Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien [Schluss]

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Allgemeine schweizerische Schulblätter**

Band (Jahr): **7 (1841)**

Heft 5-6

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-865830

ken. Der Lehrer der Volksschule wird sich mit der 2ten Stufe begnügen müssen; in dieselbe aber wird er Radien der herrlichen Sonne der letzteren Stufe, Blüten jenes Wundergartens, Stralen jener Weltanschauung fallen lassen. Das ist das Aechte in jeder Wissenschaft, dies das Wahre, daß man sich an die Idee halte, und dieselbe so viel als möglich verständlich zu machen und zu verkörpern suche; sonst ist der Unterricht todt und fruchtlos. Geht es uns ja doch im Leben selber so: nur der lebt im ächten Sinne des Wortes, welcher die Idee des Lebens aufzufassen im Stande ist, der die Blütenäste zu ergreifen versteht aus den Gärten der himmlischen Hesperiden.

So viel für Einmal; mögen diese Andeutungen dazu beitragen, die Pädagogik immer lebenskräftiger, produktiver, naturgemäßer zu machen.

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer=Seminarien (Schluß.)

Fünfter Abschnitt.

Richtung gerader Linien zu Ebenen und der Ebenen zu einander.

§. 43.

Bisher kamen nur solche Linien vor, welche in der Ebene lagen, mit der sie in Verbindung waren. Es können aber auch Linien, welche außerhalb einer Ebene liegen, mit derselben in Beziehung gebracht werden. Eine Gerade außerhalb einer Ebene kann diese entweder in einem Punkte oder auch gar nicht treffen, d. h. mit ihr ungleichlaufend oder gleichlaufend sein. Der Punkt, in welchem eine aufstehende Gerade einer Ebene begegnet, heißt ihr **Fußpunkt**. Die aufstehende Gerade kann zur Ebene **senkrecht** oder **schief** sein.

Anm. In Bezug auf den Inhalt dieses Abschnittes vergleiche man §. 16.

I. Die Aufstehende AB fig. 129 sei zu den Geraden CD und EF in der Ebene MN senkrecht; ist sie dann auch zu der Ebene MN selbst senkrecht?

Mache BC = BD; durch C und D ziehe EG # FH. Die Dke. BCE und BDF haben nun BC = BD, W. CBE = W. DBF, W. BCE = BDF, sind also einerlei, daher ist BE = BF, und CE = DF. — Die Dke. BCG und BDH haben ebenso BC = BD, W. CBG = W. DBH, W. BCG = W. BDH, sind also einerlei, daher ist BG = BH, CG = DH.

Ziehe nun AC, AD, AE, AF, AG, AH. Die rechtwinkligen Dke. ABC und ABD haben AB = AB, BC = BD, sind also einerlei, daher ist AC = AD. Die rechtwinkligen Dke. ABE und ABF haben AB = AB, BC = BF, sind also einerlei, daher ist AE = AF. — Die Dke. ACE und ADF haben nun alle Seiten wechselweise gleich, sind somit einerlei, also ist W. ACE = W. ADF, und folglich sind auch die Nebenw. der Letzteren gleich, oder W. ACG = W. ADH. Die Dke. ACG und ADH haben nun AC = AD, CG = DH, W. ACG = W. ADH, sind somit einerlei, demnach ist AG = AH. Endlich haben die Dke. ABG und ABH alle Seiten wechselweise gleich, sind somit einerlei, und daher ist W. ABG = W. ABH. Folglich ist AB senkrecht zu GH.

Die Gerade GH ist in der Ebene MN durch den Fußpunkt B in beliebiger Richtung gezogen, ist also Stellvertreterin aller Geraden, die außer CD und EF durch B gehen können; somit ist auch AB zu allen Letzteren senkrecht, folglich auch zur Ebene MN, weil sie rings um den Punkt B nur rechte W. bildet.

II. Es sei umgekehrt AB senkrecht zur Ebene MN. Dies kann nur eine Folge davon sein, daß AB auch zu jeder Geraden senkrecht ist, welche in der Ebene MN durch den Punkt B geht.

III. Es sei AB senkrecht zur Ebene MN, und BC senkrecht zu AB im Punkte B; liegt dann BC in der Ebene MN? — AB ist senkrecht zu jeder Linie, welche in der Ebene MN durch B geht; eine Gerade, die durch B geht, aber über oder unter der Ebene MN liegt, muß also mit AB einen schiefen W. bilden. Demnach kann BC als zu AB senkrecht, nur in der Ebene MN liegen.

IV. Es seien die Geraden BC, BE, BG in B zu AB senkrecht. Dann müssen sie in derjenigen Ebene liegen, auf welcher AB in B senkrecht steht; sie liegen also in einer Ebene.

V. AB ist die kürzeste Gerade, die aus A nach der Ebene MN gehen kann. Denn alle Schiefen sind Hypotenusen, also > AB; darum ist auch AB der wahre Abstand des Punktes A von der Ebene MN.

VI. Aus A und B kann nur eine Gerade AB gehen, welche zugleich zu den in B sich schneidenden Linien senkrecht ist, also auch nur eine Gerade, die zur Ebene MN senkrecht ist. — H. f.

46) a. Wenn eine Aufstehende in ihrem Fußpunkt zu zwei in der Ebene sich durchschneidenden Geraden senkrecht ist; so ist sie zur Ebene selber senkrecht.

b. Ist eine Aufstehende zu einer Ebene senkrecht; so ist sie auch zu jeder Geraden senkrecht, welche in der Ebene durch den Fußpunkt geht.

c. Ist eine Aufstehende senkrecht zu einer Ebene, so liegt in der Letzteren auch jede Gerade, welche zu jener im Fußpunkte senkrecht ist.

d. Ist eine g. L. zu mehrern andern, in einem Punkte sich schneidenden g. L. senkrecht; so liegen diese in einer Ebene.

e. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade von einem Punkte nach einer Ebene, oder der Abstand desselben von ihr.

f. Durch einen bestimmten Punkt innerhalb oder außerhalb einer Ebene kann zu derselben nur eine Senkrechte gehen.

Anm. Auch ergibt sich aus I., daß die Schiefen, die mit der Senkrechten vom gleichen Punkt außer der Ebene ausgehen, und deren Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten gleich weit abstehen, gleich sind, und umgekehrt.

VII. Die Linie AB fig. 130 stehe schief auf der Ebene PQ. Aus A gehe zur Ebene PQ die Senkrechte

AC, und man ziehe BC. Die Gerade BC zwischen den Fußpunkten von AB und AC heißt der Grundriß (die Basis, Projektion) der Schiefaufstehenden AB.

VIII. Wie verhält sich nun der W. ABC zu andern W., welche AB mit Linien in der Ebene PQ, z. B. mit BG und BH bildet? — Man beschreibe mit BC als Halbmesser einen Kreis, und ziehe die Sehnen CG und CH, dann die Linien AG und AH. — Weil nun W. CBG < W. CBH, so ist auch CG < CH. Die rechtwinkligen Dke. ACG und ACH haben nun AC = AC, aber CG < CH; also ist die Hypotenuse AG < AH. In den Dkn. ABG und ABH ist AB = AB, und BG = BH, aber AG < AH, somit W. ABG < ABH. Wenn also der W. CBG zu- oder abnimmt, so muß auch der W. ABC zu- oder abnehmen. Wenn daher der W. CBG verschwindet, indem BG in den Grundriß BC fällt, so entsteht der kleinste W., den AB mit einer Linie in der Ebene bilden kann, nämlich der W. ABC, welcher daher der Richtungsw. von AB zur Ebene PQ ist.

IX. Es sei nun fig. 131 der Grundriß BC senkrecht zu EF in der Ebene PQ. — Man mache wieder mit dem Grundriß BC einen Kreis, ziehe CE, CF, AE, AF. Wegen der rechten W. am Mittelpunkte B ist CE = CF. Die rechtwinkligen Dke. ACE und ACF sind wegen der Gleichheit ihrer Katheten einerlei, also ist AE = AF. Nun haben die Dke. ABE und ABF alle Seiten wechselweise gleich, sind daher einerlei, also auch die Nebenw. ABE und ABF gleich, mithin AB senkrecht zu EF.

X. Ist umgekehrt AB senkrecht zu EF, so muß auch wieder BC zu EF senkrecht sein.

XI. Es sei fig. 132 die Schiefaufstehende AB senkrecht zur Linie DE in der Ebene MN, und eine andere Linie BC in der Ebene MN sei ebenfalls senkrecht zu DE. Will man nun aus B den Grundriß von AB ziehen, so muß er ebenfalls zu DE senkrecht sein (X). Es kann aber in der Ebene MN zu DE nur eine Senkrechte aus B gehen; und weil BC wirklich zu DE senkrecht ist, so muß der Grundriß von AB in die Gerade BC fallen.

XII. Aus A gehe nun noch AC senkrecht zu BC; ist dann AC auch senkrecht zur Ebene MN? — Will man aus A eine Senkrechte auf die Ebene MN fällen, so muß dieselbe auch den Grundriß BC treffen und zu ihm senkrecht sein. Es kann aber aus A zu BC nur eine Senkrechte gehen; und weil AC zu BC senkrecht ist, so muß AC auch zur Ebene MN senkrecht sein. — H. f.

47) a. Eine Schiefaufstehende bildet mit ihrem Grundriß ihren Richtungsw. zur Ebene.

b. Ist der Grundriß einer Schiefaufstehenden senkrecht zu einer in der Ebene durch den Fußpunkt gehenden Linie; so ist auch die Aufstehende zu Letzterer senkrecht.

c. Ist eine Schiefaufstehende zu einer Linie in der Ebene senkrecht, so ist es auch ihr Grundriß.

d. Ist eine Linie in der Ebene senkrecht zu einer Schiefaufstehenden und zu einer anderen durch den Fußpunkt gehenden Linie in der Ebene; so liegt in der letztern Linie der Grundriß der Schiefaufstehenden.

e. Geht aus einem Punkte einer Schiefaufstehenden zu ihrem Grundriß eine Senkrechte; so ist Letztere auch zur Ebene senkrecht.

§. 44.

I. Die Linien AB und CD fig. 133 stehen senkrecht auf der Ebene MN. — Man ziehe zwischen den Fußpunkten die Gerade BD und ebenfalls in der Ebene MN die Linie DE senkrecht zu BD, dann noch AD. Nun ist BD Grundriß von AD, also auch DE senkrecht zu AD (No. 47, b); ED ist aber auch zu DC senkrecht (46, b), daher liegen die L. AD, BD, CD in einer Ebene (46, d), in welcher auch AB liegt. Da nun AB und CD in einer Ebene liegen und zu BD senkrecht sind; so sind sie ♯.

II. Es sei umgekehrt AB ♯ CD, und AB senkrecht zur Ebene MN. Dann muß auch CD zur Ebene MN senkrecht sein. Denn das Gleichlaufendsein Beider ist (nach I.) nur dann möglich, wenn auch Beide zu MN senkrecht sind. — H. f.

48) a. Sind 2 g. L. zu einer Ebene senkrecht, so sind sie unter sich gleichlaufend.

b. Stehen 2 gleichlaufende g. L. auf einer Ebene, und ist eine derselben zur Letzteren senkrecht, so ist es auch die andere.

III. Die Schiefaufstehenden AB und CD fig. 134 seien ♯. — Mache AB = CD, fälle AE und CF senkrecht zur Ebene PQ, ziehe BE und DF, dann AC, BH, EF, ferner EG und FH senkrecht zu BH, endlich AG und CH, welche ebenfalls zu BH senkrecht sind (47, b).

Weil AB ♯ CD ist, so liegen Beide in einer Ebene ABHC. Die rechtwinkligen Dke. ABG und CDH haben nun AB = CD und W. ABG = W. CDH, sind also einerlei, daher AG = CH und BG = DH.

Die Senkrechten AG und CH liegen ebenfalls in der nämlichen Ebene ABHC, sind also ♯; weil sie aber auch gleich sind, so ist auch AC ♯ GH (oder BH) (17, e). Da jedoch GH zu GA und GE, also zur Dreieksebene AGE senkrecht ist (46, a); so ist auch AC zur Ebene AEG (48, b), und darum zur Linie AE senkrecht (46, b). AE und CF, als senkrecht zur Ebene PQ, sind ♯ und liegen in einer Ebene ACFE, in welcher auch AC und EF liegen; Letztere sind daher, als senkrecht zu AE, ebenfalls ♯. Weil aber AC zur Ebene AEG senkrecht ist, so ist auch EF zu ihr, und darum zu EG senkrecht. Das Viereck EGHF ist somit ein Rechteck, also GE = HF.

Nun sind die rechtw. Dke. BEG und DFH einerlei, also W. m = W. n, daher BE ♯ DE; ferner BE = DF. Dann haben die rechtw. Dke. ABE und CDF jetzt AB = CD, BE = DF, sind demnach einerlei, folglich ist W. ABE = W. CDF.

IV. Bei den Schiefaufstehenden AB und CD sei nun umgekehrt W. ABE = W. CDF und BE ♯ DF. Dies kann nur eine Folge davon sein, daß AB ♯ CD ist.

V. Es seien fig. 135 die Aufstehenden AB und CD, dann in der Ebene PQ die Geraden BE und DF ⧺. — Man mache wieder BA = DC, fälle AG und CH senkrecht zur Ebene PQ, ziehe GF, dann AE und CF, ferner BG und DH. — Die rechtw. Dke. ABG und CDH haben nun AB = CD, W. ABG = W. CDH (nach III.), sind also einerlei, daher AG = CH, BG = DH. Auch werden dadurch die Dke. BEG und DFH einerlei, also BE = DF, EG = FH. Die rechtw. Dke. AEG und CFH sind, weil AG = CH, GE = HF, ebenfalls einerlei, also AE = CF. Die Dke. ABE und CDF haben endlich wegen der Gleichheit aller Seiten auch W. ABE = W. CDF. — H. f.

49. a. Sind 2 schiefaufstehende g. L. ⧺; so haben sie gleichlaufende Grundrisse und gleiche Richtungsw. zur Ebene.

b. Haben 2 schiefaufstehende g. L. gleichlaufende Grundrisse und gleiche Richtungsw. zur Ebene; so sind sie ⧺.

c. Wenn 2 schiefaufstehende g. L. ⧺ sind, und aus ihren Fußpunkten gleichlaufende g. L. in der Ebene gehen; so bilden jene mit diesen gleiche W.

VI. Die Schiefaufstehenden AB und AC fig. 136, die außerhalb der Ebene in A sich treffen, seien gleich. — Man fälle AD senkrecht zur Ebene, ziehe die Grundrisse BD und CD und die Verbindungslinie BC. — Die rechtw. Dke. ABD und ACD sind einerlei, also BD = CD, W. ABD = W. ACD; das Dk. BCD ist gleichschenklig, also W. DBC = W. DCB.

Anm. Die Gleichheit von AB und AC, BD und CD, W. ABD und W. ACD, W. DBC und W. DCB bedingen sich gegenseitig.

VII. Die Schiefaufstehenden AB und AC fig. 137 begegnen sich außerhalb der Ebene in A; durch ihre Fußpunkte gehen in der Ebene die Parallelen FG und HI; es sei AB zu FG, und AC zu HI senkrecht. — Man fälle aus A auf die Ebene die Senkrechte AD, ziehe dann DB und DC. Letztere sind die Grundrisse von AB und AC, also senkrecht zu FG und HI (47, c). Man denke einen dieser Grundrisse, z. B. BD bis nach

HI verlängert, so muß diese Verlängerung zur Parallelen HI senkrecht sein (4, d). Weil aber DC zu HI wirklich senkrecht ist, und aus D nach HI nur eine Senkrechte gehen kann; so muß jene Verlängerung von BD mit DC zusammenfallen; daher sind BD und CD nur eine Gerade, nämlich die Verbindungslinie der Aufstehenden, die zu den beiden Parallelen senkrecht ist.

VIII. Es bleibe FG ♯ HI, aber es seien AB und BC zugleich senkrecht zu FG. — Dann liegt in BC der Grundriß von AB (47, d); geht daher AD senkrecht zu BC, so ist AD auch senkrecht zur Ebene MN (47, e), also ist DC der Grundriß von AC. Es ist aber DC senkrecht zu HI (4, d), somit auch AC senkrecht zu HI (47, b).

Anm. Oder: weil FG zu BA und BC senkrecht ist, so ist FG auch senkrecht zur Ebene ABC (46, a); da aber HI ♯ FG ist, so ist auch HI zur Ebene ABC, und folglich zu AC senkrecht (48, b und 46, b).

50) a. Wenn 2 Schiefaufstehende, die außerhalb der Ebene sich treffen, gleich sind; so haben sie gleiche Grundrisse, gleiche Richtung zur Ebene und zu ihrer Verbindungslinie in der Ebene, und umgekehrt.

b. Wenn 2 Schiefaufstehende, die außer der Ebene sich treffen, zu 2 Parallelen, welche in der Ebene durch die Fußpunkte jener Beiden gehen, senkrecht sind; so ist auch ihre Verbindungslinie in der Ebene zu den beiden Parallelen senkrecht.

c. Wenn eine von 2 Schiefaufstehenden, die außer der Ebene sich treffen, mit ihrer Verbindungslinie zu einer der beiden Parallelen, welche in der Ebene durch die Fußpunkte gehen, senkrecht ist; so ist auch die andere Aufstehende zu der andern Parallelen senkrecht.

§ 45.

I. Die Linie DE außerhalb der Ebene PQ fig. 138 sei ♯ zu der Linie FG in der Ebene PQ. — Dann liegen beide Linien DE und FG auch in einer Ebene, nämlich, wenn man DF und EG zu FG senkrecht zieht, in der Ebene DFGE (§. 10, I). Könnte nun DE die Ebene PQ treffen, so müßte es innerhalb der Ebene DFGE geschehen, und zwar so, daß DE die Linie FG träfe. Dies ist aber nicht möglich, weil DE ⋕ FG ist. Das Gleiche findet ebenso zwischen DE und jeder andern Linie in PQ Statt, zu der DE ⋕ ist. Da somit DE nirgends eine Richtung zu PQ hat, so ist sie mit dieser Ebene gleichlaufend.

II. Es sei nun wieder DE ⋕ FG, und FG ⋕ zu einer andern Linie LR in der Ebene PQ. — Aus einem Punkte D in DE fälle man zur Ebene PQ die Senkrechte DH, und aus H die Linie HL senkrecht zu FG und LR, und ziehe DF und DL. Nun ist FH Grundriß von DF, also auch DF senkrecht zu FG (47, b), mithin FG zur Ebene des Dks. DHL senkrecht (46, a). Weil aber FG ⋕ DE und LR ist, so sind auch diese zur Ebene DHL senkrecht (48, b) daher selbst parallel (48, a). — H. f.

51) a. Wenn eine Linie außer einer Ebene zu einer Linie in derselben ⋕ ist, so ist sie auch ⋕ mit der Ebene selbst.

b. Ist eine Linie außer einer Ebene ⋕ mit einer Linie in der Ebene, und diese wieder ⋕ mit einer andern Linie in der Ebene; so ist die erste auch ⋕ mit der letzten.

