke. CDA und CBF haben CD = CB, CA = CF, und W. ACD = BCF, weil jeder dieser beiden W. = 90^0 + W. ACB ist; beide Dke. sind somit einerlei, also auch Dk. CDA = Dk. CBF.

Das Dk. CBF und das Quadrat CAGF haben die gemeinschaftliche Grundlinie CF und die gleiche Höhe CA, mithin ist Dk. CBF = $1/2$ Quadr. CAGF.

Da nun $1/2$ Rechtekk CDMN = Dk. CDA, aber Dk. CDA = Dk. CBF, und Dk. CBF = $1/2$ Quadr. CAGF; so ist auch $1/2$ Rechtekk CDMN = $1/2$ Quadr. CAGF, folglich auch Rechtekk CDMN = Quadr. CAGF.

Zieht man nun die Geraden AE und CH, so läßt sich ebenso beweisen, daß das Rechtekk BEMN = Quadr. ABHL ist.

Es sind demnach die Rechtekke CDMN und BEMN zusammen so groß als die beiden Quadrate ACFG und ABHL, oder da jene Beiden das Quadr. BCDE ausmachen, so ist Quadr. BCDE = Quadr. ACFG + Quadr. ABHL.

39) a. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind gleich.

b. Dreiekke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

c. Im Trapeze sind die zwei Dk. zwischen den Nichtparallelen und den Abschnitten der Gehren gleich.

d. Das Quadrat der Hypotenuse ist der Summe von den Quadraten der beiden Katheten gleich.

Anm. Der Satz vom Quadrat der Hypotenuse (lit. d) heißt nach seinem Erfinder Pythagoras auch der Pythagoräische Lehrsatz.

V. In dem Rechtekke ABCD fig. 120 sei die Seite AD in 5 und die Seite AB in 3 gleiche Theile getheilt, und es seien zugleich die Theile von AB und AD auch unter sich gleich. Aus den Theilpunkten von AD gehen Linien # AB, und sind daher senkrecht zu AD und BC; aus den Theilpunkten von AB gehen Linien # AD, und sind daher senkrecht zu AB und deren Parallelen. — Weil die 5 Theile von AD gleich sind, so sind alle Theile der darüber liegenden Parallelen ihnen und deßhalb auch unter sich gleich (No. 17, b). Weil ferner die 3 Theile von AB gleich sind, so sind alle Theile der aufstehenden Parallelen ihnen und deßhalb unter sich gleich. Weil endlich die 3 Theile von AB den 5 Theilen von AD einzeln gleich sind, so sind auch alle Theile der sich durchschneidenden Linien gleich. Die dadurch entstandenen kleinen Vierekke sind demnach lauter Quadrate, die sämmtlich einerlei sind.

Weil AD aus 5 Theilen besteht, so liegen für die erste Längeneinheit der Höhe AB über AD auch 5 Quadrate; aus dem gleichen Grunde liegen neben der 2ten und 3ten Längeneinheit von AB je 5 Quadrate; das Rechtekk enthält also 3 . 5 = 15 Quadrate oder Flächeneinheiten (vergl. §. 12). Statt der 3 Theile von AB und der 5 Theile von AD kann man die Linien AB und

AD selber setzen, somit ist der Inhalt des Rechtekks ABCD = AB × AD.

Anm. Hieraus erhellt zugleich: Linien mit einander verviel-fachen heißt, die Zahl der Längeneinheiten der einen mit der Zahl der Längeneinheiten der andern (oder ihre Längenzahlen mit einan-der) vervielfachen.

VI. Jedes schiefw. Parallelogramm gleicht einem Rechtekke von gleicher Höhe; also findet man auch sei-nen Inhalt wie den eines solchen Rechtekks, indem man die Grundlinie und Höhe desselben mit einander verviel-facht. So ist z. B. fig. 117 der Inhalt von abcd = ab × de.

VII. Das Quadrat ist ein Rechtekk mit 2 gleichen Abmessungen; also findet man seinen Inhalt, wenn man eine Abmessung mit sich selbst vervielfacht. Dadurch ent-steht die Quadratzahl seiner Seitenlänge.

VIII. Jedes Dk. beträgt die Hälfte eines Paralle-logramms, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat; demnach muß das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe (welches dem Parallelogramm gleicht) hal-birt werden, um den Inhalt des Dks. zu erhalten. Es ist z. B. fig. 48 das Dk. DEF = ½ × DE . FH.

40) a. Der Flächeninhalt eines Rechtekks und eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

b. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich der Quadratzahl seiner Seitenlänge.

c. Der Flächeninhalt eines Dks. ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

1. Anm. Da die Höhe des Dks. aus seinen 3 Seiten be-stimmt werden kann; so läßt sich auch der ganze Inhalt aus den-selben berechnen. (No. 36, e.)

2. Anm. Alle übrigen Figuren müssen nun zum Behuf ihrer Inhaltsberechnung auf die ebengenannten zurükkgeführt werden, und zwar wegen der schiefen W. zunächst auf das Dk., weil sich jede Figur am leichtesten in Dke. zerlegen läßt.

