

# La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées

Autor(en): **Ros, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-440>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA STABILITÉ DES BARRES COMPRIMÉES PAR DES FORCES EXCENTRÉES

KNICKUNG EXZENTRISCH BELASTETER STÄBE

BUCKLING OF ECCENTRICALLY LOADED BARS

Dr.-Ing. h. c. M. ROŠ,

Professeur à l'École Polytechnique Fédérale et

Directeur du Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux, Zürich.

Ce mémoire est une extension et un complément des publications suivantes parues à l'occasion des deux premiers Congrès internationaux de construction des ponts et charpentes :

« La résistance au flambage des barres articulées aux deux bouts » (Zurich, 1926) et

« Le dimensionnement au flambage des barres comprimées par des forces axiales et excentrées » (Vienne, 1928).

Tous les essais ont été exécutés au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux sous la direction du Prof. M. Roš et celle du D<sup>r</sup> J. BRUNNER. Ce dernier s'est chargé, d'autre part, de l'exécution et de la surveillance des essais ainsi que de la mise en valeur des résultats.

C'est aussi sous la direction immédiate du D<sup>r</sup> BRUNNER qu'ont été exécutés les essais de flambage

sur le bois de construction, par le D<sup>r</sup> Christen OSTENFELD, Copenhague, Danemark ;

sur la fonte, par le Prof. Tomoyasu YUKI de l'École Polytechnique de Sendai, Japon ;

sur l'acier à haute résistance (Ac 52), par le Prof. Shizuo BAN de l'Université impériale de Kyoto, Japon, et

sur le béton armé, par l'Ingénieur dipl. O. BAUMANN de Baden, Suisse.

L'ingénieur diplômé A. EICHINGER, collaborateur scientifique du L. F. E. M., a pris part aux discussions théoriques.

## I. Suppositions.

Les suppositions sur lesquelles se basent les recherches théoriques et les considérations développées au cours de ce mémoire sont les suivantes :

1) la barre est à âme pleine, de section invariable et rectangulaire (F) ;

- 2) l'axe de la barre est rectiligne ;
- 3) la barre est articulée aux deux bouts ;
- 4) les sections restent planes ;
- 5) la courbe des flèches est une sinusoïde qui répond à la fonction

$$y = f \cdot \sin \left( \frac{\pi \cdot x}{l} \right) ;$$

- 6) le diagramme tension-allongement est connu ;
- 7) l'allègement des fibres comprimées suit la loi élastique ;
- 8) la force de compression P croît d'une façon constante, mais toutefois pas trop lentement, jusqu'au moment où elle atteint la charge de flambage  $P_k$  (essais statiques de flambage) ;
- 9) la force P agit parallèlement à l'axe rectiligne de la barre lorsque le flambage se produit sous l'action de forces excentrées.

## II. Processus du flambage.

Le flambage est un problème de stabilité. Tous ces problèmes de stabilité se basent sur les diagrammes tension-déformation et, dans la règle, sur les diagrammes compression-raccourcissement ; dans certains cas on utilise aussi les diagrammes tension-allongement des matériaux de construction.

Le moment intérieur  $M_i$ , dû, lors de la compression axiale, à un fléchissement latéral, virtuel et infiniment petit, est en relation avec le moment développé par la charge extérieure.

Ces moments sont donnés par les formules :

moments intérieurs

dans le cas de la compression axiale

$$M_i = \frac{T \cdot J}{\rho} \dots \dots \dots (1)$$

dans le cas de la compression excentrée

$$M_i = J \frac{T}{h} \cdot \Delta \dots \dots \dots (2)$$

moments extérieurs

dans le cas de la compression axiale

$$M_a = P_k \cdot f \dots \dots \dots (3)$$

dans le cas de la compression excentrée

$$M_a = P_k \cdot (p + f) \dots \dots \dots (4)$$

Au moment du flambage la relation existant entre le moment interne  $M_i$  et le moment extérieur  $M_a$  correspond à un état d'équilibre instable. Cette relation d'équilibre ne peut pas être assimilée au cas où on atteint une tension déterminée de la fibre extérieure (limite d'écoulement, résistance à la rupture).