§. 46.

I. Die Ebenen MN und NP fig. 139 durchschneiden sich; wie ist ihr Durchschnitt beschaffen? — Man verbinde 2 Durchschnittspunkte B und E durch die Gerade BE. Weil nun die Punkte B und E in der Ebene MN liegen, so liegt auch die Gerade BE darin; und weil B und E auch in der Ebene NP liegen, so liegt die Gerade BE ebenfalls darin. Somit ist die Gerade BE (oder NQ), weil sie in beiden Ebenen liegt, der Durchschnitt derselben.

II. Welches ist nun die Richtung beider Ebenen zusammen? — Senkrecht zur Durchschnittslinie NQ ziehe man in der Ebene MN die Geraden AB und DE, in der Ebene NP die Geraden BC und EF; dann ist AB ‡ DE, und BC ‡ EF. Man kann aber BC und EF in Bezug auf die Ebene MN als Schiefaufstehende betrachten, deren Grundrisse in AB und DE liegen (47, d); daher ist W. ABC = W. DEF (49, a). Das Nämliche gilt ebenso von jedem W., dessen Schenkel wechselweise in den beiden Ebenen liegen und zum Durchschnitt senkrecht sind; derselbe hat also eine beständige Größe, gibt somit die Zusammenrichtung beider Ebenen an.

III. Es sei die Gerade BC in der Ebene NP zur Ebene MN senkrecht. Dann ist auch ihre Parallele EF zur Ebene MN senkrecht (48, b); also steht die Ebene NP selbst auf der Ebene MN senkrecht.

IV. Die Ebene MK fig. 140 schneide die Ebene MQ unter einem spitzen W. in der Geraden MN. Aus dem Punkte H zwischen beiden Ebenen gehen auf dieselben die Senkrechten HC und HD; wie ist der W. CHD beschaffen? — Man ziehe aus H nach MN die Senkrechte HB, dann die Linien CB und DB. Nun ist HB in Bezug auf beide Ebenen eine Schiefaufstehende, BC ihr Grundriß in der untern, BD ihr Grundriß in der obern Ebene. Da nun auch BC und BD zu MN senkrecht sind (47, c), so folgt, daß CBD der Richtungsw. beider Ebenen ist (oben II.), und daß BC und BH und BD in einer Ebene liegen (46, d), in welcher HC und HB sich befinden. In dem Viereck BCHD ist nun W. BCH = W. BDH = 90^0 (46, b), also auch W. CBD + W. CHD = 180^0.

52) a. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine g. L.

b. Der Richtungsw. zweier Ebenen ist durch 2 Gerade bestimmt, deren je eine in jeder Ebene zum Durchschnitt senkrecht ist.

c. Ist eine Gerade in einer Ebene zu einer andern Ebene senkrecht; so ist auch jene Ebene zu der Letzteren senkrecht.

d. Wenn 2 Gerade aus einem Punkte zwischen 2 Ebenen nach denselben senkrecht gehen; so bilden sie einen W., der mit dem Richtungsw. beider Ebenen zusammen 180^0 beträgt.

V. Es sei fig. 141 die Linie Aa senkrecht zu den Ebenen MN und mn. Durch A ziehe man in der Ebene MN die g. L. BC, DE, FG, so sind sie zu Aa senkrecht (46, b). Durch a ziehe man die g. L. bc # BC, de # DE, fg # FG, so sind bc und de und fg auch senkrecht zu Aa, und liegen daher in der Ebene mn (46, c). Die Ebene mn hat also nach allen Seiten hin mit MN gleiche Richtung (51, a), also ist mn # MN.

VI. Es sei umgekehrt mn # MN und Aa senkrecht zu MN; so kann Ersteres nur Statt finden, wenn Aa auch zu mn senkrecht ist.

VII. Es bleibe mn # MN und es seien Aa und Ee senkrecht zu MN. — Nun sind Aa und Ee (nach VI.) auch senkrecht zu mn; und wenn man AE und ae zieht, so ist AaeE ein Rechtekk, mithin Aa = Ee.

53) a. Wenn eine Gerade zu 2 Ebenen senkrecht ist, so sind sie gleichlaufend.

b. Wenn eine Gerade zu einer von 2 gleichlaufenden Ebenen senkrecht ist, so ist sie es auch zur andern.

c. Senkrechte Linien zwischen gleichlaufenden Ebenen sind gleich.

VIII. Die Linie AB durchdringe fig. 142 die # Ebenen MN und PQ. — Man fälle BC senkrecht auf MN, also auch auf PQ (53, b), und ziehe durch die Fußpunkte in beiden Ebenen die Linien AC und DE. Dann sind x und y die Richtungsw. von AB zu MN und PQ, und ist BC senkrecht zu AC und DE (46, b), also AC # DE im Dk. ABC, folglich x = y.

Anm. Es finden also auch hier die Sätze No. 4, a Statt.

IX. Die Schiefaufstehenden AD und BE fig. 143 liegen zwischen den # Ebenen MN und PQ, und ihre Richtungsw. zu MN seien gleich. — Man fälle aus D und E zu MN die Senkrechten DG und EH, ziehe AG und BH. Die rechtw. Dke. ADG und BEH haben nun DG = EG (53, c) und W. DAG = W. EBH, sind also einerlei, daher AD = BE.

X. Umgekehrt sei MN # PQ und AD = BE. Man ziehe die vorigen Hilfslinien; dann sind die rechtw. Dke.

ADG und BEH wieder einerlei (9, d), also W. DAG = W. EBH.

XI. Es sei fig. 144 MN # PQ und dazwischen AD # BE; wie verhalten sich ihre Verbindungslinien AB und DE in beiden Ebenen? — Man fälle die Senkrechten DG und EH zu MN, und ziehe AG und BH; so ist W. DAG = W. EBH (49, a), also AD = BE (54, b); folglich im Viereck ADEB nun AB = und # DE (17, e).

XII. Es sei fig. 145 MN # PQ, und aus B gehen durch PQ nach MN die g. L. BA und BC; man verbinde ihre Durchgangspunkte durch die g. L. AC und DE; wie verhalten sich Letztere? — Man ziehe DF # CE (oder CB); dann ist DE # FC (oder AC) (54, d).

XIII. Es sei fig. 146 MN # PQ und darin AB # DE, AC # DF; wie sind die W. BAC und EDF beschaffen? — Man fälle aus D, E, F zu MN die Senkrechten DG, EH, FI, ziehe GH und GI. Nun ist DG # EH # FI (48, a), also DE # GH, und DF # GI (54, b); darum auch AB # GH, und AC # GI, mithin W. BAC = W. HGI (4, f). Ferner ist DG senkrecht zu DE und DF, GH und GI; man kann daher die W. EDF und HGI als Richtungsw. der in DG sich treffenden Ebenen DEHG und DFIG ansehen (52, b), also ist W. EDF = W. HGI; da aber W. BAC = W. HGI ist, so ist auch W. BAC = W. EDF.

54) a. Wenn eine g. L. zwei # Ebenen durchdringt, so hat sie zu Beiden gleiche Richtungsw.

b. Wenn 2 Schiefaufstehende zwischen # Ebenen zu einer derselben gleiche Richtungsw. haben, so sind sie gleich.

c. Gleiche Schiefaufstehende zwischen # Ebenen haben gleiche Richtungsw. zu denselben.

d. Parallele Linien zwischen # Ebenen sind gleich und schließen in denselben gleiche Parallelen ein.

e. Wenn zwei g. L. von einem Punkte aus 2 # Ebenen durchdringen, so schließen sie in denselben # Linien ein.

f) Wenn 2 W. in # Ebenen je 2 Schenkel # haben, so sind die W. selbst gleich.

XIV. Die Ebenen MN und PQ fig. 147 sollen eine solche Richtung haben, daß zwischen ihnen die zu MN Senkrechten DG, EH, FI gleich sind. — Man ziehe DE, DF, GH, GI. Weil nun DG und EH, dann DG und FI # und = sind (48, a); so ist DE # GH und DF # GI (17, e), also DG senkrecht zu DE und DF, und darum senkrecht zu PQ (46, a) mithin PQ # MN (53, a).

XV. Die Geraden AD, BE, CF zwischen den Ebenen MN und PQ fig. 148 seien # und =. Man fälle auf MN die Senkrechten DG, EH, FI und ziehe AG, BH, CI. Dann sind die Dke. ADG, BEH und CFI einerlei (40, a und 9, b oder d), also DG = EH = FI, folglich MN # PQ (55, a).

XVI. Die Schiefaufstehende AB fig. 142 durchdringe die Ebenen MN und PQ unter gleichen übereinstimmenden Richtungsw. x und y, so daß die Grundrisse AC und DE in einer Ebene liegen. Dann ist AC # DE. Fällt man BC senkrecht zu AC, so ist sie auch senkrecht zu DE, also senkrecht zu beiden Ebenen (47 e), daher MN # PQ (53, a).

XVII. In den Ebenen MN und PQ fig. 146 sei endlich AB # DE, AC # DF. — Man mache AB = DE, AC = DF, ziehe AD, BE, CF. Weil nun AB # und = DE, so ist AD # und = BE (17, e); und weil AC # und = DF, so ist AD # und = CF, daher alle 3 Linien AD, BE, CF # und =, folglich MN # PQ (55, b). — H. f.

55) Zwei Ebenen sind gleichlaufend:

a. wenn sie 3 gleiche Senkrechte zwischen sich fassen;

b. wenn sie 3 gleiche und parallele Schiefaufstehende zwischen sich fassen, die unter sich nicht in einer Ebene liegen;

c. wenn eine Schiefaufstehende sie unter gleichen übereinstimmenden Richtungsw. durchdringt;

d. wenn die Schenkel eines W. in der einen wechselweise zu den Schenkeln eines W. in der andern # sind,

§. 47.

I. Es sei fig. 149 die Ebene AB # CD, und CD # EF. — Man ziehe durch diese 3 Ebenen eine Hilfslinie MP senkrecht zu AB. Dann ist MP auch senkrecht zu CD, und deßhalb wieder zu EF (53, b), also ist AB # EF (53, a).

II. Aus A fig. 150 gehen die 2 Geraden AB und AC durch die # Ebenen MN, PQ, RS. — Man ziehe zwischen den Fußpunkten in jeder Ebene die Geraden DE, FG, BC, welche # sind (54, e); daher ist AB : AC = AD : AE, dann AB : AC = AF : AG, und AB : AC = DF : EG, endlich AB : AC = BF : CG (31, c), folglich AB : AC = AD : AE = AF : AG = DF : EG = BF : CG. — H. f.

56) a. Ist eine von 3 Ebenen mit den beiden andern #, so sind auch diese unter sich selbst #.

b. Wenn aus einem Punkte 2 Gerade durch 2 von 3 # Ebenen bis nach der dritten gehen; so sind sie und ihre entsprechenden Abschnitte proportional.

III. Die 3 Ebenen AB, AC, AD fig. 151 durchschneiden sich in einer Geraden AL. — Aus dem Punkte E des Durchschnitts ziehe man zu ihm in jenen Ebenen die Senkrechten EF, EG, EH. Dann ist W. FEG der Richtungsw. von AB und AC, W. GEH der Richtungsw. von AC und AD, W. FEH der Richtungsw. von AB und AD. Die Geraden EF, EG, EH liegen aber in einer Ebene (46, d), folglich ist W. FEH = W. FEG + W. GEH.

IV. Die Ebenen CD und EF fig. 152 seien # und werden von der Ebene AB in CH und EK durchschnitten. — Die Geraden CH und EK, als in den # Ebenen CD und EF liegend, können sich nicht begegnen; sie liegen aber auch in der einen Ebene AB, müssen daher, weil ihnen die Zusammenrichtung fehlt, # sein.

Zieht man in AB nun MR senkrecht zu CH und EK, in CD die Senkrechte MN zu CH, und in EF die Senkrechte PQ zu EK, so sind W. NMR und W. QPR die

Richtungsw. der Ebenen CD und EF zur Ebene AB (52, b), aber auch zugleich die Richtungsw. der Linie MR zu den Ebenen CD und EF (47, d und a), und daher gleich (54, a).

V. Ist nun umgekehrt CH ♯ EK, und W. NMR = W. QPR; so kann dies nur eine Folge davon sein, daß CD ♯ EF ist.

57) a. Durchschneiden sich 3 Ebenen in einer Linie; so ist der Richtungsw. der beiden äußern Ebenen so groß, als ihre Richtungsw. zu der innern Ebene.

b. Werden 2 gleichlaufende Ebenen von einer 3ten durchschnitten, so sind ihre Durchschnitte ♯ und ihre Richtungsw. zur letztern gleich.

c. Zwei Ebenen sind ♯, wenn ihre Durchschnitte mit einer 3ten Ebene ♯, und zugleich ihre Richtungsw. zu derselben gleich sind.

VI. Die 3 Ebenen Ab, Ac, Bc fig. 153 durchschneiden sich in 3 Linien, von denen Aa und Bb ♯ seien: wie verhält sich Cc? — Man ziehe aus den Punkten C und c im Durchschnitt Cc zu Aa die Senkrechten CA und ca, und zu Bb die Senkrechten CB und cb, ferner in der Ebene Ab die Linien AB und ab. Nun sind AB und ab senkrecht Aa und Bb (50, b), daher AB = ab (17, b); auch ist W. CAB = W. cab, und W. CBA = W. cba (52, b oder 49, a), somit sind die Dke. ABC und abc einerlei, also AC = ac. Diese beiden Linien sind aber als senkrecht zu Aa auch ♯, daher auch Aa ♯ Cc, folglich auch Bb ♯ Cc (51, b).

VII. Weil Aa zu AC, und Bb zu BC senkrecht, aber Cc ♯ Aa und Bb ist, so ist auch Cc senkrecht zu AC und BC; demnach ist W. ACB der Richturgsw. der Ebenen Ac und Bc. Die Richtuugsw. aller 3 Ebenen zu einander liegen somit in einem Dk., sind also zusammen = 180°. — H. f.

58) a. Wenn sich 3 Ebenen in 3 Linien durchschneiden, und 2 Kanten ♯ sind, so ist auch die 3te mit ihnen ♯.

b. Wenn 3 Ebenen in 3 ♯ Kanten sich schneiden; so betragen ihre 3 Richtungsw. zusammen 180°.

VIII. Die Kanten BA, BC, BE der Ebenen AC, AE, MN fig. 154 laufen in B zusammen, und die Kante AB der Ebenen AC und AE sei senkrecht zur Ebene MN; dann sind auch die Ebenen AC und AE zu MN senkrecht (52, c).

IX. Sind umgekehrt AC und AE zu MN senkrecht; so muß als Grund vorausgesetzt werden, daß auch AB zu MN senkrecht ist.

X. Die Kante AB der Ebenen AC und AE fig. 155 stehe schief auf der Ebene MN, und bilde mit den Trefflinien BC und BE gleiche W. ABC und ABE; wie sind die Richtungsw. der Ebenen AC und AE zu MN beschaffen? — Man fälle AG senkrecht zu MN, ziehe GH zu BC, und GI zu BE senkrecht, dann AH und AI, wovon jene zu BC und diese zu BE senkrecht ist (47, b). Nun sind die rechtw. Dke. ABH und ABI einerlei, also AH = AI; dadurch werden auch die rechtw. Dke. AGH und AGI einerlei, folglich ist W. AHG = W. AIG, welches die Richtungsw. der Ebenen AC und AE zu MN sind.

XI. Es sei umgekehrt W. AHG = W. AIG. Dann kann dies nur die Folge davon sein, daß auch W. ABC = W. ABE ist.

59) a. Ist die Kante zweier Ebenen zu einer 3ten Ebene senkrecht; so sind beide Ebenen selbst zur 3ten Ebene senkrecht.

b. Laufen die Kanten dreier Ebenen in eine Ekke zusammen und stehen 2 Ebenen auf der 3ten senkrecht; so ist auch ihre Kante zu derselben senkrecht.

c. Bildet die Kante zweier Ebenen mit den beiden Trefflinien dieser Ebenen und einer 3ten Ebene gleiche schiefe W.; so haben auch jene Ebenen gleiche Richtungsw. zur 3ten Ebene.

d. Haben 2 von 3 in einer Ekke zusammenlaufenden Ebenen gleiche schiefe Richtungsw. zu der 3ten Ebene; so bildet auch ihre Kante gleiche W. mit den Trefflinien derselben und der 3ten Ebene.

Anm. Die Sätze unter a und b ergeben sich auch aus denen unter c und d, aus welchen noch weiter folgt: α. Bilden die 3 Kanten einer dreikantigen Ekke unter sich 3 gleiche W.; so haben auch die 3 Ebenen gleiche Richtungsw. zu einander. — β. Haben die 3 Ebenen einer 3kantigen Ekke gleiche Richtungsw. zu einander; so bilden auch ihre Kanten unter sich gleiche W.

XII. Es sei A fig. 156 eine dreikantige Ekke, u. W. BAC der größte ihrer 3 Kantenw. — Man ziehe in der Ebene ABC die Linie BE = BD, und AE = AD, so daß BE und AE in E sich treffen; verlängere dann BE bis F und ziehe in der Ebene ADC noch FD. — Nun sind die Dke. ABD und ABE einerlei, also W. BAD = W. BAE. Im Dk. BDF ist ferner BD + DF > BF, oder BD + DF > BE + EF; da aber BD = BE, so ist DF > EF. In den Dken. AEF und ADF ist AF = AF, AD = AE, aber DF > EF, also W. DAF > W. EAF; daher W. BAD + W. DAF > BAE + W. EAF, oder W. BAD + W. DAF > BAF. — Was hier vom größten W. BAF gilt, das gilt um so mehr auch von einem kleineren.

XIII. In A fig. 157 laufen ebenfalls 3 Ebenen zusammen. Man lege durch sie eine Ebene BCD und fälle auf diese aus A eine Senkrechte AE und ziehe BE, CE, DE. — In den rechtw. Dken. ABE und ADE ist AB > BE, AD > DE; daraus folgt für die Dke. ABD und BDE, welche BD gemein haben, daß W. BAD < W. BED. Eben so ergibt sich, daß W. BAC < W. BEC, W. CAD < W. CED ist. Deßhalb sind die 3 Kantenw. bei A zusammen kleiner als die 3 W. um E, oder kleiner als 360^0.

Dies gilt ebenso für jede mehr- als 3kantige Ekke. Jeder Kantenw. ist kleiner als der ihm entsprechende W. bei E in der Hilfsebene. Da jedoch alle W. um E = 360^0 sind, so sind alle Kantenw., so viel ihrer sein mögen, kleiner als 360^0. — H. f.

60) a. An einer dreikantigen Ekke sind 2 Kantenw. immer größer als der dritte.

b. Alle Kantenw. an einer Ekke sind zusammen kleiner als 360^0.

Sechster Abschnitt.

Oberfläche und Inhalt der Körper.

§. 48.