IX. In der Raute fig. 68 kann man die Gehre EG als Grundlinie der Dke. EDG und EFG, hingegen DH und FH als ihre Höhe betrachten (No. 18, b). Darum ist DEFG = Dk. EDG + Dk. EFG = $\frac{1}{2} \times$ EG . DH + $\frac{1}{2} \times$ EG . FH = $\frac{1}{2} \times$ EG . (DH + FH) = $\frac{1}{2} \times$ EG . DF.

Ebenso ist in den Halbrauten fig. 70 und 71 die Gehre AC als Grundlinie den Dkn. ABC und ACD gemeinsam; die Höhen derselben sind BG und DG (No. 19, c). Also ist ABCD = Dk. ABC + Dk. ACD = $\frac{1}{2} \times$ AC . BG + $\frac{1}{2} \times$ AC . DG = $\frac{1}{2} \times$ AC . (BG + DG) = $\frac{1}{2} \times$ AC . BD.

X. In dem Trapez fig. 121 ziehe man die Gehre AC und die Senkrechte CE. — Man kann nun AD als Grundlinie des Dks. ACD und BC als Grundlinie des Dks. ABC betrachten, so daß CE als Höhe beider Dke. erscheint. Demnach ist das Trapez ABCD = Dk. ACD + Dk. ABC = $\frac{1}{2} \times$ CE . AD + $\frac{1}{2} \times$ CE . BC = $\frac{1}{2} \times$ CE . (AD + BC).

Anm. Natürlich kann man die beiden Dke. auch einzeln berechnen. Aber vorstehende Berechnungsformel zeigt ein kürzeres Verfahren; warum? — Das Nämliche gilt auch im Folgenden vom Trapezoid.

XI. In dem Trapezoid fig. 122 ziehe man die Gehre AC nebst dem Senkrechten BE und DF; dann ist ABCD = Dk. ABC + Dk. ACD = $\frac{1}{2} \times$ AC . EB + $\frac{1}{2} \times$ AC . DF = $\frac{1}{2} \times$ AC . (BE + DF).

XII. Ordentliche Vielekke werden durch ihre Winkelhalbmesser in einerlei Dke. zerlegt; jedes dieser Dke. hat eine Seite des Vlks. zur Grundlinie und den Seitenhalbmesser zur Höhe. Ist s die Seite des ordentlichen Vlks., also die Grundlinie eines jeden der Dke., und h der Seitenhalbmesser des Vlks. oder die Höhe eines jeden der Dke., so ist der Inhalt eines solchen Dks. = $\frac{1}{2}$. h . s; und dieses Produkt muß noch mit der Seitenzahl des Vlks. vervielfacht werden, um den Inhalt des Letzteren zu finden. Bezeichnet n diese Seitenzahl, so ist der Inhalt des Vlks. = $\frac{1}{2} \times$ h . s . n; ab s . n ist der Umfang des Vlks., und bezeichnet man ihn durch u, so ist der Flächeninhalt eines ordentlichen Vlks. = $\frac{1}{2} \times$ h . u.

Anm. Daraus folgt zugleich, daß jedes ordentliche Vlk. einem Dk. gleich ist, das den Umfang des ord. Vlks. zur Grundlinie und seinen Seitenhalbmesser zur Höhe hat. Wie und warum?

41) a. Der Inhalt einer Raute oder Halbraute ist gleich dem halben Produkte aus ihren beiden Gehren.

b. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe seiner beiden Parallelen in ihren senkrechten Abstand von einander.

c. Der Inhalt eines Trapezoides ist gleich dem halben Produkte aus einer Gehre in die Summe ihrer beiden senkrechten Abstände von den ihr gegenüberliegenden Winkelspitzen.

d. Der Inhalt eines ordentlichen Vielekks gleicht dem halben Produkte aus seinem Umfang in seinen Seitenhalbmesser.

XIII. Das Trapezoid kann auch noch auf folgende Weise berechnet werden:

α. Man verlängert fig. 123 zwei Gegenseiten AD und BC, bis sie in E sich treffen. Nun zieht man vom Dk. ABE das Dk. DCE ab. Fällt man nämlich die Senkrechten BF und CG, so ist Trapezoid ABCD $= \frac{1}{2} \cdot BF \cdot AE - \frac{1}{2} \cdot CG \cdot DE$.

β. Man zerlegt fig. 124 das Vrk. ABCD durch die Senkrechten BE und CF in zwei Dke. und ein Trapez.

γ. Auf ähnliche Weise verfährt man fig. 125 und 126, wo D ein stumpfer W. ist. Es muß hier das Dk. CDE abgezählt werden.

XIV. Jedes unregelmäßige Vlk. läßt sich durch Gehren oder durch Linien, die aus einem Punkte in demselben nach den Winkelspitzen gehen, in Dke. zerlegen, welche einzeln berechnet werden, z. B. fig. 43, 44, 45, 46.