Ce n'est que dans le cas où l'élanement  $\frac{l}{i}$  ne dépasse pas un certain chiffre cri-

tique, dépendant lui-même de la loi de déformation du matériau sollicité à la compression, que le problème de stabilité devient un problème de résistance à l'écrasement.

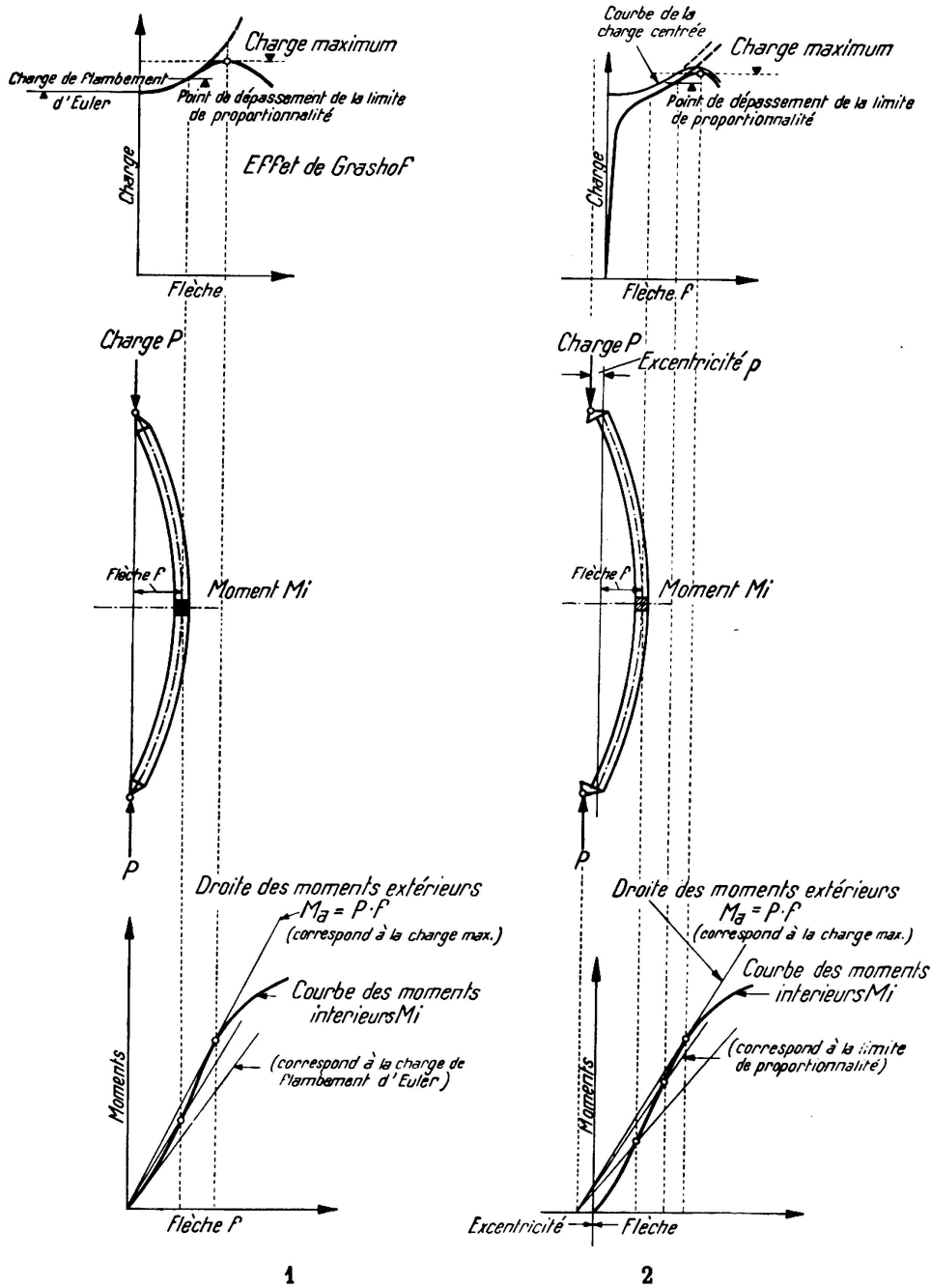


Fig. 1.