Die Berechnung der Oberfläche geradflächiger Körper beruht auf den Sätzen No. 40 und 41.

I. Pyramide. Man berechnet die Grundfläche einer 3 oder 4 oder vielseitigen Pyramide, so wie jede Seitenfläche und sucht dann die Summe sämmtlicher Ergebnisse. — Ebenso verfährt man bei der abgestumpften Pyramide, bei welcher auch noch die zur Grundfläche parallele Ebene zu berechnen ist.

II. Prisma. Man berechnet die Grundfläche, verdoppelt sie, und zählt dazu die einzeln berechneten Seitenflächen.

III. Parallelopipedum. Je zwei entgegengesetzte Grundflächen desselben sind parallel und einerlei (No. 55, a oder b, und 49, c).

Beim schiefwinkligen Parallelopipedum ist also jede von den 3 verschiedenen, an einer Ekke sich treffenden Seitenflächen besonders zu berechnen und zu verdoppeln; die Summe dieser Produkte gibt die Oberfläche.

Ebenso verhält es sich beim rechtwinkligen Parallelopipedum. Aber die in einer Ekke sich treffenden 3 Kanten sind zugleich die Abmessungen der 3 zu berechnenden Flächen. Ist demnach o die Oberfläche, b die Breite, d die Dikke, h die Höhe des Körpers, so ist

$$o = 2 \times (bd + bh + dh).$$

IV. Beim Würfel kommt noch hinzu, daß seine Seitenflächen Quadrate sind. Ist daher k die Kante desselben, so ist jede Seitenfläche $= k^2$, also $o = 6 . k^2$.

1. Anm. Auf ähnliche Weise sucht man auch die Oberfläche aller übrigen, z. B. der regelmäßigen Körper (§. 22). —

2. Anm. Denkt man sich die Seitenflächen in bestimmten Kanten geschnitten und vom Körper abgelöst, so daß sie nur noch in den nöthigen Kantenlinien zusammenhangen, und denkt man sie dann in einer Ebene ausgebreitet; so entsteht eine Figur, welche Körpernetz heißt. — Die Netze der regelmäßigen Körper ent-

halten figg. 158 – 162, nämlich Tetraeder fig. 158, Würfel fig. 159, Oktaeder fig. 160, Dodekaeder fig. 161, Ikosaeder fig. 162. Diese Netze veranschaulichen die Berechnung der Oberfläche. — Mit Hilfe der Netze kann man die verschiedenen Körperformen aus Pappdekkel bilden.

3. Anm. Daß es nur die 5 genannten regelmäßigen Körper gebe, beruht besonders auf Satz No. 60, b.

§. 49.

I. Die Oberfläche eines senkrechten Kegels besteht aus der kreisförmigen Grundfläche und der Seitenfläche. Es bleibt hier nur noch Letztere zu berechnen.

Man denke die Seitenfläche in einer Geraden (Seitenlinie) vom Scheitel bis zu einem Punkte des Umfangs der Grundfläche durchschnitten, vom Kegel abgewikkelt und in einer Ebene ausgebreitet. Dann gleicht sie einem Kreisausschnitt, welcher die Kegelseitenlinie zum Halbmesser und den Umfang der Kegelgrundfläche zum Bogen hat. Bezeichnet nun S die Seitenlinie und D den Durchmesser der Grundfläche, so ist in No. 43, a das dortige $r = S$, und $b = D \times 3{,}14$, also die

Kegelseitenfläche $= \frac{1}{2} \times S \,.\, D \,.\, 3{,}1416$.

II. Die Oberfläche eines abgestumpften senkrechten Kegels enthält 2 Kreisebenen und die einfach gekrümmte Seitenfläche, welche Letztere hier allein in Betracht kommt.

Die Seitenfläche eines abgestumpften senkrechten Kegels gleicht einem Theile eines Kreisringes (§. 41, XVI), der die Seitenlinie des abgestumpften Kegels zur Breite, und die Umkreise seiner parallelen Flächen zu Bogen hat. Man setze nun die Seitenlinie $= s$, die Durchmesser der größern und kleinern Kreisebene $= D$ und $= d$; danach wird in No. 44, b hier $w = s$, dann $B = D \,.\, 3{,}1416$ und $b = d \,.\, 3{,}1416$, mithin

Seitenfl. des abgest. Kegels $= \frac{1}{2} \times s \times (D + d) \times 3{,}1416$.

III. Die Oberfläche eines vollständigen Zylinders enthält 2 einerleie Kreisebenen und eine einfach gekrümmte Seitenfläche. Letztere gleicht, wenn man sie abgewikkelt und in einer Ebene ausgebreitet denkt, einem Rechtekke, welches den Umkreis des Cylinders zur einen und die Höhe desselben zur anderen Abmessung hat. Ist d der Durchmesser und h die Höhe des Zylinders, so ist seine

Seitenfläche $= h \,.\, d \,.\, 3{,}1416$.

IV. Kugeloberfläche. Man denke eine Kugel im Innern einer Walze, deren Durchmesser und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Die Kugel berührt dann den Mittelpunkt der beiden Kreisebenen der Walze und in der Mitte auch die Seitenfläche der Letzteren.

Es sei nun fig. 163 ein Durchschnitt der Walze in der Richtung ihrer Achse; derselbe ist ein Quadrat, der Durchschnitt der Kugel ein größter Kreis derselben, der die Seiten des Quadrats in der Mitte berührt.

Ein abgestumpfter Kegel von der Höhe PQ berühre in der Mitte seiner Seitenfläche die Oberfläche der Kugel; so berührt er in b und B, der Mitte seiner Seitenlinien, den Durchschnittskreis, und es sind Gg und Kk die Durchmesser seiner Kreisebenen. Nun ist die Seitenfläche des abgestumpften Kegels

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, KG \times (gG + kK) \times 3{,}14$$
$$= KG \times bB \times 3{,}14 = 2 \,.\, KG \,.\, BF \times 3{,}14.$$

Man ziehe nun AL $\#$ GK und den Halbmesser MB; so sind die rechtwinkligen Dreiekke BFM und AHL ähnlich; denn W. MBF = W. BCG = 90⁰ — W. BGC = 90⁰ — W. LAC = W. LAH; dann W. F = W. H = 90⁰, und W. BMF = W. ALH. Daher ist BF : BM = AH : AL, also BF . AL = BM . AH = AP . AH. Es ist aber AL = KG, somit BF . KG = AP . AH.

Setzt man nun letzteres Produkt für's erstere in der obern Gleichung, so ist die Seitenfläche des abgestumpften Kegels

$$= 2 \,.\, AP \,.\, AH \times 3{,}14 = Aa \,.\, AH \times 3{,}14$$

Das letzte Produkt ist die Seitenfläche der walzenförmigen Scheibe, deren Durchschnitt AabH ist. Sonach gleicht die Seitenfläche des abgestumpften Kegels, dessen Durchschnitt GgkK ist, der Seitenfläche des Zylinders, dessen Durchschnitt AahH ist. Daraus folgt: Berühren abgestumpfte Kegel in ihrer Mitte die Kugeloberfläche, so daß sie die Kugel ganz einschließen; so ist die Summe der Seitenflächen jener abgestumpften Kegel gleich der

Seitenfläche der Walze, deren Durchmesser und Länge dem Durchmesser der Kugel gleich sind.

Es kommt dabei nicht auf die Dikke der abgestumpften Kegel und der Scheiben an; und man kann sie demnach so dünn annehmen, als man will, so daß die Seitenflächen der Kegel mit der Oberfläche der Kugel zusammenfallen. Folglich ist die Kugeloberfläche selbst gleich der Seitenfläche einer Walze von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe, also $= d \times d \,.\, 3{,}14 = d^2 \,.\, 3{,}14$.

V. Ferner ist aus gleichen Gründen die Kugelzone, deren Höhe $PQ = AH$ ist, $= Aa \,.\, PQ \,.\, 3{,}14$. Ebenso ist die Kugelschale von der Höhe $QN = Hh \times QN \,.\, 3{,}14$. Oder setzt man $Aa = Hh = d$ und PQ und $QN = h$, so ist die Zone $= d \,.\, h \,.\, 3{,}14$, und die Schale ebenfalls $= d \,.\, h \times 3{,}14$. — H. f.

61) Es ist die Seitenfläche:

a. des senkrechten Kegels $= \frac{1}{2} \times S \,.\, D \,.\, 3{,}1416$

b. des abgest. senkr. Kegels $= \frac{1}{2} \times s \,.\, (D + d) \times 3{,}1416$

c. des Zylinders $= h \times d \,.\, 3{,}1416$

d. die Kugeloberfläche $= d^2 \times 3{,}1416$

e. die Kugel-Zone und Schale $= d \,.\, h \times 3{,}1416$.

Anm. Aus No. 42, b und No. 61, d ergibt sich, daß die Oberfläche der Kugel 4 Mal so groß ist, als der Flächeninhalt eines größten Kreises derselben.

Uebungsaufgaben.

a. Berechne die Seitenfläche eines senkrechten Kegels, wenn $D = 2''$, $S = 5''$, oder $D = 8''$, $S = 15''$, oder $D = 2'$, $S = 4'\ 5''$, oder $D = 4'\ 2''$, $S = 12'\ 6''$ ist.

b. Suche die Seitenfläche des abgestumpften senkr. Keg., wenn $D = 3''$, $d = 2''$, $s = 6''$, oder $D = 7''$, $d = 5''$, $s = 12''$, oder $D = 3'\ 2''$, $d = 2'\ 8''$, $s = 18'\ 5''$ ist.

c. Wie groß ist die Seitenfläche einer Walze, wenn $d = 4''$, $h = 15''$, oder $d = 16''$, $h = 25''$, oder $d = 18''$, $h = 45''$, oder $d = 24''$, $h = 68''$ ist?

d. Wie groß ist die Kugeloberfläche, wenn d 5'', oder 12'', oder 2' 4'', oder 3' 2'', oder 8' 5'', oder 5' 4'' beträgt?

e. Was beträgt eine Kugelzone oder Kugelschale, wenn $d = 8''$, $h = 3''$, oder $d = 15''$, $h = 4''$, oder $d = 5'\ 2''$, $h = 8''$, oder $d = 12'$, $h = 15''$ ist?

§. 50.

I. In der 3seitigen Pyramide ABCD fig. 164 sei eine Durchschnittsebene bcd # zur Grundfläche BCD. — Dann sind auch die Durchschnittslinien der Erstern zu denen der Letztern #, nämlich bc # BC, bd # BD, cd # CD (54, e), daher sind die entsprechenden W. der Dke. bcd und BCD gleich (54, f), also Letztere selbst ähnlich (No. 32, c) und daher $BCD : bcd = BD^2 : bd^2$ (No. 45, c).

Es sind aber, weil bd # BD, auch die Dke. ABD und Abd ähnlich (31, e), also ist $BD : bd = AD : Ad$. Man fälle nun aus A auf die parallelen Ebenen die Senkrechte AE, welche dieselben in E und e trifft, und ziehe DE und de; so ist auch DE # de (54, e), daher Dk. ADE ∾ Dk. Ade, mithin $AD : Ad = AE : Ae$, daher auch $BD : bd = AE : Ae$, und folglich Dk. BCD : Dk. $bcd = AE^2 : Ae^2$.

Dies gilt auch von der vielseitigen Pyramide. Es durchschneide fig. 165 die Ebene bcdef den Körper parallel zur Grundfläche. Man ziehe die Gehren CF, DF, cf, df; so ist aus gleichen Gründen wie vorher Dk. BCF ∾ Dk. bcf, Dk. CDF ∾ Dk. cdf, Dk. DEF ∾ Dk. def, also sind auch die Vielekke BCDEF und bcdef selbst ähnlich (33, a) und es kommt dabei nicht auf die Seitenzahl an; daher $BCDEF : bcdef = FE^2 : fe^2$ (45, d).

In den ähnlichen Dkn. AFE und Afe ist ferner $FE : fe = AE : Ae$. Geht nun die Senkrechte AM aus A und trifft die Vielekke in M und m, und zieht man ME und me; so ist $AE : Ae = AM : Am$, daher auch $FE : fe = AM : Am$, folglich $BCDEF : bcdef = AM^2 : Am^2$.

Das Gleiche ergibt sich auch beim senkrechten Kegel fig. 166. Es sei der Durchschnitt bcdh # zur Grundfläche BCDH. Man ziehe die Achse AM (§. 23, I.), welche den Durchschnitt in M trifft. Es seien ferner AB und AC zwei beliebige Seitenlinien, man ziehe die Halbmesser MB, MC, und die Linien mb, mc. Nun ist

MB ≑ mb, und MC ≑ mc (54, e), also Dk. ABM ∼ Dk. Abm, und Dk. ACM ∼ Dk. Acm, daher MB : mb = AM : Am, und MC : mc = AM : Am, mithin MB : mb = MC : mc; weil aber MB = MC ist, so ist auch mb = mc. Es sind aber mb und mc zwei Gerade aus m nach beliebigen Punkten des Durchschnittsumfangs, Daher müssen alle solche Geraden aus m gleich sein, folglich ist der Durchschnitt ein Kreis und der Grundfläche ähnlich.

Endlich ist BCDH : bcdh = BM^2 : bm^2; in den Dken. ABM und Abm aber ist BM : bm = AM : Am, also BCDH : bcdh = AM^2 : Am^2.

II. Es seien nun fig. 164 und 167 die Grundflächen beider Körper, nämlich BCD und GHL, so wie ihre Höhen AE und FM gleich; in beiden Körpern seien die Durchschnitte bcd und ghl zur Grundfläche parallel, und ihre Durchschnittsabstände vom Scheitel, nämlich Ae und Fm gleich. Dann ist (nach I)

BCD : bcd = AE^2 : Ae^2 und
GHL : ghl = FM^2 : Fm^2
also BCD : bcd = GHL : ghl.

Wegen der Gleichheit der Vorderglieder sind auch die Hinterglieder gleich, also ist bcd = ghl. Die Gleichheit dieser Durchschnitte ist nicht von ihrer Form, also auch nicht von der Anzahl der Seitenflächen beider Körper abhängig, gilt deßhalb auch unter gleichen Bedingungen von vielseitigen Pyramiden und Kegeln.

III. Da nun allenthalben der Umfang beider Körper (von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe) in gleicher Entfernung vom Scheitelpunkte gleich ist; so nehmen beide Körper auch gleichen Raum ein, oder sind gleich. — H. f.

62) a. Wird eine Pyramide oder ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten; so sind der Durchschnitt und die Grundfläche ähnlich und verhalten sich wie die Quadrate ihrer senkrechten Abstände vom Scheitel.

b. Werden Pyramiden und Kegel von gleicher Höhe und Grundfläche in gleicher Entfernung vom Scheitel parallel zur Grundfläche geschnitten; so sind die Durchschnittsebenen gleich.

c. Pyramiden und Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

IV. In dem 3seitigen Prisma fig. 168 ziehe man die Gehren AF und BF, und durchschneide dasselbe in der Dreiecksebene ABF; so fällt die 3seitige Pyramide ABCF ab. Zieht man die Gehre BD und schneidet den Körper in der Ebene DFB, so entsteht die 3seitige Pyramide DEFB, und es bleibt noch die 3seitige Pyramide ADFB. Es hat nämlich

die Pyr. ABCF die Grenzflächen ABC, ABF, ACF, BCF
" " ADFB " " " ADF, ADB, AFB, DFB
" " DEFB " " " DEF, DEB, DFB, EFB.

Die erste und 2te Pyramide haben die gleichen Grundflächen ACF und ADF, dann die gleiche Höhe, nämlich eine Senkrechte vom gemeinschaftlichen Scheitel B auf die Seitenfläche ACFD, sind also gleich. Die erste und 3te Pyramide haben einerlei Grundflächen ABC und DEF, und die gleiche Höhe (mit dem Prisma), sind also ebenfalls gleich, folglich sind auch die 2te und 3te, und somit alle 3 Pyramiden gleich.

1. Anm. Die Einerleiheit der Dke. ABC und DEF ergibt sich leicht; denn da die Seitenflächen des Prisma Parallelogramme sind, so ist AC = DF, AB = DE, und BC = EF. — Die Gleichheit der Höhe der ersten und 3ten Pyramide ergibt sich auch noch so: Weil AC ⧣ DF, und BC ⧣ EF, so sind auch die Ebenen ABC und DEF ⧣, eine Senkrechte zwischen Beiden ist die Höhe beider Pyramiden. —

2. Anm. Was hier von dem schiefen Prisma fig. 168 bewiesen worden ist, läßt sich ebenso von dem senkrechten Prisma fig. 169 darthun.

V. Jede 3seitige Pyramide, wie ABCF fig. 168 und abcf fig. 169, kann als Abschnitt eines 3seitigen Prisma betrachtet werden, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat, und beträgt den 3ten Theil desselben. Da aber alle Pyramiden und Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe gleich sind (62, c), so ist auch jede Pyramide und jeder Kegel der 3te Theil eines 3seitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

VI. Haben nun 2 Prismen (oder Zylinder) gleiche Grundfläche und Höhe, so nehmen sie den 3fachen Raum zweier Pyramiden (oder Kegel) ein, die mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe besitzen. Da diese Letzteren aber gleich sind, so sind auch jene beiden Prismen (oder Zylinder) gleich.

63) a. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in 3 gleiche 3seitige Pyramiden zerlegen.

b. Jede Pyramide und jeder Kegel beträgt den 3ten Theil eines 3seitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

c. Prismen oder Zylinder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

VII. Der Würfel ist die Einheit zur Ausmessung des Körperinhalts, der auch Volumen genannt wird (§. 21).

Der Quadratinhalt der Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelopipedums (fig. 170) bestimmt die Anzahl der Würfel-Einheiten für jede einzelne Längeneinheit der Höhe, und eine Bruchzahl der Längeneinheit am Ende der Höhe bestimmt einen eben solchen Bruchtheil jener Anzahl; folglich ist die Grundfläche mit der Höhe zu vervielfachen, um den Inhalt des Körpers zu erhalten.

Wegen No. 63, c gilt die gleiche Berechnung auch für andere Parallelopipeden, für alle Prismen und Zylinder.

VIII. Da die Grundfläche eines Würfels ein Quadrat, und die Höhe dieses Körpers seinen beiden andern Abmessungen gleich ist; so besteht die Anzahl seiner sämmtlichen Körpereinheiten in der Kubikzahl seiner Seitenlinie.

IX. Das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe stellt bei der Pyramide den Inhalt eines Prisma, und bei dem Kegel den Inhalt eines Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe vor (No. VII.), es ist also noch der 3te Theil davon zu nehmen (63, b). — H. f.

64) a. Der Körperinhalt jedes Prisma und Zylinders gleicht dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe.

b. Das Volumen eines Würfels gleicht der Kubikzahl seiner Kantenlinie.

c. Der Körperinhalt einer Pyramide und eines Kegels beträgt den 3ten Theil des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe.