XV. Ist eine Figur ganz unregelmäßig von krummen Linien begrenzt, wie fig. 57; so verfährt man auf eine ähnliche Weise, wie bei der Bestimmung derselben §. 29, XX. Man berechnet zuerst das Fünfekk, dann das Dk. A a 1, das Trapez a 12 b u. s. w.

Uebungsaufgaben.

1. Die Rennbahn in Kassel ist ein Rechtekk von 440′ Länge und 204′ Breite; wie viel □′ enthält sie?

2. Berechne den Inhalt eines Akkers, der 342′ 6″ lang und 113′ 4″ breit ist.

3. Ein Stükk Tuch hält in die Länge $45\frac{1}{2}$ Elle und ist $\frac{3}{4}$ breit; ein anderes ist $52\frac{3}{8}$ Ellen lang und $\frac{6}{4}$ Ellen breit; wie viel □ Ellen beträgt ihr Unterschied?

4. Eine Kirche ist inwendig 126′ lang und 78′ breit; ihr Fußboden soll mit quadratförmigen Steinplatten belegt werden, deren jede in beiden Dimensionen $1\frac{1}{2}$ Fuß mißt; wie viel Platten sind dazu erforderlich?

5. A hat einen gevierten Akker gekauft, dessen Seite 40^0 beträgt, und dafür 2510 Fr. bezahlt. Er gibt davon Jemanden mit 8% Gewinn ein Stükk von 108′ Länge und 86′ Breite; wie viel Land bleibt ihm noch, und was muß der Andere bezahlen?

6. Ein Feld ist 60^0 lang; durch dasselbe soll der Länge nach ein 15′ breiter Weg, zu beiden Seiten ein 3′ breiter Graben und daneben ein 2′ breiter Hag angelegt werden; wie viel Land geht dadurch für den Anbau verloren?

7. Ein Haus soll mit Schieferplatten gedekkt werden. Jede der beiden Dachflächen ist 60′ lang und 20′ breit, und auf 4 □′ gehen 9 Schieferplatten; wie viele Platten sind erforderlich?

8. Ein Feld enthält 684 $□^0$ und ist 36′ 9″ breit; wie lang ist es?

9. Ein Land ist 120 Meilen lang und enthält 10800 □Meilen; wie breit ist es?

10. Ein neuer Schweizerjuchart enthält 40000 □′; wie breit muß er sein, wenn er 800′ oder 640′ oder 2500′ lang ist?

11. Ein Feld, 165^0 lang und 100^0 5′ breit, soll in der Breite 22^0 verlieren; um wie viel muß es verlängert werden, wenn sein Inhalt gleich groß bleiben soll?

12. Eine neue Schweizer-Quadratmeile enthält wie viel neue schweiz. □′, oder $□^0$?

13. Die Grundlinie eines Dks. ist 33′ 6″, seine Höhe 22′ 4″; berechne den Inhalt.

14. Welches ist der Inhalt eines Dk., dessen Grundlinie 24^0 6′ und dessen Höhe 15^0 8′ beträgt?

15. Der Inhalt eines Dks. ist 1000 □″; seine Höhe 80″; suche die Grundlinie.

16. Ein Dk. enthält 1200 □′; seine Grundlinie ist 75′; was beträgt die Höhe?

17. Die beiden Katheten eines rechtw. Dks. betragen 35′ und 22′; suche seinen Quadratinhalt.

18. Die erste Seite eines Dks. sei = 60′, die zweite = 40′, die 3te = 50′; was beträgt die Höhe und der Flächeninhalt?

19. Es sei die Seite eines gleichseitigen Dks. = 16′; suche dessen Höhe und Flächeninhalt.

20. Wenn die Höhe eines gleichseitigen Dks. 18′ beträgt; wie groß ist seine Grundlinie und sein Inhalt?

21. Der Flächenraum eines rechrw. Dks. sei = 210 □″, eine Kathete = 20″; was beträgt die andere Kathete und die Hypotenuse?

22. Die beiden Gehren einer Raute betragen 8″ und 11″, oder 9″ und 12″, die Gehren einer Halbraute 5″ und 10″, oder 12″ 22″; wie groß ist jedes Mal der Inhalt?

Anm. Wenn eine Raute und eine Halbraute ihre beiden Gehren wechselweise gleich haben; wie groß ist dann ihr Flächeninhalt? Worin liegt bloß ihr Unterschied?

23. Ein Garten ist 62′ 5″ lang, oben 43′ 4″ und unten 51′ 6″ breit; man soll seinen Flächenraum berechnen.

24. Ein Fluß ist bei seinem Ursprung 3′ 2″ und bei seinem Ausfluß 250′ breit, und 60 Stunden lang; wie viel □′ oder □°, oder □Stunden nimmt sein Bett ein?

25. Eine abgestumpfte Pyramide wird von gleich großen Trapezen begrenzt; jedes ist 8′ 6″ hoch, unten 4′ 2″, oben 2′ 6″ breit; was betragen die 4 Seitenflächen?