Principe du processus de flambement par charge centrée.  
 Prinzip des Knickvorganges bei zentrischer Belastung.  
 Laws governing buckling under a central load.

Fig. 2.

Principe du processus de flambement par charge excentrée.  
 Prinzip des Knickvorganges bei exzentrischer Belastung.  
 Laws governing buckling under a eccentric load.

### III. Compression centrée et excentrée.

Le flambage dû à des forces centrées ne peut avoir lieu que dans des conditions idéales qui ne se réalisent en pratique qu'extraordinairement rarement ; dans la très grande majorité des cas, ces conditions ne sont pas remplies. En réalité, le point d'application des forces est excentrique.

Comme causes d'excentricité on peut citer :

le fait que l'axe de la barre n'est pas, géométriquement parlé, absolument rectiligne (dressage) ;

le fait que la structure du matériau n'est pas partout absolument la même (manque d'homogénéité) ;

le fait que la résistance et les déformations du matériau ne sont pas partout exactement égales (anisotropie) et enfin

le fait qu'il est pratiquement impossible de centrer parfaitement les forces (frottements, encastremets et finalement l'excentricité primaire).

Le problème du flambage par compression excentrée ne peut être mis en doute, il existe de droit.

\*  
\*\*

Les fig. 1 et 2 représentent, à une échelle réduite, les conditions de stabilité, telles qu'elles se présentent pour une barre très élancée, comprimée par des forces centrées et excentrées.

Pour les barres dont l'élancement est le même que celui qu'on rencontre dans la construction, les degrés distingués dans les graphiques :

charge de flambage d'EULER,

effet de GRASHOF,

dépassement de la limite de proportionnalité,

charge maximum

sont très rapprochés et, pratiquement, coïncident. Ceci provient du fait que, dès le début, la limite de proportionnalité est déjà dépassée ou que, lors du fléchissement, succédant à la première phase de stabilité, on ne constate qu'une très faible élévation de la charge critique.

\*  
\*\*

Lors du flambage dû à des charges excentrées, la barre fléchie se trouvera toujours dans une position d'équilibre, à supposer que le matériau dont elle se compose soit absolument élastique ; en réalité, on constate qu'une flèche relativement petite occasionne déjà un état d'équilibre instable.

La théorie du flambage par forces centrées s'appuie directement sur les travaux d'ENGESSER et de v. KÁRMÁN.

Pour le flambage par forces excentrées, M. Roš et J. BRUNNER ont développé une théorie spéciale qui est rappelée brièvement ci-dessous.

La relation (2)  $M_i = \frac{J}{h} T \cdot \Delta$  permet de tracer la courbe des moments internes  $M_i$  pour une tension de base déterminée. L'excentricité critique dépend de

l'élanement de la barre sollicitée par ladite tension de base. On détermine graphiquement cette excentricité en déplaçant la ligne  $M_a$  des moments extérieurs jusqu'au moment où elle est tangente à la courbe  $M_i$ . Le point de contact est le point de stabilité critique ; l'abscisse de ce point représente l'excentricité critique, fig. 3.