X. Abgestumpfte Pyramide. Es bezeichne G die Grundfläche BCDE und g die Fläche bcde, und P den Inhalt der abgestumpften Pyramide fig. 171. Man verlängere die Kantenlinien bis zum Scheitel A und fälle zu den genannten beiden Flächen die Senkrechte AM, welche die kleinere Fläche in m durchdringt. Nun ist

$$P = \tfrac{1}{3} \times G \,.\, AM - \tfrac{1}{3} \times g \,.\, Am$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, (G \,.\, AM - g \,.\, Am)$$

Hier müssen nun AM und Am durch Linien an der abgestumpften Pyramide selbst ersetzt werden.

Es ist aber $AM = Am + mM$, also

$$G \,.\, AM - g \,.\, Am = G \,.\, (Am + mM) - g \,.\, AM$$
$$= G \,.\, Am + G \,.\, mM - g \,.\, Am$$
$$= G \,.\, mM + (G - g) \,.\, Am$$

Es ist jedoch $Am : AM = Ab : AB = bc : BC$, also

$$Am \,.\, BC = AM \,.\, bc = (Am + mM) \,.\, bc$$
$$= Am \,.\, bc + mM \,.\, bc$$

also $Am \,.\, BC - Am \,.\, bc = mM \,.\, bc$

oder $Am \,.\, (BC - bc) = mM \,.\, bc$

also $Am = \dfrac{mM \,.\, bc}{BC - bc}$

Dieser Werth, in obige Gleichung eingeführt, gibt

$$G \,.\, AM - g \,.\, Am = G \,.\, mM + (G - g) \times \frac{bc \,.\, mM}{BC - bc}$$
$$= mM \times \frac{G \,.\, BC - G \,.\, bc + G \,.\, bc - g \,.\, bc}{BC - bc}$$
$$= mM \times \frac{G \,.\, BC - g \,.\, bc}{BC - bc}$$

Hierdurch erhält man endlich aus der ersten Gleichung

$$P = \frac{mM}{3} \times \frac{G \,.\, BC - g \,.\, bc}{BC - bc}$$

XI. Es ist ferner (62, a) auch $Am^2 : AM^2 = g : G$, also $Am : AM = \sqrt{g} : \sqrt{G}$, also

$$Am \, . \sqrt{G} = AM \, . \sqrt{g} = (Am + mM) \, . \sqrt{g}$$
$$= Am \, . \sqrt{g} + mM \, . \sqrt{g}$$

und $Am \, . \sqrt{G} - Am \, . \sqrt{g} = mM \, . \sqrt{g}$

oder $Am \, . (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = mM \, . \sqrt{g}$

also $Am = \dfrac{mM \, . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$

Hiedurch erhält man nun aus der frühern Gleichung (unter X)

$$G \, . AM - g \, . Am = G \, . mM + (G - g \times \frac{mM \, . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$
$$= mM \times \left(G + \frac{(G - g) \, . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right)$$
$$= mM \times \left(G + \frac{(\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g}) \times \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right)$$
$$= mM \times [G + (\sqrt{G} + \sqrt{g}) \times \sqrt{g}]$$
$$= mM \times (G + \sqrt{G \, . g} + g)$$

Hiedurch erhält man endlich:

$$P = \frac{mM}{3} \times (G + g + \sqrt{G \, . g})$$

XII. **Abgestumpfter senkrechter Kegel.** Letzte Berechnungsformel gilt auch für den abgestumpften senkrechten Kegel. Bezeichnen D und d die Durchmesser seiner beiden Kreisebenen und C seinen Körperinhalt, h seine Höhe (statt mM), so ist:

$$G = \tfrac{1}{4} \times D^2 \, . \, 3{,}14 \text{ und } g = \tfrac{1}{4} \times d^2 \, . \, 3{,}14$$

$$\sqrt{G \, . g} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \, . \tfrac{1}{4} \, . D^2 \, . d^2 \, . \, 3{,}1416^2} = \tfrac{1}{4} \, . D \, . d \, . \, 3{,}1416$$

folglich $C = \dfrac{3{,}1416 \, . h}{12} \times (D^2 + d^2 + D \, . d)$

Man hat also für das Volumen der genannten abgestumpften Körper:

$$65) \text{ a. } P = \frac{mM}{3} \times \frac{G \, . BC - g \, . bc}{BC - bc}$$

b. $P = \frac{mM}{3} \times (G + g + \sqrt{G \cdot g})$

c. $C = \frac{3{,}1416 \cdot h}{12} \times (D^2 + d^2 + Dd)$

XIII. Die regelmäßigen Körper lassen sich aus so vielen Pyramiden zusammengesetzt denken, als sie Seitenflächen haben. Diese Pyramiden haben gleiche Höhe, und ihre Scheitel laufen in dem Mittelpunkte des Körpers zusammen. Ist eine Seitenfläche $= s$, die Höhe einer Pyramide $= h$, ihre Anzahl $= n$, und die Oberfläche des Körpers $= o$, so ist der Inhalt einer Pyramide $= \frac{1}{3} \times h \cdot s$, also der Inhalt des regelmäßigen Körpers $= \frac{1}{3} \times h \cdot s \cdot n = \frac{1}{3} \times h \cdot o$.

Der Kugelinhalt wird daher auf gleiche Weise gefunden. Es ist aber $h = \frac{1}{2} d$, und $o = 3{,}14 \times d^2$, also der Kugelinhalt $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} d \times 3{,}14 \cdot d^2 = \frac{1}{6} \cdot 3{,}1416 \times d^3$.

XIV. Der Kugelkegel beträgt einen gleichen Theil von der Kugel, wie die Kugelschale von der Kugeloberfläche, ist also auch ein Drittel des Produkts aus seiner Oberfläche (Kugelschale) in den Halbmesser; mithin ist (nach No. 61, e) der Kugelkegel $= \frac{1}{3} \times 3{,}14 \cdot d \cdot h \times d/2 = \frac{1}{6} \times 3{,}14 \cdot d^2 \cdot h$.

XV. Der Kugelkeil beträgt einen gleichen Theil von der Kugel, wie der Richtungsw. seiner beiden Halbkreisebenen von 360^0. Ist daher k die Kugel, n der genannte Richtungsw. und b der dazu gehörige Bogen eines größten Kreises, und p dieser Kreis selbst, so ist: Kugelkeil : $\frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \times d^3 = n : 360^0 = b : p = b : 3{,}14 \cdot d$

also Kugelkeil $= \frac{3{,}1416 \cdot d^3 \cdot n}{6 \cdot 360} = \frac{0{,}1309 \cdot d^3 \cdot n}{90}$

oder $= \frac{3{,}14 \cdot d^3 \cdot b}{6 \cdot 3{,}14 \cdot d} = \frac{1}{6} \times d^2 \cdot b$

XVI. Der Kugelabschnitt ist der Unterschied zwischen dem Kugelkegel und einem Kegel, dessen Grundfläche mit der des Abschnitts zusammenfällt, und dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt. Es sei nun r (= Qm, fig. 163) der Halbmesser seiner Grundfläche, h (= QN) seine Höhe; so ist die Grundfläche des zweiten Kegels $= r^2 \,.\, 3{,}14$, seine Höhe $= \frac{1}{2}\, d - h$, also dieser Kegel selbst $= \frac{1}{3} \times r^2 \,.\, 3{,}14 \times (\frac{1}{2}\, d - h)$, sonach ist

der Kugelabschnitt $= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \,.\, d^2 \,.\, h - \frac{1}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, r^2 \times (\frac{1}{2}\, d - h)$

$= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \times (d^2 h - d \,.\, r^2 + 2\, h \,.\, r^2)$

Allein es ist $h \,.\, (d - h) = r^2$

oder $d \,.\, h - h^2 = r^2$

also $dh = h^2 + r^2$

und $d = \frac{h^2 + r^2}{h}$

hieraus folgt $d^2 = \frac{h^4 + 2 \,.\, h^2 r^2 + r^4}{h^2}$

also $d^2 h = \frac{h^4 + 2 \,.\, h^2 r^2 + r^4}{h}$

und $d \,.\, r^2 = \frac{h^2 r^2 + r^4}{h}$

folglich $d^2 h - d \,.\, r^2 = \frac{h^4 + h^2 \,.\, r^2}{h} = h^3 + h \,.\, r^2$

Dieser Werth oben eingeführt, gibt:

Kugelabschnitt $= \frac{1}{6} \,.\, 3{,}14 \times (h^3 + 3\, h \,,\, r^2)$

$= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \,.\, h \,.\, (h^2 + 3\, r^2)$

XVII. In der letzten Gleichung läßt sich für r^2 ein anderer Werth einführen (37, b). Es ist nämlich $r^2 = h \times (d - h) = dh - h^2$, also der

Kugelabschnitt $= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \,.\, h \times (h^2 + 3\, dh - 3\, h^2)$

$= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \,.\, h^2 \times (3\, d - 2h)$

Hiernach haben wir nun folgende Formeln:

66) a. Kugelinhalt $= \frac{1}{6} \times 3{,}1416 \times d^3 = 0{,}5236 \times d^3$

b. Kugelkegel $= \frac{1}{6} \times 3{,}1416 \times d^2 h = 0{,}5236 \times d^2 h$

c. Kugelkeil $= \frac{0{,}1309 \,.\, d^2 \,.\, n}{90} = \frac{1}{6} \times d^2 b$

d. Kugelabschnitt $= \frac{1}{6} \times 3{,}1416 \times h \,.\, (h^2 + 3\, r^2) = 0{,}5236 \,.\, h \times (h^2 + 3\, r^2)$

e. oder $= \frac{1}{6}\; 3{,}1416 \,.\, h^2 \times (3\, d - 2\, h)$

$= 0{,}5236 \,.\, h^2 \,.\, (3\, d - h)$.

Uebungsaufgaben.

Zu No 64.

1. Eine Grube ist 15′ lang, 12′ breit, 16′ tief; wie viel Kubikfuß Erde wurde aus derselben gegraben?

2. Wie viel Kub.′ enthält ein Stein, der 82″ lang, 54″ breit und 18″ dikk ist?

3. Wie viel Kubikklafter hat ein Heubehälter, dessen 3 Abmessungen 7′ 4″, 8′ 6″, und 10′ 5″ betragen?

4. Ein Balken ist 12″ breit, 9″ dikk und 24′ lang; welchen Kubikinhalt hat er?

5. Es soll ein Graben gemacht werden, der 60′ lang, oben 24″ und unten 18″ breit, und 4′ tief ist; wie viel Kubikklafter Erde müssen ausgeworfen werden?

6. Suche den Kubikinhalt eines Zylinders, der 8″ lang und 3″ dikk, oder 15″ hoch und 4″ dikk, oder 6′ lang und 12″ dikk oder 12′ hoch und 15″ dikk ist?

7. Ein Zylinder von 15′ Länge ist zum Theil hohl. Der ganze Durchmesser beträgt 16″, der Durchmesser der Röhre 12″; wie viel Kubikinhalt hat der Körper?

8. Wie viel Kub.″, oder Kub.-Klafter enthält ein Würfel, dessen Kante 4′, oder 4′ 8″, oder 9′, oder 10′ 4″, oder 15′ mißt?

9. Eine Seite in der Grundfläche einer 3seitigen Pyramide mißt 3′ 5″, die Höhe der Grundfläche 2′ 8″, die Höhe der Pyramide 12′; berechne den Inhalt.

10. Die Grundfläche einer Pyr. ist ein Quadrat, dessen Seite 4′ 2″ mißt, und die Höhe des Körpers beträgt 20′ 5″; wie viel Kub.′ oder Kub.-Klafter enthält er?

11. Die Grundfläche einer Pyr. ist ein Rechtekk von 5′ Länge und 4′ Breite; was ist der Körperinhalt bei einer Höhe von 15′?

12. Ein Kegel ist 8″ hoch, und der Durchmesser seiner Grundfläche beträgt 5″; man sucht den Körperinhalt.

13. Berechne den Inhalt eines Kegels, der 18′ 6″ hoch, und dessen Grundflächen-Durchmesser 3′ 5″ mißt.

Zu No. 65.

14. An einer abgestumpften 3seitigen Pyramide sei die Grundlinie der Grundfläche = 8′, die Höhe derselben 5′, die Grundlinie der obern Fläche = 5′ und ihre Höhe = 3′ 8″, die Höhe des Körpers = 10′; was beträgt der Körperinhalt?

15. An einer abgestumpften vierseitigen Pyr. von 18′ Höhe ist die untere Fläche 75″ lang und 35″ breit, die obere 48″ lang und $22^1/_2$″ breit; man sucht den Kubikinhalt.

16. Eine Grube ist oben 12′ lang und 8′ breit, unten 9′ lang und 6′ breit, und 5′ tief; wie viel Kub.′ enthält sie?

17. An einem abgestumpften Kegel von 15′ Höhe betragen die Durchmesser der beiden Kreisebenen 8′ und 5′; oder es sei D = 2′ d = 12″, h = 3′; was ist der Kubikinhalt?

18. Wie viel Kub.′ Holz faßt ein Baumstamm von 30′ Länge, der unten 25″ und oben 18″ dikk ist? Wie viel Klafter Holz gibt er, wenn die Scheiter 35″ lang sind?

19. Ein rundes Kamin ist 25′ hoch, unten 20″ oben 15″ weit; wie viel Kub.′ enthält der innere Raum desselben?

Zu No. 66.

20. Welches ist der Kubikinhalt einer Kugel, wenn ihr Durchmesser 4″, oder 6″, oder 15″, oder 42″ beträgt?

21. Berechne den Inhalt eines Kugelkegels für d = 16″, h = 2″, oder d = 18″, h = 3″, oder d = 28″, h = 2″ 5‴.

22. Was enthält ein Kugelkeil, wenn d = 15″, n = 12^0, oder d = 24″, n = 15^0, oder d = 12″, b = 3″, oder d = 25″, b = 5″ ist?

23. Es soll ein Kugelabschnitt berechnet werden für h = 3″, r = 5″, oder h = 8″, r = 15″, oder h = 12″, r = 25″, oder h = 15″, r = 84″; oder für d = 16″, h = 2″, oder d = 22″, h = 3″, oder d = 3′, h = 5″, oder d = 48″, h = 8″.

24. Ein Gewölbe von 6′ Durchmesser ist bis auf eine Höhe von 8′ zylinderförmig, der folgende Dekkel aber hat die Form einer Kugelschale und ist 15″ hoch; wie viel Kubikinhalt hat das ganze Gewölbe?

25. Die größte Tiefe eines Kessels ist 25″; bis auf die Tiefe von 2′ Fuß hat er die Form eines abgestumpften Kegels, dessen größere Seite 32″, und dessen kleinere 28″ beträgt; der untere Theil ist eine Kugelschale. Wie viel Kub.′ Wasser faßt der Kessel?

26. Ein steinernes Brunnenbekken von der Form einer Kugelschale hat oben einen Durchmesser von 4′, und ist 25″ tief; wie viel Kub.′ Wasser faßt es? — Wenn es außerdem allenthalben 4″ dikk ist; wie viel Kubikinhalt hat seine Steinmasse?

27. Eine Kugel, ein Cylinder und die Grundfläche eines Kegels haben einen gleichen Durchmesser von 4′; die Höhe der beiden Letz-

teren ist ebenfalls 4'; wie verhalten sich alle 3 Körper hinsichtlich ihres Kubikinhaltes?

28. Die Schüler sollen suchen: wie verhalten sich Prismen überhaupt? – Wie verhalten sie sich bei gleicher Höhe, oder bei gleicher Grundfläche? – Wie verhalten sich in gleicher Weise Zylinder, Pyramiden, Würfel, Kugeln?

Siebenter Abschnitt.

Geometrische Aufgaben.

I. Geometrische Konstruktionen.

1. Einen Punkt zu finden, wenn seine Entfernung von 2 andern bestimmten Punkten gegeben ist.

Aufl. und Beweis ergeben sich aus §. 25, I.

2. Einen W. zu zeichnen, der einem gegebenen W. gleich ist.

Aufl. (fig. 33 und 34.) Es sei bac der gegebene W. Aus a schneide ab = ac ab, mache AB = ab, beschreibe aus A mit dem Halbmesser ab und aus B mit dem Halbmesser bc Bogen, die sich in C schneiden, und ziehe AC; so ist W. CAB = W. cab. — (Der Beweis liegt in §. 26, III.)

Anm. Man kann auch den W. bac mit dem Transporteur messen und an A hintragen.

3. Einen gegebenen W. (ABC fig. 172) zu halbiren.

Aufl. Aus B schneide BA = BC ab, bestimme aus A und C mit gleichem Halbmesser den Punkt D (Aufg. 1) und ziehe BD; so ist W. ABC durch BD halbirt.

Beweis. Ziehe AD und CD; dann ist ABCD eine Halbraute, also W. B von BD halbirt. (No. 19, b.)

4. Einen Kreisbogen zu halbiren. (ABC fig. 173.

Aufl. Aus den beiden Enden A und C beschreibe mit gleichem Halbmesser Bogen, die sich in D und E schneiden, und ziehe DE; so wird diese Gerade den Bog. ABC halbiren.

Bew. Ziehe die Sehne AC, und die Geraden AD, CD, AE, CE. Dadurch entsteht die Raute ADCE; also ist AC, und deßhalb auch Bog. ABC halbirt (23, a).

Anm. Wären nur je zwei sich schneidende Halbmesser gleich, so wäre das Viereck eine Halbraut, also AC ebenfalls halbirt.

5. Eine Gerade zu halbiren, oder auf ihrer Mitte eine Senkrechte zu errichten. (fig. 174.)

Aufl. Aus den Enden A und B der Geraden AB beschreibe über und unter derselben mit gleichem Halbmesser Bogen, die sich in D und E schneiden, und ziehe DE; so muß Letztere die Gerade AB halbiren und zu ihr senkrecht sein. — Bew. No. 18, b.

Anm. Wie bei Aufg. 4.

6. Aus einem bestimmten Punkte innerhalb einer Geraden eine Senkrechte zu errichten.

1. Aufl. (fig. 175.) Man schneide in der Geraden AB von dem gegebenen Punkte C aus $CM = CN$ ab, bestimme aus M und N mit gleichem Halbmesser den Punkt D; so ist die Gerade CD die verlangte Senkrechte. — (Bew. No. 13, b.)

2. Aufl. (fig. 176.) Von C aus beschreibe mit einem Halbmesser CD einen Bogen, in demselben bezeichne mit dem gleichen Halbmesser aus D den Punkt M und aus M den Punkt N, halbire den Bogen MN (wozu hier nach Aufg. 4 nur ein Punkt E zu suchen ist); so ist die Gerade CE senkrecht zu AB.

Bew. Der W. $DCE = 60^0 + 30^0 = 90^0$ (No. 21, f und 26, f).

3. Aufl. (fig. 177.) Aus c in ab schneide 5 gleiche Theile ab, bestimme aus c mit dem Halbmesser ce und aus d mit dem Halbmesser cf den Punkt g; so ist die Gerade cg senkrecht zu ab.

Bew. $cd^2 + cg^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, also $cd^2 + cg^2 = dg^2$, somit cg senkrecht zu ab.