26. Welchen Flächenraum faßt der Durchschnitt eines Grabens, welcher 7′ tief, oben 8′ 6″ unten 5′ 8″ breit ist?

27. Die Gehre eines Trapezoides sei = 136°, ihre Abstände von den entgegenstehenden Winkelspitzen seien 40° 6′ und 73° 2′; wie viel neue schweiz. Juchart enthält dasselbe?

28. In fig. 122 sei AC = 315′, BE = 112′ 3″, DF = 98′ 5″; suche den Flächeninhalt.

29. In fig. 124 sei AE = 32′, BE = 175′, EF = 192′, CF = 142′, FD = 64′; berechne den Flächenraum von ABCD.

30. Die Seite eines regelmäßigen Sechsekks betrage 8″ oder 10″; berechne seinen Seitenhalbmesser und seinen Inhalt.

31. Fig. 44 sei AC = 300′, a B = 162′, AD = 381′, b C = 180′, AE = 396′, c D = 152′, d F = 140′; wie viel Flächenraum faßt die ganze Figur?

Anm. Auf gleiche Weise können bei fig. 57 die Angaben gestellt werden.

§. 41.

Kreis.

I. Der Kreis ist das letzte ordentliche Vlk., der Inhalt der Kreisebene wird daher auch wie der eines ordentlichen Vlks. berechnet, nämlich als das halbe Produkt aus dem Umfang in den Halbmesser (§. 40, XII.) — Oder man kann die Kreisebene in ein Dk. verwandelt denken, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Kreishalbmesser ist. Bezeichnet daher q den Inhalt der Kreisebene, so ist

$$q = \tfrac{1}{2} \times r \cdot p = \tfrac{1}{4} \times d \cdot p$$

II. Setzt man hier für p seine Werthe aus No. 38, so entsteht

$$q = \tfrac{1}{2}\, r \times 2\, r \cdot 3{,}1416 = r^2 \times 3{,}1416$$

oder $= \tfrac{1}{4}\, d \times d \cdot 3{,}1416 = \tfrac{1}{4} \cdot d^2 \cdot 3{,}1416$

III. Setzt man aber in der obigen Gleichung (unter I.) für d seinen Werth aus No. 38, b; so wird

$$q = \tfrac{1}{4} \times \frac{p}{3{,}1416} \cdot p = \frac{p^2}{4 \cdot 3{,}1416}$$

oder $q = \tfrac{1}{4} \cdot p \times p \cdot 0{,}31831 = \tfrac{1}{4} \times 0{,}31831 \cdot p^2$
$= 0{,}0795775 \cdot p^2$

IV. Aus der Gleichung unter II. erhält man ferner:

$$d^2 = \frac{4\, q}{3{,}1416} = 4\, q \times 0{,}31831$$

$$d = \sqrt{(4\, q \times 0{,}31831)} = 2 \cdot 0{,}5641896 \times \sqrt{q} = 1{,}1283712 \times \sqrt{q}$$

V. Aus der Gleichung unter III. erhält man endlich:

$$p^2 = 4 \cdot 3{,}1416 \times q$$

$$p = \sqrt{(4 \cdot 3{,}1416 \times q)} = 2 \cdot 1{,}77245 \times \sqrt{q} = 3{,}54490 \times \sqrt{q}$$

Wir haben demnach in Bezug auf die Kreisebene folgende Bestimmungsgleichungen:

42) a. $q = \tfrac{1}{2} \times r \cdot p = \tfrac{1}{4} \times d \cdot p$

b. $q = r^2 \times 3{,}1416 = \tfrac{1}{4} \times d^2 \cdot 3{,}1416$

c. $q = \tfrac{1}{4} \times 0{,}31831 \cdot p^2 = 0{,}0795775 \times p^2$

d. $d = 1{,}1283712 \times \sqrt{q}$

e. $p = 3{,}54490 \times \sqrt{q}$

VI. Der Kreisausschnitt ist wie die Kreisebene einem Dk. gleich. So ist z. B. der Kreisausschnitt AMBD fig. 76 einem Dk. gleich, das den Bogen ADB zur Grundlinie und den Halbmesser MD zur Höhe hat. Bezeichnet daher a den Ausschnitt und b dessen Bogen, so ist $a = \frac{1}{2} \times r \cdot b$.

VII. Der Bogen kann gegeben sein, er kann aber auch erst bestimmt werden müssen. Setzt man daher für b seinen Werth aus No. 38, d; so entsteht

$$a = \frac{1}{2}\, r \times \frac{n \cdot p}{360} = \frac{r \cdot n \cdot p}{720}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2}\, r \times \frac{n \cdot 2\, r \cdot 3{,}1416}{360} = \frac{r^2 \cdot n \cdot 3{,}1416}{360}$$

$$= r^2 \cdot n \times 0{,}0087266\ldots$$

Anm. Da sich im letzten Ausdrukk auf allen folgenden Dezimalstellen 6 wiederholt, so kann man zur Abkürzung auch 0,008727 setzen.