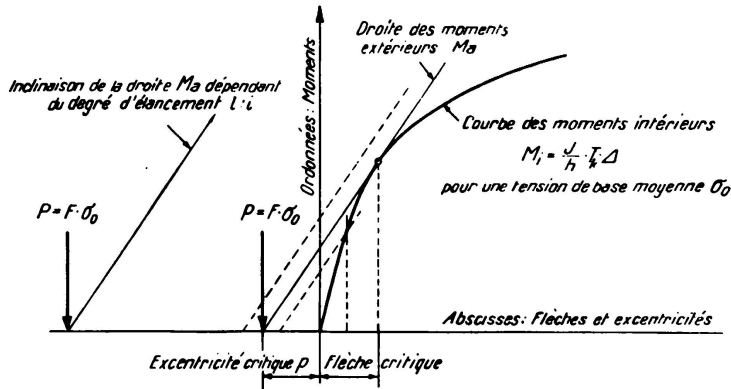


Fig. 3.

La tangente à la courbe des moments intérieurs  $M_i$ , correspondant à une charge et à un degré d'élanement donnés, détermine l'excentricité critique par son intersection avec l'axe des abscisses.

Die Tangente an die Kurve der innern Momente  $M_i$ , entsprechend einer gegebenen Last und einem gegebenen Schlankheitsgrad, bestimmt die kritische Exzentrizität durch ihren Abschnitt auf der Abscissenachse.

The tangent to the curve of internal moments  $M_i$ , corresponding to a given load and a given slenderness ratio, determines the critical eccentricity by its intersection with the abscissae axis.

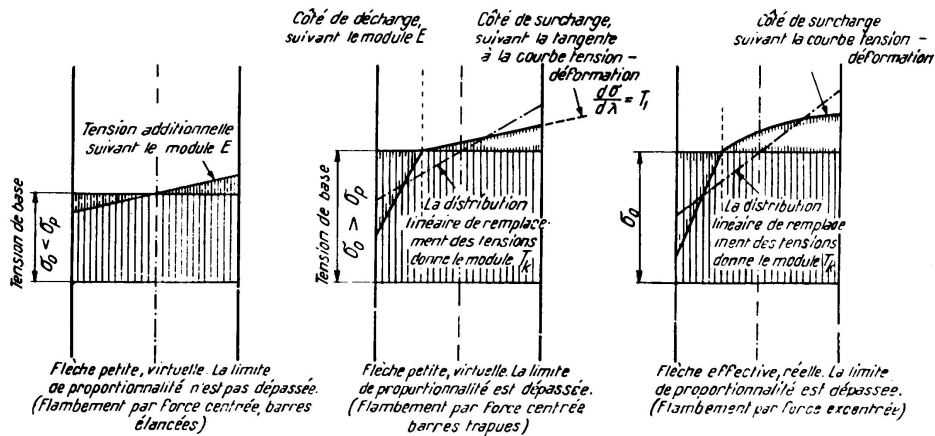


Fig. 4.

Détermination du module  $T_k$  pour le flambage sous charge centrée et excentrée.

Bestimmung des Knickmoduls  $T_k$  für zentrische und exzentrische Last.

Determination of modulus  $T_k$  for buckling under central and eccentric load.

La fig. 4 permet de se rendre compte schématiquement de la détermination du module  $T_k$ . Ce dernier est, pour des fléchissements virtuels infiniment petits (flambage par forces centrées), dépendant de la tension de base et du diagramme tension-déformation du côté chargé et du côté allégé. Pour des fléchissements de grandeur finie, tels qu'ils se produisent lors du flambage par charges excentrées, le module  $T_k$  dépend de la tension initiale uniformément

répartie et de la différence algébrique des allongements  $\Delta$  des fibres extrêmes due à la flexion.

Les précédentes publications du L. F. E. M. contiennent un graphique ayant servi de base pour le calcul des courbes  $M_i$ , fig. 5; et qui illustre la relation entre  $T_k$  et  $\Delta$  pour des tensions initiales de grandeur différente et pour l'acier de construction. Les publications sus-nommées renferment par ailleurs tous les détails intéressant la question.