7. Im Endpunkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten.

1. Aufl. (fig. 178.) Es sei A der festgesetzte Punkt in AB. Nimm noch auf AB einen beliebigen Punkt F an, bestimme aus A und F mit gleichem Halbmesser den Punkt E, ziehe FE in unbestimmter Länge über E hinaus, mache ED = EF; so ist eine Gerade DA senkrecht zu AB. — (Bew. No. 14, c.)

2. und 3. Aufl. wie bei Aufg. 6.

8. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen.

1. Aufl. (fig. 179.) Es seien gegeben die Gerade AB und der Punkt C. Wähle in AB zwei Punkte E und F, bestimme aus E mit dem Halbmesser EC und aus F mit dem Halbmesser FC den Punkt D; so ist die Gerade CD die verlangte Senkrechte. — Bew. No. 19, c.

Anm. Die Punkte E und F kann man auch aus C mit gleichem Halbmesser festsetzen.

2. Aufl. (fig. 180.) Wähle in AB einen Punkt E, beschreibe aus E mit dem Halbmesser EC den Bogen CFD, und bestimme aus F mit dem Halbmesser FC in dem genannten Bogen den Punkt D; so ist CD senkrecht auf AB. — Bew. No. 23, d.

Anm. Die Aufg. 6, 7, 8 können auch auf mechanischem Wege mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks von Holz oder eines Winkelhakens gelöst werden.

9. Durch einen bestimmten Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

1. Aufl. (fig. 181.) Es sei M der Punkt und AB die Gerade. Durch M ziehe eine Linie MD, welche die AB schneidet, mache den W. LMN oder den W. DMP = W. BDM; so ist der durch M nach N und P gehende Schenkel ♯ mit AB. — Bew. No. 4, b.

2. Aufl. (fig. 182.) In AB wähle 2 beliebige Punkte D und E, und bestimme aus E mit dem Halbmesser DM und aus M mit dem Halbmesser DE den

Punkt N; so ist die Gerade MN ‡ AB. — Bew. No. 17, d.

3. Aufl. (fig. 183 und 184.) Aus einem Punkte C in AB (oder zwischen AB und M) beschreibe mit dem Halbmesser CM einen Bogen, dessen beide Enden auf AB ruhen; mache den Bog. EN = Bog. DM (d. h. bestimme aus E mit der Länge DM den Punkt N): so ist die Gerade MN ‡ AB. — Bew. Umkehrung von No. 26, c.

4. Aufl. (fig. 185.) Durch M ziehe eine Gerade FP; bestimme aus P mit dem Halbm. PF in AB den Punkt H, mache PN = PM; so ist die Gerade MN ‡ AB. — Beweis No. 31, d.

Anm. Obige Aufgabe kann auch auf mechanische Weise gelöst werden vermittelst eines Parallel-Lineals, oder vermittelst zweier Dreiekke von Holz, die mit einander ein Parallelogramm bilden.

10. Ein Dreiekk zu zeichnen, wenn seine 3 Seiten gegeben sind.

Aufl. (Fig. 186.) Die Seiten seien ab, ac, bc. Mache AB = ab, bestimme aus A mit dem Halbmesser ac und aus B mit dem Halbmesser bc den Punkt C, ziehe AC und BC; dann ist ABC das verlangte Dk.

Bew. Das Dk. ABC enthält die gegebenen Seiten; muß also (nach No. 8, a) das durch sie bestimmte, somit das verlangte Dk. sein.

Anm. Der Schüler zeichne hienach ein gleichschenkliges und ein gleichseitiges Dk.

11. Ein Dk. aus 2 Seiten mit dem eingeschlossenen W. zu bilden.

Aufl. (Fig. 186.) Es seien ab und ac die Seiten, m der W. — Mache AB = ab, W. A = W. m, und AC = ac, ziehe BC; so entsteht das verlangte Dk.

Bew. Das Dk. ABC enthält die gegebenen Stükke, u. s. w.

Anm. Der W. kann, statt vorgezeichnet, auch in Graden angegeben sein. — Auf gleiche Weise zeichnet man ein gleichschenkliges Dk., wenn der W. am Scheitelpunkt und die ihn einschließenden Seiten, und ein rechtwinkliges Dk., wenn seine beiden Katheten gegeben sind.

12. Ein Dk. zu verfertigen aus einer Seite und den beiden anliegenden W.

Aufl. (fig. 186.) Es sei ab die Seite, m und n seien die anliegenden W. — Mache AB = ab, W. A = m, W. B = n; verlängere die Schenkel der W. A und B, bis sie in C sich treffen. — Bew. wie vorher.

Anm. Ebenso beschreibt man ein gleichschenkliges Dk., wenn die Grundlinie mit dem anliegenden W. gegeben ist, und ein rechtw. Dk., wenn eine Kathete und der Hypotenusenw. an ihr gegeben sind.

13. Ein Dk. zu beschreiben mit einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden W.

1. Aufl. (fig. 186.) Es sei ab die Seite, m der anliegende und p der gegenüberliegende W. — Mache AB = ab und W. A = W. m; trage neben p den W. m, verlängere DE nach F, und mache W. B = dem eben entstandenen W. n; verlängere die Schenkel der W. A und B, bis sie in C sich treffen.

Bew. Weil A = m, B = n, so ist C = p; das Dk. ABC enthält also die gegebenen Stükke u. s. w.

1. Anm. Wenn die W. m und p in Graden angegeben sind, so zählt man ihre Summe von 180^0 ab, und trägt den Rest nach B hin.

2. Anm. Wie verfährt man, wenn für das gleichschenklige Dk. die Grundlinie und der W. am Scheitelpunkt gegeben sind?

2. Aufl. Mache AB = ab, A = m, trage an einen Punkt G des Schenkels AC den W. x = p, und ziehe aus B die Linie BC ⋕ GH.

Bew. AB = ab, W. A = W. m; und weil BC ⋕ GH, so ist W. C = W. x = W. p, also u. s. w.

14. Ein gleichschenkliges Dk. zu beschreiben, wenn seine Grundlinie und Höhe gegeben sind. (fig. 187.)

Aufl. Die Grundlinie sei ef, die Höhe gh. Mache

EF = ef, errichte in der Mitte von EF die Senkrechte GH = gh, ziehe EG und FG.

Bew. Die Dke. EGH und FGH sind einerlei (No. 9, b), also EG = FG; das Dk. EFG enthält auch die gegebenen Stükke, also u. s. w.

15. Ein gleichseitiges Dk. von bestimmter Höhe zu zeichnen.

Aufl. (fig. 188.) Auf einer Geraden de errichte eine Senkrechte ox = der gegebenen Höhe; schneide ein Stükk xp ab und bestimme aus p mit einem Halbmesser = 2 . px in der Senkrechten den Punkt q; ziehe aus o die Linie om # pq, mache mn = mo, und ziehe no.

Bew. Weil pq = 2 . px, so ist im rechtw. Dk. pqx der W. q = 30^0 (No. 14, e); und weil mo # pq, so ist auch W. mox = 30^0, also W. omx = 60^0; da nun mn = mo, so ist W. mno = W. mon = 60^0, also das Dk. gleichseitig. Da es die bestimmte Höhe hat, so ist es das verlangte Dk.

Anm. Man kann auch unmittelbar bei o mit Hilfe des Transporteurs den W. mox = 30^0 hintragen u. s. w.

16. Ein rechtwinkliges Dk. zu bilden aus der Hypotenuse und einer Kathete.

Aufl. (fig. 50.) Ziehe eine Gerade DE von unbestimmter Länge, errichte darauf die Senkrechte DF = der gegebenen Kathete, bestimme aus F mit einem Halbmesser = der gegebenen Hypot. den Punkt E, und ziehe FE. — (Bew. wie Aufg. No. 10.)

17. Ein rechtwinkliges Dk. zu beschreiben, wenn die Hyp. und eine Kathete, so wie die Lage der Letztern und der Treffpunkt beider Katheten bestimmt sind. (fig. 189.)

Aufl. ab sei die Kathete mit bestimmter Lage und a der Treffpunkt beider Katheten. Bestimme aus a und b mit einem Halbmesser = der halben Hypot. den Punkt m, beschreibe aus m mit demselben Halbmesser einen Kreis, durch b und m ziehe bc, dann ziehe ac; so ist abc das verlangte Dk.

Bew. Das Dk. abc ist bei a rechtwinklig (No. 25, c); weil bm = mc die halbe Hyp., so ist bc die gegebene Hyp.; das Dk. enthält die gegebenen Stükke u. s. w.

18. Ein Parallelogramm zu beschreiben: a) aus 2 Seiten mit dem eingeschlossenen W., b) aus 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossenen Gehre, c) aus 2 Seiten und der Höhe.

Aufl. a) (fig. 66.) Mache AD = der einen Seite, W. A = dem bestimmten W., dann AB = der zweiten Seite; suche endlich den Punkt C (nach Aufg. 9 Aufl. 2); ziehe BC und DC. — Bew. No. 17, d.

Anm. Ebenso zeichnet man das Rechtekk, die Raute und das Quadrat.

b) (fig. 66.) Mache AD = der einen Seite, suche aus A mit einem Halbmesser = der andern Seite und aus B mit einem Halbmesser = der Gehre den Punkt B; im Uebrigen wie vorher.

c) (fig. 117.) Auf einer Geraden errichte die Senkrechte ed = der Höhe, aus d suche mit einem Halbmesser = der einen Seite den Punkt a, mache ab = der andern Seite; im Uebrigen wie vorher.

Uebungsaufgaben.

a. Ein Quadrat zu beschreiben aus seiner Gehre.

b. Ein Trapezoid zu beschreiben aus den in No. 10, a und No. 11, a angegebenen Stükken.

c. Ein Trapez zu beschreiben: 1. aus seinen 4 Seiten; 2. aus den 2 Parallelen, einer Nichtparallelen und einem W. an derselben; 3. ein gleichschenkliges Trapez zu bilden aus seinen gegebenen Seiten.

d. Eine Halbraute zu zeichnen aus 2 ungleichen Seiten und einem W., oder aus 2 ungleichen Seiten und einer Gehre.

e. Ein Fünfekk und Sechsekk zu zeichnen nach den in No. 10 und 11 lit. b und c angegebenen Bestimmungsstükken.

f. Ein ordentliches Fünfekk oder Sechsekk zu beschreiben: 1. aus der Seite, 2. aus dem Winkelhalbmesser, 3. aus dem Seitenhalbmesser — mit Hilfe des Transporteurs. (No. 21, e und f.)

Anm. zu lit. f. 1. Ist die Seite gegeben: so trage an ihre beiden Endpunkte den halben Umfangsw. des zu bildenden Vielekks;

beschreibe aus dem Begegnungspunkte der Schenkel mit deren Länge (als Halbmesser) einen Kreis, trage dann die gegebene Seite in diesem Kreise herum. — 2. Ist der Winkelhalbmesser gegeben: so zeichne einen W. = dem Mittelpunktsw. des zu beschreibenden Vielekks; mache dessen Schenkel = dem gegebenen Winkelhalbmesser; beschreibe aus der Winkelspitze mit jenem Halbmesser einen Kreis, und trage in demselben die Weite der Schenkelendpunkte herum. — 3. Ist der Seitenhalbmesser gegeben: so mache ebenfalls einen W. = dem Mittelpunktsw. des zu zeichnenden Vielekks, halbire ihn, mache die Halbirungslinie = dem gegebenen Seitenhalbmesser, errichte in seinem Ende eine Senkrechte, welche die Schenkel jenes W. trifft; beschreibe aus der Winkelspitze mit der so bestimmten Schenkellänge einen Kreis und trage in demselben die Weite der Schenkelendpunkte herum.

g. Im ungleichseitigen Dk. einen Punkt zu finden, welcher von den Seiten desselben gleich weit absteht.

h. Im ungleichseitigen Dk. einen Punkt zu finden, welcher von den Winkelspitzen gleich weit absteht.

19. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

1. Aufl. (fig. 113.) Ziehe eine Sehne AB, errichte in ihrer Mitte eine Senkrechte CD zu beiden Seiten bis an den Umfang, halbire CD; so ist M der gesuchte Mittelpunkt. — (Bew. No. 23, e.)

2. Aufl. (fig. 78.) Ziehe 2 Sehnen AB und AC, errichte in der Mitte von jeder eine Senkrechte DM und EM; so ist der Treffpunkt beider Senkrechten der Mittelpunkt des Kreises. — (Bew. No. 23, e.)

3. Aufl. (fig. 88.) Schneide aus A 2 gleiche Bogen AB und AD ab, halbire den Rest des Umfangs in C, ziehe und halbire AC; so ist M der Kreismittelpunkt. — (Bew. Seite 80, XII.)

20. Durch 3 in verschiedener Richtung liegende Punkte einen Kreis zu ziehen. (fig. 78.)

Aufl. Die Punkte seien A, B, C. Ziehe die Sehnen AB und AC; errichte in ihrer Mitte die Senkrechten DM und EM, beschreibe aus ihrem Treffpunkt mit dem Halbmesser MA (oder MB, oder MC) einen Kreis. — Den Beweis suche der Schüler.

Anm. Diese Aufg. kann auch so gestellt werden: a. Es sind 3 Punkte in verschiedener Richtung gegeben; man soll einen 4ten Punkt suchen, der von ihnen gleich weit absteht; oder b. um ein Dk. einen Kreis zu beschreiben.

Uebungsaufgaben.

a. Im Kreise ein ordentliches Dk., Sechsekk, Zwölfekk zu beschreiben. (No. 26, f.)

b. Im Kreise ein Rechtekk, ein Quadrat, ein ordentliches Achtekk zu beschreiben. (No. 26, d.)

c. Im Kreise ein ordentliches Fünfekk und Zehnekk zu beschreiben. (No. 21, e.)

d. Um ein Rechtekk, oder ein Quadrat, oder um jedes ordentliche Vielekk einen Kreis zu beschreiben.

21. An einen Punkt des Kreisumfangs eine Tangente zu ziehen.

1. Aufl. (fig. 92.) Der Punkt sei A. Ziehe den Halbmesser MA und errichte in A eine Senkrechte; so ist Letztere die verlangte Tangente. — (Bew. No. 28, a.)

2. Aufl. (fig. 190.) Der Punkt sei a. Bestimme aus a mit dem Halbmesser am im Umfang den Punkt c, ziehe mc über den Umfang hinaus, mache cd = cm, ziehe da; so ist Letztere die verlangte Tangente.

Bew. Ziehe am und ac. Das Uebrige folgt aus No. 14, c und No. 28, a.

3. Aufl. (fig. 99.) Der Punkt im Kreise von m sei A. Bestimme nun aus A und m mit gleichem Halbmesser den Punkt M, beschreibe aus M mit dem Halbmesser Mm (oder MA) einen Kreis, ziehe den Durchmesser mMB, dann BA; so ist Letztere die verlangte Tangente. — (Bew. Nr. 30, c.)

22. Von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Tangente an seinen Umfang zu ziehen.

1. Aufl. Der Punkt sei a fig. 191. Bestimme aus a mit dem Halbmesser am und aus m mit dem Durch-

messer des Kreises den Punkt b, ziehe bm, dann ac; so ist Letztere die gesuchte Tangente.

Bew. Man denke hinzu ab und am; so ist ac senkrecht zu bm (No. 13, b), also eine Tangente.

2. Aufl. (fig. 192.) Der Punkt außer dem Kreise von M sei a. Ziehe aM, beschreibe aus deren Mitte m mit dem Halbmesser ma einen Kreis, der den vorigen in b und c schneidet, und ziehe ab oder ac; so ist jede dieser Letztern eine Tangente.

Bew. Zieht man noch Mb und Mc; so sind in Bezug auf den Kreis von m die W. bei b und c W. im Halbkreise, also $= 90^0$ (No. 25, c); folglich u. s. w.

23. **Zwischen die Schenkel eines W. einen Kreis zu beschreiben, der dieselben an bestimmter Stelle in gleichem Abstande von der Winkelspitze berührt.** (fig. 95.)

Aufl. Der W. sei A und die bestimmten Punkte seien b und c, so daß Ab = Ac ist. Errichte in b und c Senkrechte, und beschreibe aus ihrem Treffpunkte m mit dem Halbmesser mb oder mc einen Kreis; so ist er der verlangte.

Bew. Die rechtw. Dke. Abm und Acm sind einerlei, also mb = mc; somit trifft der Kreis die Punkte b und c, berührt sie aber bloß nach No. 28, a.

Anm. Sind die Punkte b und c nicht bestimmt, also die Aufg. nur allgemein gestellt, so halbirt man den W. A, fällt aus einem Punkte m der Halbirungslinie Senkrechte auf die 2 Schenkel, und beschreibt dann mit mb oder mc den Kreis.

24. **Einen Kreis in oder um ein ordentliches Vielekk zu beschreiben.**

Aufl. Der Kreis und das ordentliche Vielekk haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Im ersten Fall gebraucht man daher den Seitenhalbmesser, im andern Fall aber den Winkelhalbmesser des Vielekks.

25. **Um einen Kreis ein ordentliches Vielekk zu beschreiben.**

Aufl. Man beschreibt das ordentliche Vielekk zuerst in den Kreis, legt dann an die Treffpunkte der Seiten und der Kreislinie Tangenten, und verlängert dieselben, bis sie sich begegnen.

26. Zwei Kreise von bestimmten Halbmessern zu beschreiben, so daß sie sich außerhalb oder innerhalb berühren.

Aufl. Sie ergibt sich aus No. 30, a, fig. 96 und 97.

27. Drei Kreise von bestimmten Halbmessern zu zeichnen, so daß sie sich außerhalb berühren.

Aufl. (fig. 193.) Die Halbmesser seien ad, be, cf. Mache ein Dk., worin AB = ad + be, AC = ad + cf, BC = be + cf ist; beschreibe aus A mit ad, aus B mit be, aus C mit cf Kreise; so werden sich dieselben berühren.

28. Durch 3 Punkte in verschiedener Richtung 3 Kreise zu ziehen, die sich von außen berühren.

Aufl. 1ster Fall. Die 3 Punkte stehen gleich weit von einander ab. Man ziehe zwischen ihnen 3 gl. L., die ein gleichseitiges Dk. bilden, und beschreibe aus jedem der 3 Punkte mit einem Halbmesser = der halben Seite einen Kreis.

2ter Fall. Ihre Verbindungslinien bilden ein gleichschenkliges Dk. — Man beschreibe aus den Enden der Grundlinie mit einem Halbmesser = der halben Grundlinie 2 Kreise und aus dem Scheitelpunkt mit einem Halbmesser = dem Unterschiede zwischen einer Schenkelseite und der halben Grundlinie den 3ten Kreis.

3ter Fall. Ihre Verbindungslinien bilden ein ungleichseitiges Dk. (fig. 194). Auf der größten Seite AB mache An = AC, Bm = BC, halbire mn in u, beschreibe aus A mit dem Halbmesser Au, aus B mit dem Halbmesser Bu, aus C mit um Kreise; so werden sich dieselben auf die verlangte Weise berühren.