VIII. Aus der Gleichung unter VI. erhält man ferner:

$$b = \frac{2\, a}{r}$$

so daß der Bogen aus dem Ausschnitt und dem Halbmesser berechnet werden kann.

IX. Aus der Gleichung unter VII. entspringt weiter:

$$n = \frac{720 \cdot a}{r \cdot p}$$

$$\text{oder} = \frac{360 \cdot a}{r^2 \cdot 3{,}1416} = \frac{360 \times 0{,}31831 \times a}{r^2}$$

X. Endlich ergibt sich aus den Gleichungen unter VI. und VII.:

$$r = \frac{2\, a}{b}$$

$$\text{und } r^2 = \frac{360 \cdot a}{n \cdot 3{,}1416} = \frac{360 \times 0{,}31831 \times a}{n} = 114{,}5916 \times \frac{a}{n}$$

$$\text{also } r = 10{,}70475 \times \sqrt{\frac{a}{n}}$$

XI. Um fig. 76 den Abschnitt ACBD zu finden, muß man vom Ausschnitt AMBD das Dk. ABM abziehen. Setzt man nun den Abschnitt $= \alpha$, die Sehne $AB = s$, die Höhe $MC = h$, so ist

$$\alpha = a - \tfrac{1}{2} \times s \, . \, h$$

Wir haben hienach für den Ausschnitt u. s. w. folgende Bestimmungsgleichungen:

$$43) \text{ a. } \quad a = \tfrac{1}{2}\, rb = \frac{r \, . \, n \, . \, p}{720} = \frac{r^2 \, . \, n \times 3{,}1416}{360} = r^2 \, . \, n \times 0{,}008727$$

$$\text{b. } \quad b = \frac{2\,a}{r}$$

$$\text{c. } \quad n = \frac{720 \, . \, a}{r \, . \, p} = \frac{360 \times 0{,}31831 \times a}{r^2}$$

$$\text{d. } \quad r = \frac{2\,a}{b} = 10{,}70475 \times \sqrt{\frac{a}{n}}$$

$$\text{e. } \quad \alpha = a - \tfrac{1}{2} \times s \, . \, h$$

XII. Zur Berechnung von a ist neben r besonders n erforderlich, dazu dann für α noch s und h. Es kann aber h entbehrlich gemacht werden; denn in dem gleichschenkligen Dk. ABM ist nach No. 36, e

$$h = \frac{1}{2 \, . \, s} \times \sqrt{s^2 \, . \, (2r+s)(2r-s)} = \tfrac{1}{2} \times \sqrt{(2r+s)(2r-s)}$$

dadurch wird $\alpha = \dfrac{r^2 \, . \, n \times 3{,}1416}{360} - \dfrac{s}{4} \times \sqrt{(2r+s)(2r-s)}$

Anm. Wenn r und n bestimmt sind, so sind auch h und s bestimmt, also nicht mehr willkürlich anzunehmen. Wie aber h und s aus r und n berechnet werden, läßt sich auf dieser Stufe nicht nachweisen.

XIII. Auch r kann entbehrlich gemacht werden. Es ist nämlich nach No. 43, a und e, wenn man $CD = c$ setzt

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \, . \, rb - \tfrac{1}{2} \, . \, sh = \tfrac{1}{2} \, . \, rb - \tfrac{1}{2} \, . \, s \, . \, (r - c) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \, . \, rb - \tfrac{1}{2} \, . \, rs + \tfrac{1}{2} \, . \, sc = \tfrac{1}{2} \, . \, r \, . \, (b - s) + \tfrac{1}{2} \, . \, sb$$

Es ist aber AM^2 oder $r^2 = AC^2 + CM^2 = \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 + (r-c)^2$

oder $r^2 = \tfrac{1}{4} \, . \, s^2 + r^2 - 2 \, . \, r \, . \, c + c^2$

also $2 \,.\, r \,.\, c = \frac{1}{4} \,.\, s^2 + c^2 = \frac{s^2 + 4\,c^2}{4}$

$$r = \frac{s^2 + 4\,c^2}{8\,c}$$

Dadurch wird

$$\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{s^2 + 4\,c^2}{8\,c} \times (b - s) + \frac{1}{2} \,.\, sc$$

$$= \frac{s^2 - 4\,c^2}{16 \,.\, c} \times (b - s) + \frac{s\,c}{2}$$

Anm. Auch auf folgende Weise kann r aus s und c bestimmt werden. Nach No. 38, b ist nämlich $CD \,.\, CE = AC^2$ oder $c \,.\, (2r - c) = (\frac{1}{2}s)^2$, oder $2\,c \,.\, r - c^2 = \frac{1}{4} \,.\, s^2$ also $2\,cr = \frac{1}{4} \,.\, s^2 + c^2 = \frac{s^2 + 4\,c^2}{4}$ und somit $r = \frac{s^2 + 4\,c^2}{8\,c}$