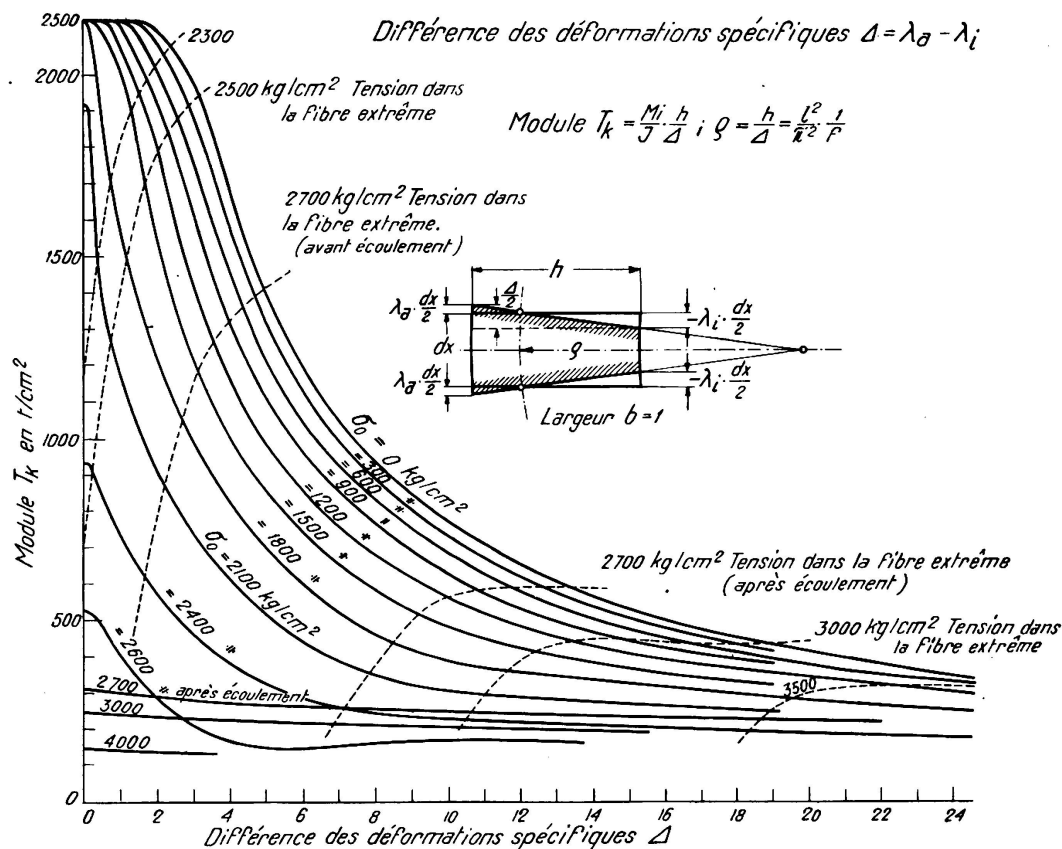


Fig. 5.

Module  $T_k$  en fonction des différences des déformations spécifiques  $\Delta$  en ‰ des fibres extrêmes et de la tension de base.

Modul  $T_k$  als Funktion der Differenz der Randfaserdehnungen und der Grundspannungen in ‰.  
 $T_k$  modulus as a function of the original tension and of the specific deformations differences  $\Delta$  of the outside fibres.

Il faut relever, comme le Prof. E. CHWALLA l'a fait dans le compte rendu du congrès de Vienne, que la manière dont on applique la force, dans le cas du flambage par charges excentrées, joue un rôle au point de vue théorique. On peut appliquer la force axialement et produire le déplacement après coup pour atteindre l'excentricité voulue ou bien faire augmenter la charge déjà excentrée dès le début. On a prouvé par ailleurs, pendant la discussion, que cette différence n'est sensible que pour des barres très trapues qui ne sont, pour ainsi dire, pas utilisées en pratique. Au cours de la même discussion, on a aussi traité à fond la question de l'influence que joue la courbe admise de la barre (sinusoïde) sur les résultats de la charge théorique de flambage et du fléchissement.