Bew. Der Schüler suche ihn.

29. Einen Kreis von bestimmtem Halbmesser zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in 2 bestimmten Punkten schneidet.

Aufl. (fig. 98.) Es sei der Kreis von M gegeben, die Durchschnittspunkte seien A und B. Aus A und B bestimme mit dem gegebenen Halbmesser des zu beschreibenden Kreises den Punkt m und beschreibe aus m mit mA einen Kreis. — Bew.

Anm. Hier ist mA < MA; es muß daher, weil A und B links von M liegen, auch der Kreis von m links von M fallen. — Ist mA > MA, so kann der 2te Kreis nicht nur links, sondern auch rechts von M fallen.

Uebungsaufgabe.

Es ist ein Kreis gegeben; 2 andere Kreise sollen denselben zugleich in den beiden Enden eines Durchmessers schneiden; die Halbmesser derselben sollen a. bloß unter sich, b. auch dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich sein.

30. Eine Gerade in 3 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. (fig. 195.) Die Gerade sei AB. Ziehe aus A (unter einem nicht allzuspitzen W.) die g. L. AD, mache AC = CD, ziehe BD von unbestimmter Länge, mache DE = DB, ziehe EC bis nach F, mache FG = FA; so ist AB in 3 gleiche Theile getheilt.

Bew. Ziehe DG. Im Dk. ADG ist CF ♯ DG (31, b), oder EF ♯ DG; weil im Dk. BEF aber BD = DE, so ist auch FG = BG (31, a); mithin AF = FG = GB.

31. Eine Gerade in 5 gleiche Theile zu theilen.

1. Aufl. Die Gerade sei ab (fig. 196). Ziehe aus a (unter einem nicht allzuspitzen W.) die Gerade ac, trage auf sie von a aus 5 gleiche Theile, ziehe cb und mit ihr ♯ dh, ei, fk, gl; so theilen diese die ab in 5 gleiche Theile. — Bew. No. 31, a.

Anm. Ist bh richtig gefunden, so kann man von h aus noch 4 solche Theile abschneiden, ohne die andern Parallelen zu ziehen.

2. Aufl. (fig. 197). Trage auf eine Gerade AB

5 gleiche Theile, AD, DE u. s. w.; beschreibe über AB ein gleichseitiges Dk. ABC und mache Ca = Cb = ab, ziehe endlich CD, CE, CF, CG: so theilen diese die ab in 5 gleiche Theile.

Bew. Ca : CA = Cb : CB, also ab ‡ AB, und folglich ad : aC = AD : AC. Es ist aber AC = AB und wegen der Aehnlichkeit der Dke. aCb und ACB auch das Dk. aCb gleichseitig, somit aC = ab; daher ist ad : ab = AD : AB = 1 : 5, demnach af = $\frac{1}{5}$ ab. Ebenso läßt sich zeigen, ae : ab = AE : AB = 2 : 5, also ae = $\frac{2}{5}$ ab u. s. w.

3. Aufl. (fig. 198.) In a errichte eine Senkrechte und trage auf sie von a aus 5 gleiche Theile bis c und ziehe bc; zu ab ‡ ziehe de, fg, hi, kl; so ist ab mittelbar in 5 gleiche Theile getheilt.

Bew. Es ist de : ab = dc : ac = 1 : 5, also de = $\frac{1}{5}$ ab; ferner fg : ab = fc : ac = 2 : 5, also fg = $\frac{2}{5}$ ab u. s. w.

Anm. Diese 3 Auflösungen sind bei jeder Anzahl von Theilen anwendbar. — Soll eine Gerade in 6 gleiche Theile getheilt werden, so halbirt man sie zuerst und theilt dann jede Hälfte in 3 gleiche Theile. — Um 8 gleiche Theile zu erhalten, halbirt man die gegebene Gerade, halbirt dann jede Hälfte, wodurch 4 gleiche Theile entstehen, und halbirt endlich noch jedes Viertel derselben. — Ist die Anzahl der Theile eine in Faktoren zerlegbare Zahl, so läßt sich auch folgendes Verfahren anwenden.

32. Eine Gerade in 10 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Weil 10 = 2 . 5 ist, so halbire man die zu theilende Gerade MN in P; errichte in M und N die Senkrechten ML und NE; trage auf jede derselben 5 gleiche Theile, verbinde die gleichvielsten Theilpunkte durch Linien, ziehe PL und zu ihr ‡ dann Ne (oder Ne in die Mitte von EL): dann ist MN mittelbar in 10 gleiche Theile getheilt.

Bew. Wegen No. 31 ist Aa = $\frac{1}{5}$ NP = $\frac{1}{10}$ MN; Bb = $\frac{2}{10}$ MN; Cc = $\frac{3}{10}$ MN; Dd = $\frac{4}{10}$ MN; und wegen No. 17 ferner AF = $\frac{1}{2}$ MN + $\frac{1}{10}$ MN = $\frac{6}{10}$ MN u. s. w.

33. **Eine Gerade in 3 Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten.**

Aufl. (fig. 200). Die Gerade sei MN. Ziehe aus M eine andere Gerade, schneide aus M auf ihr $3 + 4 + 5 = 12$ gleiche Theile ab, so daß Mn an Größe von MN nicht allzusehr abweicht; ziehe Nn, dann Pp und Qq ♯ Nn; so ist MN nach der Forderung getheilt.

Bew. Es ist MP : PQ : QN = Mp : pq : qn = 3 : 4 : 5 (No. 31, a).

34. **Eine Gerade in 3 Theile zu theilen, die sich wie 3 gegebene Linien verhalten.**

1. Aufl. Zu theilen sei MN (fig. 201), gegeben seien ab, bc, cd. Aus M ziehe die Gerade Mn, mache auf ihr Mp = ab, pq = bc, qn = cd, ziehe Nn und ♯ zu ihr qQ und pP; so ist MN nach Verlangen getheilt. — Bew. No. 31, a.

2. Aufl. (fig. 202.) Auf der Geraden mn mache mp = ab, pq = bc, qn = cd; beschreibe über mn das gleichseitige Dk. mno, mache oM = oN = der gegebenen MN und ziehe MN, dann op und oq; so ist MN nach Verlangen getheilt.

Bew. Das Dk. MNo ist gleichseitig, also MN = Mo (S. Aufg. 31, Aufl. 2). Sodann ist MP : mp = oP : op = PQ : pq = oQ : oq = QN : qn, also MP : mp = PQ : pq = QN : qn oder MP : PQ : QN = mp : pq : qn = ab : bc : cd.

35. **Zu 3 gegebenen Linien die 4te Proportionallinie zu finden.**

Aufl. (fig. 203). Die 3 Linien seien ab, bc, ad und es soll sein ab : bc = ad : x. Auf den Schenkeln des spitzen W. A mache AB = ab, BC = bc, AD = ad; ziehe BD und zu ihr ♯ CE; so ist DE die gesuchte Linie.

Bew. Es verhält sich AB : BC = AD : DE, oder ab : bc = ad : DE (No. 31, a).

Anm. Man versuche eine Auflösung obiger Aufgabe nach No. 37, c.

36. **Zu 2 Linien die 3te Proportionallinie zu finden, wenn eine jener beiden die mittlere Proportionale ist.**

1. Aufl. (fig. 204). Gegeben seien fg und gh, und es soll sein fg : gh = gh : x. Auf der Geraden FL mache FG = fg, errichte die Senkrechte GH = gh, ziehe FH und senkrecht zu ihr HL; so ist GL die gesuchte Linie. — Bew. No. 35, b.

2. Aufl. I. Fall. (fig. 205.) Es sei ab < ac, und es soll sein ab : ac = ac : x. Auf der Geraden AD mache AB = ab, errichte in B eine Senkrechte, bestimme in ihr aus A mit dem Halbmesser ac den Punkt C (oder mache AC = ac), errichte zu AC in C die Senkrechte CD, welche AD in D schneide: so ist AD die gesuchte Linie.

Bew. In dem rechtwinkligen Dk. ACD ist AB : AC = AC : AD (No. 35, a).

II. Fall. (fig. 206.) Es sei ab > ac, und es soll sein ab : ac = ac : x. Mache AB = ab, halbire AB in E, bestimme aus A mit ac und aus E mit EB den Punkt C, ziehe CD senkrecht zu AB: so ist AD die verlangte Linie.

Bew. Zieht man EC und BC; so ist das Dk. ACB rechtwinklig (No. 14, c), daher AB : AC = AC : AD (No. 35, a).

Anm. Aus E hätte man auch mit dem Halbmesser EA einen Halbkreis ziehen können. — Wie unterscheidet sich der 2te Fall wesentlich vom ersten? Wie unterscheiden sich diese beiden Auflösungen von der ersten? Welche dieser 3 Auflösungen ist die einfachste? — Läßt sich obige Aufg. nicht auch nach No. 37, d lösen?

37. **Zu 2 Linien ihre mittlere Proportionale zu finden.**

1. Aufl. (fig. 204.) Gegeben seien fg und gl, und es soll sein fg : x = x : gl. Auf einer Geraden mache FG = fg und GL = gl, errichte in G eine Senkrechte, bestimme aus der Mitte m von FL mit dem Halbmesser mF ihre Länge in H; so ist GH die verlangte Gerade. — (Bew. No. 14, c und No. 35, b.)

2. Aufl. (fig. 206.) Gegeben seien ab und ad. Mache AB = ab und AD = ad, errichte die Senkrechte

DC, halbire AB in E, bestimme aus E mit dem Halbm. EA die Länge von DC, und ziehe AC: so ist AC die gesuchte Linie. — (Bew. No. 14, c und No. 35, a.)

Anm. Man versuche, die Aufg. 37 auch nach Anleitung von No. 37, d zu lösen.

38. **Durch einen Punkt innerhalb eines W. eine Gerade zwischen dessen Schenkeln zu ziehen, so daß dieselbe in jenem Punkte halbirt ist.**

Aufl. (fig. 207.) Es sei gegeben der W. m und der Punkt x. Aus x ziehe xn ♯ mq, mache np = nm, ziehe px nach q; so ist pq die gesuchte Gerade.

Bew. Weil nx ♯ mq, so ist mn : np = qx : xp; da nun mn = np, so ist auch qx = px.

39. **Ein Dk. zu zeichnen, das einem gegebenen Dk. ähnlich ist, und dessen Seiten zu denen des Letztern wie 2 bestimmte Zahlen oder Linien sich verhalten.**

Aufl. (fig. 208.) Das gegebene Dk. sei PQR, und das bestimmte Zahlenverhältniß 5 : 8. — Theile PQ in S so, daß PS : PQ = 5 : 8 ist; ziehe ST ♯ QR, mache ps = PS und bilde über ps das Dk. pst einerlei mit dem Dk. PST; so ist pst das verlangte Dk.

Bew. Weil ST ♯ QR, so ist Dk. PST ∼ Dk. PQR: aber Dk. PST ≃ Dk. pst, also auch Dk. pst ∼ Dk. PQR. Weil ferner PS : PQ = 5 : 8, und PS = ps, so ist ps : PQ = 5 : 8 = pt : PR = st : QR.

Anm. Ist das Verhältniß der Seiten durch Linien bestimmt, z. B. Pu : Px; so sucht man zu Pu, Px, PQ die 4te Proportionallinie, indem man uS ♯ xQ zieht, u. s. w.

40. **Ein Vielekk zu zeichnen, das einem gegebenen Vlk. ähnlich ist, und dessen Seiten zu denen des Letztern wie 2 bestimmte Zahlen oder Linien sich verhalten.**

1. Aufl. (fig. 209.) Gegeben sei das Fünfekk ABCDE, und es soll sein x : AE = AF : AG. — Suche die 4te Proportionallinie zu AE, AF, AG; sie

ist AH. Mache nun ae = AH, ziehe BE und CE; trage an ae den W. bae = W. BAE, und den W. aeb = W. AEB und vollende das Dk. abe; an be trage den W. cbe = W. CBE, und den W. bec = W. BEC und vollende das Dk. bce; an ce trage den W. dce = W. DCE, und den W. ced = W. CED und vollende das Dk. cde: so ist abcde das gesuchte Fünfekk.

Bew. Die Dke. ABE und abe, BCE und bce, CDE und cde haben der Auflösung zufolge gleiche W., sind also ähnlich; daher sind auch die Fünfekke selbst ähnlich (No. 33, a). Weil ae : AE = AF : AG, so haben auch die entsprechenden übrigen Seiten dieses Verhältniß.

Anm. Die W. aeb, bec, ced kann man unmittelbar nach einander antragen, wodurch sich das Geschäft vereinfacht.

2. Aufl. (fig. 210.) Gegeben sei das Fünfekk ABCDE, und es soll sein x : AB = pq : PQ. — Mache eine Gerade AM = PQ, dann Ma = pq, ziehe MB, MC, MD, ME, dann ab ♯ AB, bc ♯ BC, cd ♯ CD, de ♯ DE, und (ae ♯ AE oder) verbinde die Punkte a und e: so ist abcde das gesuchte Fünfekk.

Bew. Die beiden Vlke. haben gleiche W. (No. 4, f). — Ferner sind je 2 Dke., die bei M einen gemeinschaftlichen W. haben, der Parallelen wegen ähnlich. Es ist daher AB : ab = MA : Ma = MB : Mb = BC : bc = MC : Mc = CD : cd = MD : Md = DE : de = ME : Me = EA : ea, folglich AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea = MA : Ma = PQ : pq.

1. Anm. Der Punkt M kann auf gleiche Weise auch im Vielekk selbst genommen werden, wie fig. 211; das Verfahren bleibt im Uebrigen ganz dasselbe.

2. Anm. Ist aber die Entfernung des Punktes M von A = PQ für die Zeichnung nicht passend; so suche man zu AB, PQ und pq die 4te Proportionale ab, ziehe dann in schikklicher Entfernung ab ♯ AB, ziehe ferner durch A und a, so wie durch B und b Gerade, die sich in einem Punkte treffen; von diesem Treffpunkte ziehe man Gerade nach C, D, E, und mache dann bc ♯ BC u. s. w.

3. Aufl. (fig. 212.) Gegeben sei das Sechsekk ABCDEF, und es soll sein x : AF = Ap : AP. —

Suche die 4te Proportionale Af; ziehe die Gehren AC, AD, AE, dann fe # FE, ed # ED, dc # DC, cb # CB; so entsteht das verlangte Sechsekk Abcdef.

Bew. Die beiden Sechsekke haben den W. A gemeinsam, und wegen der Parallelen die übrigen W. gleich. Je zwei Dke., die bei A einen gemeinschaftlichen W. haben, sind ähnlich (31, e), daher haben alle Seiten der beiden Vielekke, wie sich leicht zeigen läßt, das gleiche Verhältniß, nämlich wie Af : AF = Ap : AP; folglich sind beide ähnlich.

1. Anm. Die Figur Abcdef läßt sich prüfen. Man sucht die 4te Proportionale zu AB, AP, Ap; ist dieselbe = Ab, so ist die genannte Figur richtig. — Ebenso kann man bei den vorigen Auflösungen verfahren.

2. Anm. Ist das Verhältniß der Seiten beider Vielekke in Zahlen angegeben, so hat man aus einer Seite der gegebenen Figur vermittelst des Zahlenverhältnisses bloß die entsprechende Seite der zu beschreibenden Figur zu suchen; im Uebrigen bleibt das Verfahren bei jeder Auflösung der Aufg. 40 unverändert.

II. Verwandlung der Figuren.

41. Ein ungleichseitiges Dk. in ein rechtwinkliges oder gleichschenkliges über derselben Grundlinie zu verwandeln (fig. 213).

a. Aufl. Gegeben sei das Dk. ABC. Errichte in A eine Senkrechte, ziehe CD # AB, dann BD; so ist ABD das verlangte Dk. — Bew. No. 39, b.

b. Aufl. Errichte in der Mitte von AB die Senkrechte FE, ziehe CE # AB, dann AE und BE; so ist ABE das verlangte Dk. — Bew. No. 39, b.

42. Ein Dk. über derselben Grundlinie in ein anderes zu verwandeln, dessen zweite Seite eine bestimmte Lage hat.

Aufl. (fig. 214.) Gegeben sei das Dk. abc; eine Seite des andern Dks. soll nach ad fallen. — Ziehe cd # ab, dann bd; so ist abd das verlangte Dk. — Bew. No. 39, b.

Anm. Statt der Lage von ad kann auch der W. bad gegeben sein. Dann heißt die Aufg.: ein Dk. über derselben Grundlinie in ein anderes mit gegebenem W. an ihr zu verwandeln.

43. **Ein Dk. in ein anderes mit gegebener Grundlinie zu verwandeln, dessen 2te Seite eine bestimmte Lage hat (fig. 215).**

1. Aufl. Zu verwandeln sei das Dk. ABC; gegeben sei die Grundlinie ac und die Lage von ab. — Ziehe die Höhe CD, suche zu AB, CD, ac die 4te Proportionale, so daß $x : CD = AB : ac$; mache die Senkrechte cd = der gefundenen Linie, ziehe bd # ac, dann bc; so ist abc das verlangte Dk.

Bew. Weil $cd : CD = AB : ac$, so ist $ac \cdot cd = AB \cdot CD$, also auch $1/2 \times ac \cdot cd = 1/2 \cdot AB \cdot CD$.

2. Aufl. Die Höhe des Dks. über ac sei x; dann muß $1/2 \times ac \cdot x = 1/2 \times AB \cdot CD$ sein, daher

$x = \frac{AB \cdot CD}{ac}$. Man berechne nun x, errichte dann die Senkrechte cd = x u. s. w.

Anm. Es sei z. B. $AB = 360'$, $CD = 186'$, $ac = 320'$; so ist $cd = \frac{360 \cdot 186}{320} = 209'\ 2''\ 9'''$.

44. **Ein Dk. in ein anderes mit gegebener Grundlinie zu verwandeln, das mit jenem einen W. gemeinschaftlich hat.**

Aufl. (fig. 216.) Das Dk. MNP sei zu verwandeln, die neue Grundlinie sei Mn, und der gemeinschaftliche W. M. — Ziehe nP, dann Np # nP, endlich np; so ist Mnp das verlangte Dk.

Bew. Es ist Dk. noN = Dk. poP (No. 39, c); also Dk. MNP = Vk. MnoP + Dk. nNo = Vk. MnoP + Dk. Pop = Dk. Mnp.

1. Anm. Die beiden Aufl. von Aufg. 43 lassen sich hier ebenfalls anwenden.

2. Anm. Wäre Mnp zu verwandeln in ein Dk. mit der Grundlinie MN und dem W. M; so ziehe man Np, zu ihr # nP, dann NP. — Beweis wie vorher.

45. **Ein Dk. in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln, dessen eine Seite eine bestimmte Lage hat.**

1. Aufl. (fig. 215.) Zu verwandeln sei Dk. ABC, gegeben die Höhe cd und die Lage von ab. — Man ziehe die Senkrechte cd, suche die 4te Proportionale zu cd, CD, AB, so daß x : AB = CD : cd, mache ac = der gefundenen Linie, ziehe db ⋕ ac, endlich bc.