XIV. Es sei fig. 127 der Kreisring = F, dann der größere Halbmesser = R, der kleinere = r, so ist:

$$F = R^2 \,.\, 3{,}1416 - r^2 \,.\, 3{,}1416 = (R^2 - r^2) \,.\, 3{,}1416$$

XV. Aus dieser Gleichung erhält man ferner,

$$F = (R - r)\,(R + r) \,.\, 3{,}1416 = AB \times (R \,.\, 3{,}1416 + r \,.\, 3{,}1416)$$

$$= AB \times \frac{2\,R \,.\, 3{,}1416 + 2\,r \,.\, 3{,}1416}{2}$$

Setzt man nun die Breite AB des Kreisrings = W, und die größere und kleinere Kreislinie = P und p, so wird

$$F = W \times \frac{(P + p)}{2}$$

Anm. Diese Gleichung ergibt sich auch auf folgende doppelte Weise:

a. Die Kreisebene ist einem Dk. gleich, das den Kreisumfang zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat. Denkt man sich nun ein Dk. mit einer Grundlinie = P und einer Höhe = R; so wird sich darin und zwar vom Scheitelpunkt her ein anderes Dk. gestalten, dessen Grundlinie = p und Höhe = r ist, und beide Grundlinien P und p werden # sein. Somit ist die Figur zwischen den beiden Grundlinien ein Trapez, das dem Kreisring gleich kommt, und dessen Höhe = R − r = w ist; folglich ist

$$F = \frac{1}{1} \times w \,.\, (P + p).$$

b. Oder $F = \frac{1}{2} . R . P - \frac{1}{2} r . p$

$= \frac{1}{2} \times [(w + r) . P - rp] = \frac{1}{2} . [w . P + r . P - rp]$

$= \frac{1}{2} \times [w . P + r . (P - p)]$

Es ist aber $P : p = R : r$, daher $(P - p) : p = (R - r) : r = w : r$

mithin $(P - p) . r = p . w$

folglich $F = \frac{1}{2} . (w . P + w . p) = \frac{1}{2} \times w . (P + p)$

XVI. Endlich sei ein Theil des Kreisringes zwischen zwei Halbmessern MA und MD zu berechnen. Setzt man diese Ebene ABCD = f, so ist

$$f = \text{Ausschnitt } MAD - \text{Ausschnitt } MBC$$

oder wenn man Bog. AD = B, Bog. BC = b und den zugehörigen Mittelpunktsw. = n setzt, nach No. 43, a

$$f = \frac{R^2 . n . 3{,}14}{360} - \frac{r^2 . n . 3{,}14}{360} = (R^2 - r^2) \times \frac{n . 3{,}14}{360}$$

$$= (R^2 - r^2) . n \times 0{,}008727$$

XVII. Und hieraus erhält man endlich mit Hilfe von No. 38, d:

$$f = (R - r)(R + r) . \frac{n . 3{,}14}{360} = w . \left(\frac{R . n . 3{,}14}{360} + \frac{r . n . 3{,}14}{360}\right)$$

$$= \frac{w}{2} \times \left(\frac{2 R . n . 3{,}14}{360} + \frac{2 r . n . 3{,}14}{360}\right) = \frac{1}{2} . w . (B + b)$$

Anm. Es läßt sich diese letzte Formel für f auch noch auf die gleiche Weise herleiten, wie F unter XV. Anm.

44) a. $F = (R^2 - r^2) \times 3{,}1416 = \frac{1}{2} . w . (P + p)$

b. $f = (R^2 - r^2) \times \frac{n . 3{,}14}{360} = \frac{1}{2} \times w . (B + b)$

$= (R^2 - r^2) . n . 0{,}008727$

Anm. Setzt man fig. 128 $r = \frac{1}{2} R$, und bezeichnet für diesen Fall den Kreisring mit $\mathfrak{F}$, so ist nach 44, a nun

$$\mathfrak{F} = (R^2 - \frac{1}{4} . R^2) . 3{,}1416 = \frac{3}{4} . R^2 . 1416 = \frac{3}{4} . Q$$

Folglich ist die innere oder kleinere Kreisebene $\frac{1}{4}$ der größeren. — Theilt man noch durch Halbmesser die beiden Kreislinien in 3 gleiche Theile, so wird auch der Kreisring in 3 gleiche Theile AabB, AaCc, BbcC getheilt, deren jeder $\frac{1}{4}$ von Q beträgt und also = q ist.

Uebungsaufgaben.

(Zu No. 42.)

1. Was ist q, wenn $r = 6''$, oder $= 2'$, oder $= 3'\ 4''$, oder $= 9'\ 5''$ ist?

2. Was ist q, wenn $d = 2'$, oder $= 8''$, od. $= 5^0\ 2'$, od. 6^0 ist?

3. Wie groß ist die Aequatorsebene, wenn der Erdumfang 5400 Meilen beträgt?

4. Der Umfang eines Kreises sei eine neue Schweizerstunde von 16000; wie groß ist seine Ebene? Wie viele neue Schweizerjuchart enthält sie?

5. Der Inhalt eines Kreises sei ein neuer Schweizerjuchart; wie groß ist d und p?

(Zu No. 43.)

6. Man suche a, wenn $r = 5''$ und $b = 4''$, oder $r = 10'$ und $b = 12'$ ist.

7. Suche a, wenn $r = 24'$ und $n = 45^0$, oder $r = 11'$ und $n = 75^0$ ist.

8. Was ist b und n, wenn $a = 800\ \square'$ und $r = 64'$, oder $a = 60\ \square''$ $r = 15''$ ist?

9. Es sei $a = 880\ \square'$ und $b = 35'\ 2''$, oder $a = 64\ \square'$ und $b = 12''$; man suche r und n.

10. Es sei $a = 72\ \square'$ und $n = 30^0$, oder $a = 100\ \square''$ und $n = 22^0\ 33'$; man suche r, n, q.

11. Es sei $r = 8''$, $n = 60^0$, also $s = r$; man sucht α.

(Zu No. 44.)

12. Man suche F für $R = 20'$ und $r = 6'$, oder für $R = 12''$, $r = 8''$ oder für $P = 80'$ und $p = 50'$.

Anm. Im letzten Falle hat man zuerst die Halbmesser und dann w zu suchen.

13. Man suche F für $P = 72'$ und $w = 6'$. Hier ist zunächst R, dann r, nachher p und endlich F zu berechnen.

14. Man suche f für $R = 12'$, $r = 8'$, $n = 60^0$, oder für $B = 6'$, $b = 4'$, $n = 30^0$.

§. 42.

Vergleichung einiger Figuren.

Auf die Art der Inhaltsberechnung der einzelnen Figuren gründet sich auch ihre Raum-Vergleichung.

I. Es bezeichnen D und d zwei Dke. ohne besondere Eigenschaften, G und g ihre Grundlinien, H und h ihre Höhen. Dann ist

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2} \,.\, G \,.\, H, \quad \mathfrak{d} = \tfrac{1}{2} \,.\, g \,.\, h$$

also $\mathfrak{D} : \mathfrak{d} = \tfrac{1}{2}\, G \,.\, H : \tfrac{1}{2}\, g \,.\, h = G \,.\, H : g \,.\, h$

II. Und hieraus erhält man

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{d} = G : g, \text{ wenn } H = h$$

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{d} = H : h, \text{ wenn } G = g$$

III. Sind beide Dke. ähnlich, so ist ebenfalls

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{d} = G \,.\, g : H \,.\, h = \begin{Bmatrix} G : g \\ H : h \end{Bmatrix}$$

Nun ist aber $G : g = H : h$ (No. 32, f), also kann man hier die beiden Verhältnisse mit einander vertauschen, daher entsteht:

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{d} = \begin{Bmatrix} G : g \\ G : g \end{Bmatrix} = G \,.\, G : g \,.\, g = G^2 : g^2$$

$$\text{oder} = \begin{Bmatrix} H : h \\ H : h \end{Bmatrix} = H \,.\, H : h \,.\, h = H^2 : h^2$$

IV. Es seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{v}$ zwei ordentliche Vielekke von gleicher Seitenzahl, S und s ihre Seiten, R und r ihre Winkelhalbmesser, H und h ihre Seitenhalbmesser, U und u ihre Umfänge; dann ist nach No. 41, d

$$\mathfrak{V} = \tfrac{1}{2} \,.\, H \,.\, U \text{ und } \mathfrak{v} = \tfrac{1}{2} \,.\, h \,.\, u$$

also $\mathfrak{V} : \mathfrak{v} = \tfrac{1}{2} \,.\, H \,.\, U : \tfrac{1}{2} \,.\, h \,.\, u = H \,.\, u = h \,.\, u = \begin{Bmatrix} H : h \\ U : u \end{Bmatrix}$

Es ist aber $H : h = R : r = S : s = U : u$ (32, e),

Dadurch ergibt sich aus obiger Gleichung:

$$\mathfrak{V} : \mathfrak{v} = H^2 : h^2 = R^2 : r^2 : S^2 : s^2 = U^2 : u^2$$

V. Es seien Q und q zwei Kreisebenen, R und r ihre Halbmesser, D und d ihre Durchmesser, P und p ihre Umfänge, n ein in beiden gleicher Mittelpunktswinkel, A und a die zu n gehörigen Ausschnitte, B und b eben solche Bogen; so ist

$$Q = \tfrac{1}{2} R \,.\, P \text{ und } A = \tfrac{1}{2} R \,.\, B$$

$$q = \tfrac{1}{2} r \,.\, p \qquad a = \tfrac{1}{2} r \,.\, b$$

daher $Q : q = \tfrac{1}{2} R \,.\, P : \tfrac{1}{2} r \,.\, p = R \,.\, P : r \,.\, p = \begin{Bmatrix} R : r \\ P : p \end{Bmatrix}$

$$A : a = \tfrac{1}{2} R \,.\, B : \tfrac{1}{2} r \,.\, b = R \,.\, B : r \,.\, b = \begin{Bmatrix} R : r \\ B : b \end{Bmatrix}$$

Es ist aber $R : r = D : d = P : p = B : b$ (34, b).