Bew. wie bei Aufg. 43, Aufl. 1.

2. Aufl. Die Grundlinie des Dks. von der Höhe cd sei x; dann muß $1/2$ x . cd = $1/2$ AB . CD sein, daher $x = \frac{AB . CD}{cd}$. Man berechne nun x, mache ac = x, errichte die Höhe cd, mache db ⋕ ac, ziehe bc; so erhält man das Dk. abc.

Anm. Es sei z. B. AB = 400′, CD = 306′, cd = 360′, also $ac = \frac{400 . 306}{360} = 340'$.

46. **Ein Dk. in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln, das mit jenem einen W. gemein hat (fig. 217).**

Aufl. Zu verwandeln sei das Dk. ABC, die Höhe des andern sei BH, und der gemeinschaftliche W. B. — Errichte die Senkrechte BH, ziehe cH ⋕ AB, dann Ac und zu ihr ⋕ Ca, endlich ziehe ac; so ist aBc das verlangte Dk.

Bew. Es ist Dk. Aac = Dk. Cce (39, c), also ABce + Aae = ABce + Cce, oder Dk. aBc = Dk. ABC (39, b).

Anm. Hier lassen sich auch noch die beiden Auflösungen von Aufg. 45 anwenden. — Obige Aufg. könnte auch so gestellt werden: Das Dk. ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze in c fällt.

47. **Ein Dk. in ein gleichhohes Parallelogramm mit bestimmtem W. zu verwandeln.**

Aufl. (fig. 218.) Gegeben sei das Dk. FGH und W. u. — Halbire FG in I, mache W. KIG = W. u und GL # IK, dann HL # FG; so ist IKLG das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. hat nur die halbe Grundlinie des Dks. FGH, aber mit ihm gleiche Höhe, also ist es ihm gleich; auch hat es den vorgeschriebenen W.

1. Anm. Die gleiche Aufg. ist gelöst in fig. 219, wo aber das Prllgrm. GIKH den W. G und die Seite GH mit dem Dk. gemein hat; dann in fig. 220, wo die Dreiekksseite FH Gehre des Prllgrms. ist; ferner in fig. 221, wo die Seite IK durch einen bestimmten Punkt der Dreiekksseite GH geht.

2. Anm. Auf gleiche Weise wird das Dk. in ein Rechtekk verwandelt, indem man den W. des Prllgrms. $= 90^0$ macht.

48. **Ein Dk. in ein Prllgrm. mit der gleichen Grundlinie und einem bestimmten W. an derselben zu verwandeln.**

Aufl. (fig. 222.) Gegeben sei das Dk. abc, und für das Prllgrm. der W. x. — Ziehe die Höhe cd auf die (hier verlängerte) Grundlinie und halbire sie in e, mache ef # ab, W. gab = x, und bf # ag; so ist abfg das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. hat die gleiche Grundlinie, aber nur die halbe Höhe des Dks. Beide sind also gleich; auch enthält jenes den vorgeschriebenen W.

1. Anm. Löse die gleiche Aufg., so daß: das Prllgrm. mit dem Dk. den W. cab, oder den W. abc gemein hat; oder daß der Punkt g in die Seite bc oder ac fällt.

2. Anm. Ebenso wird das Dk. in ein Rechtekk verwandelt, indem bloß W. gab $= 90^0$ gemacht wird.

49. **Ein Dk. in ein Prllgrm. zu verwandeln, das eine bestimmte Seite und einen gegebenen W. enthält.**

1. **Aufl.** Gegeben sei das Dk. mno fig. 223, und für das Prllgrm. die Seite ab nebst dem W. z. — Halbire mn in p, trage an p den W. tpn = z, verlängere mn und mache ns = ab, ziehe nu und sv # pt, dann ox # ps, ferner durch s und r die Gerade st, endlich tv # ps; so ist ruvx das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. npqr = Dk. mno (Aufg. 47);

ferner ist Dk. pst = Dk. stv, Dk. nrs = Dk. rsx, und Dk. rqt = Dk. rtu; zieht man daher von Dk. pst die Dke. nrs und rqt, dann von Dk. stv die Dke. srx und rtu ab, so bleibt Prllgrm. npqr = Prllgrm. ruvx; Letzteres aber hat, weil W. urx = W. qpn = z, und rx = ns = ab, die vorgeschriebene Seite und den vorgeschriebenen W.; also ist es das verlangte.

Anm. Das gefundene Prllgrm. ruvx kann nun an jede beliebige Stelle hingetragen werden.

2. Aufl. Man ziehe die Höhe oh, suche zu ab, oh, mn die 4te Proportionallinie; beschreibe dann mit ab als Grundlinie und der halben gefundenen Höhe ein Parallelogramm, das den W. z hat.

3. Aufl. Ist x die Höhe des Prllgrms., so muß

$$ab \times x = \tfrac{1}{2} \, . \, mn \, . \, oh \text{ sein, daher wird } x = \frac{mn \, . \, oh}{2 \, . \, ab};$$

mit ab und der gefundenen Höhe läßt sich dann das Prllgrm. konstruiren.

50. Ein Prllgrm. in ein gleichhohes Dk. von bestimmter Lage zu verwandeln.

Aufl. Gegeben Prllgrm. GIKL fig. 218; eine Seite des Dks. falle nach GH. Umkehrung von Aufg. 47. Ebenso bei fig. 219, 220 und 221.

51. Ein Prllgrm. in ein Dk. mit gleicher Grundlinie zu verwandeln, das eine bestimmte Lage hat.

Aufl. (fig. 222.) Eine Seite des Dks. falle von b nach c. Umkehrung der Aufl. zu Aufg. 48.

52. Ein Prllgrm. in ein anderes von bestimmter Lage zu verwandeln.

Aufl. (fig. 116.) Gegeben ABCD; eine Seite des andern Prllgrms. falle von A nach F (oder der W. BAF sei bestimmt) u. s. w.

53. Ein Prllgrm. in ein anderes von bestimmter Seite und Lage zu verwandeln.

1. Aufl. (fig. 224.) Gegeben sei abcd; die Grund

linie des neuen Prllgrms. sei ag, und eine Seite desselben falle von a nach e hin (oder der W. eag sei bestimmt). — Fälle die Höhe dh, suche zu ab, dh, ag die 4te Proportionale, mache derselben = hn, ziehe durch n nun ef # ag, und gf # ae; so ist aefg das gesuchte Prllgrm.

Bew. Nach der Aufl. ist ag . hn = ab . dh.

2. **Aufl.** Ziehe dh. Ist x die Höhe des 2ten Prllgrms., so ist ag . x = ab . dh, also $x = \frac{ab \cdot dh}{ag}$ u. s. w.

54. Ein Trapez in ein gleichhohes Prllgrm. zu verwandeln.

1. **Aufl.** (fig. 72.) Das Trapez sei **ABCD**. Halbire **CD** in **F**; durch **F** ziehe **GH # AB** und verlängere **BC** bis **H**: so ist **ABHG** das verlangte Prllgrm.

2. **Aufl.** Auf der größern Parallelen **AD** mache **AL = BC**, halbire **LD** in **G**, ziehe **GH # AB**, und verlängere **BC** bis **H**; so ist u. s. w.

55. Ein Trapez in ein anderes von bestimmter Grundlinie zu verwandeln.

Aufl. (fig. 225.) Gegeben Trapez mnop; die Grundlinie des andern sei pq. — Halbire mn in u, durch u ziehe qx, und verlängere on bis x; so ist qxop das verlangte Trapez.

56. Ein Trapezoid in ein Dk. zu verwandeln, das einen W. und noch eine Winkelspitze mit ihm gemein hat.

Aufl. (fig. 226.) Das Trapezoid sei abcd; das Dk. erhalte den W. a und die Spitze d. — Ziehe die Gehre bd, zu ihr # ce, endlich ziehe de; so ist ade das verlangte Dk.

Bew. Dk. dcf = Dk. bef (No. 39, c); jenes wird vom Trapezoid weggenommen, und dafür dieses zugesetzt, also u. s. w.

57. Ein Fünfekk in ein Viereck zu verwandeln.

Aufl. (fig. 227.) In dem Fünfekk abcde soll der Punkt d wegfallen. Man verbinde die beiden nächsten Punkte durch die Gehre ce, ziehe zu ihr ♯ df, endlich cf; so ist abcf das verlangte Viereck. — (Bew. wie bei Aufg. 56.)

1. Anm. Das Vk. abcf läßt sich nun wieder in ein Dk. abg verwandeln. — Auf gleiche Weise kann man jedes Vielekk in eine Figur verwandeln, die eine Seite weniger hat, u. s. w., bis endlich ein Dk. entsteht.

2. Anm. So läßt sich dann auch eine Figur mit erhabenen W. in eine andere mit hohlen W. verwandeln, wie z. B. fig. 228.

3. Anm. Mehrere Figuren lassen sich in ein einziges Rechtekk vereinigen. Man verwandelt jede in ein Dk., dieses in ein Rechtekk mit bestimmter Seite (Aufg. 49), und setzt zuletzt alle Rechtekke an der gleichen bestimmten Seite zusammen.

4. Anm. Endlich kann man 2 Figuren, die mehrwinklig in einander laufen, eine gerade Grenze geben. Z. B. fig. 229 bringt man zuerst den Punkt n weg und erhält die Grenze qop; dann bringt man den Punkt o weg und erhält die Grenze pr. — Ist fg ♯ hl, so kann man nun auch noch für pr eine Grenze machen, die mit jenen beiden ♯ ist; man halbirt pr in u und zieht durch u die Gerade xz ♯ gf.

58. Eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen Figur ähnlich, und deren Inhalt zu dem der andern ein bestimmtes Verhältniß hat (fig. 230).

Aufl. Die neue Figur soll sich zur gegebenen verhalten wie $2:5$. Auf eine Gerade ab trage $2+5=7$ gleiche Theile, beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in c die Senkrechte cd, ziehe ad und bd, mache de = einer Seite der gegebenen Figur, ziehe ef ♯ ab; so ist df die der de entsprechende Seite der neuen Figur.

Bew. Bezeichnen **P** und p den Inhalt der gegebenen und der neuen Figur, so ist $p : P = df^2 : de^2$ (No. 45). Es ist aber $df^2 = ef \,.\, fg$ und $de^2 = ef \,.\, eg$, also $df^2 : de^2 = ef \,.\, fg : ef \,.\, eg = fg : eg = ac : bc = 2 : 5$, also auch $p : P = 2 : 5$.

Uebungsaufgaben.

a. Ein Dk. in ein gleich hohes Trapez von bestimmter Grundlinie zu verwandeln.

b. Ein Rechtekk in ein Quadrat, und ein Quadrat in ein Rechtekk mit bestimmter Seite zu verwandeln. (S. Aufg. 37 u. 36.)

Anm. Man kann jedes Vielekk in ein Dk., dadurch in ein Rechtekk, und durch dieses endlich in ein Quadrat verwandeln.

c. Zwei Quadrate zusammen in ein Quadrat zu verwandeln; ein Quadrat zu verdoppeln, zu verdreifachen rc.; ein Quadrat zu beschreiben, halb so groß als ein gegebenes.

d. Zwei Kreise in einen Kreis zu verwandeln; einen Kreis zu verdoppeln, zu verdreifachen; einen Kreis zu beschreiben, der die Hälfte eines gegebenen Kreises beträgt (Aufg. c, und No. 45, e).

e. Ein Quadrat zu beschreiben, gleich dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate.

f. Einen Kreisring in einen Kreis zu verwandeln (d. h. einen Kreis zu beschreiben, gleich dem Unterschiede von 2 gegebenen Kreisen).

g. Ein gleichseitiges Dk. zu konstruiren, das doppelt oder halb so groß, als ein gegebenes gleichseitiges Dk. ist.

III. Theilung der Figuren.

59. Ein Dreiekk zu halbiren.

Aufl. Hiebei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Theilungslinie geht aus einer Winkelspitze, z. B. fig. 220 im Dk. FGH aus H. — Man halbire die gegenüberliegende Seite FG in I und ziehe HI; so ist Dk. FHI = Dk. GHI.

II. Die Theilungslinie geht aus einer Seite, z. B. fig. 231 aus dem Punkte m der Seite bc. — Halbire ab in o, ziehe mo und aus der der ab gegenüberliegenden Spitze c die Gerade cn $\#$ mo, dann mn; so vollbringt mn die verlangte Theilung.

Beweis. Ziehe co. Nun ist Dk. bco = $\frac{1}{2}$ Dk. abc; nimmt man von Dk. bco das Dk. cmp weg und setzt dazu für Letzteres das ihm gleiche Dk. nop (No. 39, c), so entsteht das Dk. bmn, das also ebenfalls die Hälfte des Dks. abc beträgt.

Anm. Liegt m in der Mitte von bc, so muß die Theilungslinie von m nach a gehen (wie bei I); weil hier m mehr nach c hin liegt, so muß mn die Seite ab treffen; liegt aber m näher bei b, so trifft mn die Seite ac (fig. 232).

2. Aufl. (fig. 233.) Die Theilungslinie gehe aus g in der Seite ef. Man ziehe fh und gk senkrecht zu de, und setze den Theil, welchen die Theilungslinie aus g von e an von ed abschneidet, = ex; so ist Dk. def = $\frac{1}{2}$. de . fh, und Dk. egx = $\frac{1}{2}$. ex . gk, also $\frac{1}{2}$. ex . gk = $\frac{1}{4}$. de . fh, folglich $ex = \frac{de \,.\, fh}{2 \,.\, gk}$. Hat man hienach ex berechnet, und somit den Punkt x bestimmt; so ziehe man gx.

Anm. Ist z. B. de = 380′, fh = 234′, gk = 180′; was beträgt dann ex?

III. Die Theilungslinie ist zu einer Seite #, z. B. fig. 234 zu BC. — Suche zu AB und ihrer Hälfte AD die mittlere Proportionale AE, mache AF = AE, ziehe FG # BC; so bewirkt FG die verlangte Theilung.

Bew. Dk. AFG : Dk. ABC = $AF^2 : AB^2$ (45, c); es ist aber $AF^2 = AE^2 = AD . AB = \frac{1}{2} . AB^2$, mithin $AF^2 : AB^2 = \frac{1}{2} . AB^2 : AB^2 = 1 : 2$; folglich auch Dk. AFG : Dk. ABC = 1 : 2.

2. Aufl. Gesetzt, FG sei die gesuchte Parallele, so ist Dk. AFG : Dk. ABC = $AF^2 : AB^2$; nach der Forderung aber soll Dk. AFG : Dk. ABC = 1 : 2, also muß auch $AF^2 : AB^2 = 1 : 2$, daher $AF^2 = \frac{1}{2} . AB^2 = \frac{1}{4} . 2 . AB^2$, also $AF = \frac{1}{2} . AB . \sqrt{2} = \frac{1}{2} . AB . 1{,}4142$. — Auf gleiche Weise ergibt sich $AG = \frac{1}{2} . AC . \sqrt{2} = \frac{1}{2} . AC . 1{,}4142$.

Anm. Ist z. B. AB = 474′, so ist AF = $\frac{1}{2}$. 474 . 1,4142 = 335′ 1″ 6‴; hienach mißt man AF ab und zieht FG # BC. — Oder man berechnet auch AG. Ist z. B. AC = 520′, so wird AG = $\frac{1}{2}$. 520 . 1,4142 = 367′ 6″ 9‴, und zieht FG durch die bestimmten Punkte F und G.

IV. Die Theilung geschieht aus einem Punkte im Dk., z. B. fig. 235 aus d. — Ziehe aus d in die Mitte e einer Seite bc die Linie de, und aus dem der bc gegenüberliegenden Punkte a die Linie af # de, ziehe dann df und da; so vollbringen diese Letzteren die verlangte Theilung.

Bew. Ziehe ae. Nun ist Dk. abe = 1/2 . Dk. abc; aber auch Dk. efg = Dk. adg; daher Dk. abe — Dk. efg + Dk. adg = Vk. abfd, welches Letztere folglich ebenfalls die Hälfte des Dks. abc ist, so daß acfd die andere Hälfte wird.

60. Ein Parallelogramm zu halbiren.

Aufl. Die Theilungslinie geht durch einen Punkt innerhalb der Figur, z. B. fig. 236 durch m. — Ziehe die Gehre ab, durch ihre Mitte und durch m die Gerade cd.

Anm. Wäre statt m der Punkt c gegeben, so würde man cd ebenfalls durch die Mitte von ab ziehen, oder df = ce machen. — Die Halbirung und jede andere Theilung vermittelst einer Parallelen versteht sich von selbst.

61. Ein Trapez zu halbiren.

I. Die Theilungslinie geht durch die Parallelen. Man halbirt Letztere, und zieht durch ihre Mitte eine Gerade. — Jede andere Theilung geschieht auf ähnliche Art.

II. Sie geht von einem W. aus, z. B. fig. 237 aus n. — Mache mu = 1/2 . mp, und ux = 1/2 . no, ziehe nx, so theilt diese nach der Forderung.

Bew. Ziehe np und nu. Die Gehre np theilt das Trapez in die 2 Dke. mnp und nop. Nun ist Dk. mnu = 1/2 Dk. mnp, und Dk. unx = 1/2 Dk. nop; also betragen die Dke. mnu und unx zusammen die Hälfte der beiden Dke. mnp und nop, oder mnx ist die Hälfte des Trapezes mnop.

Anm. Wenn man fig. 238 die Gehre bd in o halbirt, dann ao und co zieht, so ist das Trapez durch die Grenze aoc ebenfalls halbirt. Warum?

III. Die Theilungslinie sei # mit den Parallelen (fig. 239). Gesetzt, die richtige Theilungslinie sei ef. Man ziehe die Höhe ch und setze ad = U, bc = u, ef = x, ch = y, gh = z, so ist:

Trapez abcd $= \frac{1}{2} \cdot (U + u) \cdot y$
und Trapez aefd $= \frac{1}{2} \cdot (U + x) \cdot z$
also $(U + u) \cdot y = 2 \cdot (U + x) \cdot z$
und $(U + u) : 2 \cdot (U + x) = z : y$.

Zieht man nun cn # ab, so ist in den Dken. cdn und cfm:

$$ch : cg = dn : fm \text{ oder } y : cg = (U - u) : (x - u)$$
also $(y - cg) : cg = (U - x) : (x - u)$
und $cg : z = (x - u) : (U - x)$
mithin $(cg + z) : z = (U - u) : (U - x)$
oder $y : z = (U - u) : (U - x)$.