Dadurch ergibt sich aus obigen beiden Gleichungen:
$Q : q = R^2 : r^2 = D^2 : d^2 = P^2 : p^2 = B^2 : b^2 = A : a$

Aus allem diesem folgt:

45) a. Dreiekke überhaupt verhalten sich, wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen.

b. Dreiekke verhalten sich bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien.

c. Aehnliche Dreiekke verhalten sich, wie die Quadrate entsprechender Grundlinien oder Höhen.

d. Ordentliche Vielekke von gleicher Seitenzahl verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Seitenhalbmesser, Winkelhalbmesser, Seiten oder Umfänge.

e. Kreisebenen und ihre Kreisausschnitte mit gleichem Mittelpunktswinkel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, ihrer Durchmesser, ihrer Umfänge, und ihrer Bogen von gleichen Mittelpunktsw.

Anm. Die Sätze unter a, b, c lassen sich leicht auch für Rechtekke und schiefwinklige Parallelogramme nachweisen. Eben so läßt sich der Satz unter c für andere ähnliche geradlinige Figuren darthun.

Uebungsaufgaben.

1. Wie verhalten sich 2 Dke., wenn $G = 12'$, $H = 15'$, und $g = 8'$, $h = 6'$, oder $G = 7^0\ 6'$, $H = 4^0\ 8'$, $g = 5^0\ 7'$, $h = 3^0\ 2'$ ist?

2. Wie verhalten sich 2 Dke., wenn $G = g = 27'$, $H = 22''$ $h = 18'$, oder $G = g = 135'$, $H = 96'$, $h = 60'$ ist?

3. Wie verhalten sie sich, wenn $G = 42'$, $g = 30'$, $H = h = 27'\ 3''$; oder wenn $G = 216'$, $g = 160'$, $H = h = 112'$ ist?

4. Wie verhalten sich zwei ähnliche Dke., wenn $G = 40'$, $H = 18'$, $g = 16'$, $h = 7'\ 2''$; oder wenn $G = 22'\ 5''$, $H = 15'$ $g = 9'$, $h = 6'$ ist?

5. Wie verhalten sich zwei Aekker, wenn der eine 315′ lang, 24′ breit, der andere 240′ lang, 20′ breit ist?

6. Wie verhalten sich 2 gleichseitige Dke., wenn ihre Grundlinien 16″ und 12″, oder ihre Höhe 15″ und 9″ betragen?

7. Wie verhalten sich 2 Quadrate, deren Seiten 18″ und 12″, oder 2000′ und 1500′ betragen?

8. Wie verhält sich der □Meter zum neuen schweiz. □'? (1 schweiz. Fuß = 0,3 Meter.)

9. Wie verhält sich die neue schweiz. □Stunde oder □Meile zu der französischen □Meile (lieue)? 1 neue schweiz. Wegstunde = 4800 Meter; 1 lieue = $4/9$ Myriameter (10000 Meter).

10. Wie verhält sich die neue schweiz. □Stunde zu der geographischen □Meile? 25 lieues = 15 geogr. Meilen. — Vergl. die vorige Aufgabe.

11. Wie verhalten sich 2 gleichnamige ordentliche Vielekke, wenn ihre Seiten 8'' und 6'', oder ihre Seitenhalbmesser 3' und 2', oder ihre Winkelhalbmesser 15'' und 12'' betragen?

12. Wie verhalten sich 2 Kreisebenen, deren Durchmesser 21'' und 15'', oder deren Halbmesser 12'' und 8'' betragen?

(Der Schluß und alle Figuren folgen im nächsten Heft.)

Deutsche Beispiel-Grammatik oder ausgewählter, syntaktisch geordneter Stoff zu Denk- und Sprechübungen. Mit kurzen grammatischen Bemerkungen. Für höhere Bürgerschulen und die mittleren Klassen höherer Lehranstalten. Von Fr. Theod. Vernaleken. Sekundarlehrer im K. Zürich. Winterthur 1840. Im Verlage der Steiner'schen Buchhandlung. (12 Bz.)

Ueber den Zweck und Gebrauch der „Beispiel-Grammatik." Nebst Andeutungen und Beispielen über die logische und grammatisch-stylistische Zergliederung der Mustersätze. Mit Bezugnahme auf das Uebungsbuch. Von Fr. Th. Vernaleken. Winterthur 1840. (6 Bz.)

Seit der Erscheinung der Lehrbücher über deutsche Sprache von Heise und Krause ist Außerordentliches geschehen in diesem Fache; man erinnere sich nur an die Namen von Grimm, Schmitthenner, Herling und Bekker. Was diese Männer in rein wissenschaftlicher,