Hiernach erhält man:

$$(U + u) : 2 \cdot (U + x) = (U - x) : (U - u)$$
also $(U + u)(U - u) = 2 \cdot (U + x)(U - x)$
$$U^2 - u^2 = 2 \cdot U^2 - 2 \cdot x^2$$
$$2 \cdot x^2 = 2 \cdot U^2 - U^2 + u^2 = U^2 + u^2$$
$$x^2 = \frac{1}{2} \times (U^2 + u^2) = \frac{2}{4} \cdot (U^2 + u^2)$$
$$x = \frac{1}{2} \times \sqrt{[2 \cdot (U^2 + u^2)]}$$

Hat man hiernach x oder ef berechnet, so kann auch ihr Abstand von ad, nämlich z oder gh, gefunden werden. Setzt man den Inhalt von abcd $= Q$, so ist

$$\text{Trapez aefd} = \frac{1}{2} \times (U + x) \cdot z = \frac{1}{2} \cdot Q,$$
$$\text{also } z = \frac{Q}{U + x}.$$

Ist z. B. $U = 80'$, $u = 60'$ und $y = 20'$; so ist:
$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (6400 + 3600) = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \cdot 10000 = \frac{1}{2} \times 100 \cdot \sqrt{2}$$
$$= 50 \times 1{,}4142 = 70{,}71.$$

Ferner ist $q = \frac{1}{2} \times (80 + 60) \cdot 20 = 140 \cdot 10 = 1400$, also
$$z = \frac{1400}{80 + 70{,}71} = \frac{1400}{150{,}71} = 9{,}28.$$

Berechnet man nun wirklich hiernach das Trapez aefd $= q$, so erhält man:

$$q = \frac{1}{2} \cdot (80 + 70{,}71) \cdot 9{,}28 = 150{,}71 \cdot 4{,}64 = 699{,}2944,$$
was beinahe ganz genau die Hälfte von 1400, nämlich 700 ausmacht.

IV. **Die Theilungslinie sei zu den Parallelen senkrecht**, z. B. fg fig. 238. — Man ziehe die Höhe be, und berechne den Inhalt des Dks. abe; er sei

$= q$, und der des ganzen Trapezes $= Q$; so ist das Rechtekk befg $=$ be . ef $= \frac{1}{2} Q - q$, also ef $= \frac{\frac{1}{2} Q - q}{be}$.

62. Ein Trapezoid zu halbiren.

I. Die Theilungslinie gehe aus einem bestimmten Punkte einer Seite, z. B. fig. 240 aus r. Man verwandle das Trapezoid mnop zuerst in das Dk. mnq (Aufg. 56); ziehe nr, halbire mq in u, ziehe ux # nr, endlich ziehe rx; so ist rx die gesuchte Theilungslinie.

Bew. Ziehe nu. Es ist Dk. mnu $= \frac{1}{2}$. Dk. mnq $= \frac{1}{2}$. Trapezoid mnop; im Trapez nrux ist Dk. nxz $=$ Dk. ruz; nimmt man nun dieses von Dk. mnu weg und fügt dafür jenes hinzu, so entsteht das Viereck mnxr, das nun ebenfalls die Hälfte von mnop ist.

II. Die Theilungslinie geht aus einem W., z. B. fig. 241 aus W. a. — Verwandle das Trapezoid abcd in das Dk. ade, halbire de in f und ziehe af; so ist af die Theilungslinie.

Bew. Dk. adf $= \frac{1}{2}$. Dk. ade; aber Dk. ade $=$ Trpzd. abcd, also auch Dk. adf $= \frac{1}{2}$ Trpzd. abcd.

Anm. Fiele f über c hinaus nach e hin; so müßte ab als Grundlinie des Dks. angenommen werden.

2. Aufl. Man berechnet den Inhalt des Trapezoids; er sei $= Q$; dann muß sein $\frac{1}{2} \times ad \times fg = Q$, also $fg = \frac{2Q}{ad}$. — Nun mache man die Senkrechte dh $=$ der gefundenen Höhe, ziehe hf # ad, dann af.

III. Die Theilungslinie ist # zu einer Seite, z. B. fig. 242 GH # AD. — Zuerst suche die Höhe eines Dks. ADE, das die Hälfte von dem Inhalt Q des Trapezoids beträgt, nämlich $\frac{1}{2}$. EL . AD $= \frac{1}{2}$. Q, also $EL = \frac{Q}{AD}$.

Nun fragt es sich: in welchem Punkte von EL muß die Gerade GH (# AD) gezogen werden, daß Trapez ADHG $=$ Dk. ADE wird? Um LM zu finden, muß man zuerst die Länge von GH selbst kennen.

Man ziehe EF $\#$ AD, und EO $\#$ CD, und setze AD $= U$, EF $= u$, GH $= x$, LM $= h$, EL $= H$. Nach der Forderung muß nun sein:

$$\tfrac{1}{2} \cdot U \cdot H = \tfrac{1}{2} \cdot (U + x) \cdot h$$

also $U : (U + x) = h : H$.

Es ist aber:

GN : AO = EM : H, oder $(x - u) : (U - u) = (H - h) : H$ mithin:

$$(x - u) \cdot H = (U - u)(H - h) = (U - u) \cdot H - (U - u) \cdot h$$

also:

$$(U - u) \cdot h = (U - u) \cdot H - (x - u) \cdot H = (U - x) \cdot H$$

und $h : H = (U - x) : (U - u)$.

Daher erhält man aus obiger Proportion:

$$U : (U + x) = (U - x) : (U - u)$$

$$U^2 - U \cdot u = U^2 - x^2$$

folglich $x^2 = U \cdot u$ und $x = \sqrt{U \cdot u}$.

Es ist also x oder GH die mittlere Proportionale zwischen AD und EF. — Nun kann auch h gesucht werden. Es ist

$$\tfrac{1}{2} \times (U + x) \cdot h = \tfrac{1}{2} \cdot Q$$

$$\text{also } h = \frac{Q}{U + x}.$$

Z. B. es sei $Q = 83560 \,\square'$, $U = 308'$, $u = 280'$; man sucht zuerst H, dann x und h.

63. Von einem Parallelogramm einen Theil von bestimmter Größe durch eine Parallele abzuschneiden.

Aufl. Der Inhalt des Abschnittes sei $= q$, die gegebene Grundlinie desselben und des Parallelogramms $= g$, seine Höhe $= x$; so ist:

$$g \cdot h = q, \text{ also } h = \frac{q}{g}.$$

64. Von einer geradlinigen Figur ein Dreieck von bestimmter Größe abzuschneiden.

Aufl. (fig. 53.) Die Grundlinie des Dks. sei AB $= g$, seine Höhe $= h$, sein Inhalt $= q$, so ist:

$$\tfrac{1}{2} \cdot g \cdot h = q, \text{ also } h = \frac{2q}{g}.$$

Anm. Um den Punkt m zu bestimmen, errichte man auf AB zwei Senkrechte, nämlich An = op = h und ziehe pn bis m. — Fiele der Punkt m über F hinaus, so könnte der Abschnitt kein Dk. sein.

65. **Von einer geradlinigen Figur einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden, wenn die Theilungslinie von einem gegebenen Punkte des Umfangs ausgeht.**

Aufl. Die Theilungslinie gehe aus a fig. 243. Man ziehe ac, ad, af; messe und berechne die Dke. abc und acd. Kommen sie zusammen dem abzuschneidenden Theile noch nicht ganz gleich, so schneide man für den noch fehlenden Rest über ad ein Dk. ade ab (Aufg. 64).

Oder man berechnet zu den vorigen auch noch das Dk. adf; und wenn ihr Gesammtinhalt zu groß ist, so schneidet man für den überschießenden Rest über af das Dk. aef ab.

Anm. Auf gleiche Art kann man eine Figur auch in gleiche oder verhältnißmäßige Theile theilen. — Das Verfahren bleibt gleich, wenn die Theilungslinie von der Ekke m ausgeht.

66. **Von einer geradlinigen Figur einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden, wenn die Theilungslinie von einem gegebenen Punkte innerhalb derselben ausgeht.**

Aufl. Die Theilungslinie gehe aus m fig. 244. Man zieht aus m Gerade nach den Winkelspitzen, und beginnt mit einer derselben als erster Theilungslinie, z. B. mit ma, und berechnet das Dk. mab. Ist sein Inhalt zu groß, so schneidet man über ma nach b hin ein Dk. von der bestimmten Größe ab (Aufg. 64). Ist es zu klein, so berechnet man das Dk. mbc; sind nun Beide zusammen zu groß, so schneidet man über mc nach b hin den Ueberschuß ab (nach Aufg. 64). Ist ihre Summe aber zu klein, so berechnet man das Dk. mcd u. s. w.

Sieht man aber schon nach dem Augenmaß, daß nicht mehr das ganze Dk. mcd erforderlich ist; so schneidet man über mc nach d hin ein Dk. für den noch fehlenden Rest ab.

Anm. Ebenso kann die Figur in eine Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile getheilt werden. Man mißt die ganze Figur aus, berechnet ihren Inhalt und den ersten Theil, schneidet denselben von ma aus ab u. s. w.

67. Von einem Dk. mit gegebenem Inhalte Q einen Theil von dem Inhalte q durch eine Parallele abzuschneiden.

1. Aufl. Das Dk. sei ABC fig. 101, die Theilungslinie DE, so daß BCED = q. Man ziehe die Höhe AH.

Nun ist:

$$(Q - q) : Q = AD^2 : AB^2 = AE^2 : AC^2 = AG^2 : AH^2$$

$$\text{also } AD = AB \times \sqrt{\frac{Q-q}{Q}}$$

$$AE = AC \, . \sqrt{\frac{Q-q}{Q}}$$

$$AG = AH \, . \sqrt{\frac{Q-q}{Q}}.$$

Man kann hienach eine der Linien AD, AE, AG berechnen und durch einen der Punkte D, E, G eine Gerade # BC ziehen, oder zwei derselben berechnen und durch ihre Endpunkte die Linie DE ziehen.

2. Aufl. Gesetzt, es sei $q = \frac{n}{m} \times Q$, so ist Dk. $ADE = Q - \frac{n}{m} \times Q = \frac{m-n}{m} \times Q$. Es ist nun aber $Q = \frac{1}{2} \, . \, AH \, . \, BC$, und $Q - q = \frac{1}{2} \, . \, AG \, . \, DE$ $= \frac{1}{2} \, . \, AH \, . \, BC \, . \, \frac{m-n}{m}$, also:

$$AG : AH = BC \, . \, \frac{m-n}{m} : DE.$$

Es ist ferner $AG : AH = AD : AB$, und $BC : DE = AB : AD$, mithin:

$$AD : AB = AB \, . \, \frac{m-n}{m} : AD$$

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{m - n}{m}$$

$$AD = AB \cdot \sqrt{\frac{m - n}{m}}.$$

Ebenso muß sein:

$$AE = AC \cdot \sqrt{\frac{m - n}{m}}.$$

Hienach kann man die Punkte D und E ohne den Inhalt der beiden Figuren selbst finden.

68. Ein Dk. durch Parallelen in gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man verfährt ganz nach Aufg. 67, Aufl. 2. Das Dk. ABC fig. 245 sei z. B. in 4 gleiche Theile zu bringen. Nun ist Dk. ADE $= \frac{1}{4}$ ABC, und BCED $= \frac{3}{4}$ ABC, also oben $m = 4$, $n = 3$; mithin:
$AD = AB \times \sqrt{1/4} = 1/2 \cdot AB$ und $AE = AC \cdot \sqrt{1/4} = 1/2 \cdot AC$.

Für AF und AG bemerke man, daß AFG $=$ BCGF $= \frac{1}{2}$ ABC, also $n = 2$ ist, mithin:

$$AF = AB \times \sqrt{2/4} = 1/2 \cdot AB \cdot \sqrt{2}$$
und $AG = AC \cdot \sqrt{2/4} = 1/2 \cdot AC \cdot \sqrt{2}$.

Da endlich BCLH $= \frac{1}{4}$ ABC, also $n = 1$ ist, so hat man:

$$AH = AB \cdot \sqrt{3/4} = 1/2 \cdot AB \cdot \sqrt{3}$$
und $AL = AC \cdot \sqrt{3/4} = 1/2 AC \cdot \sqrt{3}$.

Anm. Auf gleiche Weise kann das Dk. auch in eine Anzahl verhältnißmäßiger Theile getheilt werden.

69 Von einem Trapeze oder Trapezoide durch eine Parallele einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden.

1. Aufl. Es sei q die Größe des vom Viereck fig. 246 abzuschneidenden Theiles. Man denke q zuerst in ein Dk. ABE verwandelt; da dessen Grundlinie AB bekannt ist, so hat man $\frac{1}{2} \cdot EL \cdot AB = q$, also $EL = \frac{2 \cdot q}{AB}$. Aus dem nun gefundenen Punkte E gehe EF ‡ AB. Ist nun auch EF gemessen und nimmt man GH als die

gesuchte Theilungsparallele an; so hat man (nach Aufg. 62, III.):

$$GH = \sqrt{(AB \,.\, EF)}$$

und da $\frac{1}{2} \,.\, LM \times (AB + GH) = q$ sein muß, so wird:

$$LM = \frac{2q}{AB + GH}.$$

1. Anm. Es sei z. B. $ABHG = 400 \,\square^0$ und $AB = 50^0$; was ist EL? Wenn ferner $EF = 32^0$; was ist dann GH und LM?

2. Anm. Auf gleiche Weise kann man das Viereck nach und nach in eine Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile zerlegen, wobei man jedoch zuerst dessen Inhalt berechnen muß. Man schneidet über AB zuerst den ersten Theil ab, dann über der gefundenen Theilungslinie den 2ten u. s. w.

2. Aufl. Man verwandle den Theil q, der von Q abgeschnitten werden soll, zunächst über AB fig. 247 in ein Rechteck, so daß $Aa \,.\, AB = q$, also $Aa = \frac{q}{AB}$ ist. Dadurch entsteht ein Theil ABFE, der um die Dke. AaE und BbF zu klein ist. Diesen Unterschied verwandle man nun über EF abermals in ein Rechteck, so daß $Ee \,.\, EF = Aae + BbF$, also $Ee = (Aae + BbF) : EF$ wird. Nun ist ABHG noch um die Dke. EeG und FfH zu klein, u. s. w. — Es wird selten nöthig sein, zu hinreichender Genauigkeit das Geschäft fortzusetzen; sondern meistens wird schon GH genügen.

1. Anm. Wenn das Trapezoid nach oben sich erweitert, so entstehen die Unterschiedsdreiecke in demselben, und die vermittelst des ersten Rechtecks erhaltene Theilungslinie schneidet von dem Trapezoid zu viel ab oder ist zu groß. Die Summe der Unterschiedsdreiecke muß also wieder abgezogen werden u. s. w.

2. Anm. Bei der Theilung auf dem Felde zieht man die 2te Aufl. der ersten der Kürze wegen gewöhnlich vor.

Nachwort.

Bei Abfassung eines Lernbuches der „Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrerseminarien“ kann es nicht die Absicht sein, in diesem Gebiete auf Erweiterungen des Stoffes auszugehen, was nur rein wissenschaftlichen Bestrebungen anheim fällt; sondern vielmehr eine dem Zwekke der genannten Anstalten entsprechende Auswahl des Stoffes zu treffen und denselben in einer Gestalt vorzuführen, welche den Forderungen der heutigen Unterrichtswissenschaft genügt. Daß die letztere Absicht noch nicht erreicht ist, davon zeugen die ziemlich zahlreichen Lernbücher der Geometrie. Mancher mag freilich dieses Büchermachen beklagen; allein dasselbe beweist doch, daß Viele sich bemühen, auch die Geometrie als Unterichtsgegenstand zu fördern, und — von dieser Seite betrachtet — hat es ein Recht auf Anerkennung. Hat sich in Folge dessen einmal ein Buch in einem ausgedehnten Kreise Geltung zu erringen gewußt, dann wird auch die Ebbe des Bücherschreibens in diesem Theile des Unterrichtsgebietes nothwendig und von selbst eintreten. —

Die Forderungen der heutigen Unterrichtswissenschaft an ein Lernbuch der Geometrie für die oben genannten Anstalten vollständig zu erörtern, dazu kann jetzt hier kaum der Ort sein; sondern es dürfte dies vielmehr einmal in einer besondern Abhandlung geschehen. Es genüge, zu bemerken: 1. Die Darstellung habe im Allgemeinen den Lernstoff in der Weise vorzuführen, daß er vor dem Geiste des Schülers gut gegliedert aus seiner Wurzel aufwachse: das Lehrverfahren muß also ein genetisches (schaffendes) sein; der Lernstoff darf nicht als ein Fertiges oder Gegebenes vorgekaut werden, damit ihn der Schüler wieder nachkaue. Darin liegt eben der Unterschied zwischen dem Jetzt und dem Einst des mathematischen Unterrichts. (Man lese darüber z. B.: die deutsche Bürgerschule, von Dr. Mager, pag. 167 bis 193.) — 2. Der Unterricht theilt sich in eine Vorschule und in die eigentliche Geometrie. Jene umfaßt der erste Abschnitt, diese liegt in den übrigen Abschnitten. Der erste Abschnitt enthält somit die geometrische

Formenlehre nach einem Plane, der im Allgemeinen zugleich auch den übrigen Abschnitten zu Grunde liegt. — 3. In der eigentlichen Geometrie dürfen die Lehrsätze erst dann ausgesprochen werden, wenn sie dem Schüler zur Einsicht gebracht sind. Das Lehrverfahren muß ihn dahin führen, das durch die vorhergehende Kombination sich herausstellende Ergebniß selbst zu formuliren. — 4. Aufgaben dienen zur Anwendung und Befestigung des Gelernten.

Ich war darauf bedacht, je die in engster Beziehung stehenden Lehrsätze und Folgerungen, die sich gleichsam wie Arten unter eine Gattung reihen, in einer Nummer zusammenzustellen, theils um eben ihre Verwandtschaft auch äußerlich hervorzuheben, theils um dem Schüler die Uebersicht und die Auffassung des Zusammenhangs im Einzelnen zu erleichtern. Den Gesammtplan, wie er im ersten Abschnitte niedergelegt ist, auch für die übrigen Abschnitte im Auge zu behalten und dem Lernenden zum Bewußtsein zu bringen, ist Sache des Lehrers. — Auch die Aufgaben im letzten Abschnitte schließen sich im Wesentlichen diesem Plane an. Gern hätte ich die Anzahl derselben vermehrt, wenn mir nicht der Raum Grenzen gesetzt hätte.

Ueberall habe ich mich der Kürze beflissen, so weit dies, ohne der Deutlichkeit zu schaden, geschehen konnte.

Daß mir die neuere mathematische Literatur nicht fremd ist; daß ich dieselbe benutzt habe, ohne aus ihr abzuschreiben; daß ich vielmehr einen mehr selbständigen Gang eingeschlagen habe: das wird der Sachkenner leicht herausfinden. Damit will ich keineswegs sagen, daß die Ausführung des Ganzen mit dem guten Willen, etwas Gediegenes zu liefern, gleichen Schritt gehalten habe. Es wird mir daher auch angenehm sein, wenn Sachkenner die Punkte bezeichnen wollen, die der Verbesserung fähig und bedürftig sind.

Baden, im August 1841.

Der Verfasser.