## 1) Acier de construction.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$$\begin{array}{ll} \sigma_p = 1,90 \text{ t./cm}^2 & \sigma_f = 2,70 \text{ t./cm}^2 \\ \beta_z = 4,00 \text{ »} & E = 2.150 \text{ »} \end{array}$$

Le rapport publié à l'occasion du 1<sup>er</sup> congrès international de construction des ponts (Zurich, 1926) : « La résistance au flambage des barres articulées aux deux bouts » illustre l'application à l'acier de construction, de la théorie esquissée ci-dessus et relate les essais exécutés pour en confirmer l'exactitude. Nous reproduisons ci-après les courbes permettant de déterminer immédiatement les tensions de flambage pour les degrés d'excentricité  $m = 0$  jusqu'à  $m = 6$  (fig. 6).

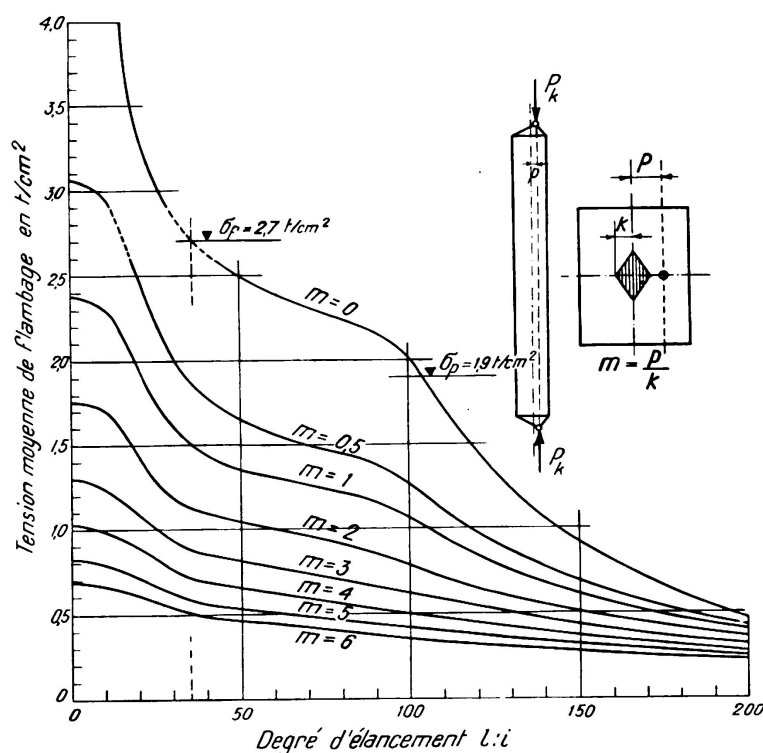


Fig. 6.

Courbes théoriques de flambage pour l'acier de construction. Degrés d'excentricité  $m = 0$  ;  $m = 6$ .

Theoretische Knickspannungskurven für Baustahl. Exzentrizitätsmasse  $m$ .

Theoretical buckling curves for structural steel. Degrees of eccentricity  $m$ .

## 2) Acier de construction au silicium.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$$\begin{array}{ll} \sigma_p = 2,80 \text{ t./cm}^2 & \sigma_f = 3,80 \text{ t./cm}^2 \\ \beta_z = 5,40 \text{ »} & E = 2.070 \text{ »} \end{array}$$

Par la suite, la théorie a été appliquée à l'acier de construction au silicium comme il a été indiqué dans le rapport du congrès de Vienne (1928), intitulé : « Le dimensionnement au flambage des barres comprimées par des forces axiales



et excentrées ». Les courbes théoriques pour  $m = 0, m = 1$  et  $m = 2$  ont été déterminées à l'aide d'une méthode d'approximation. Pour les barres élancées où la tension au flambage  $\sigma_k \leq \sigma_p$ , les courbes de l'acier de construction sont valables du fait que les coefficients d'élasticité sont les mêmes ; pour l'élancement  $\frac{l}{i} = 35$ , la valeur de la tension de flambage augmente proportionnellement aux limites d'écoulement  $\sigma_f$ .

Les valeurs intermédiaires sont déterminées par interpolation (fig. 8).

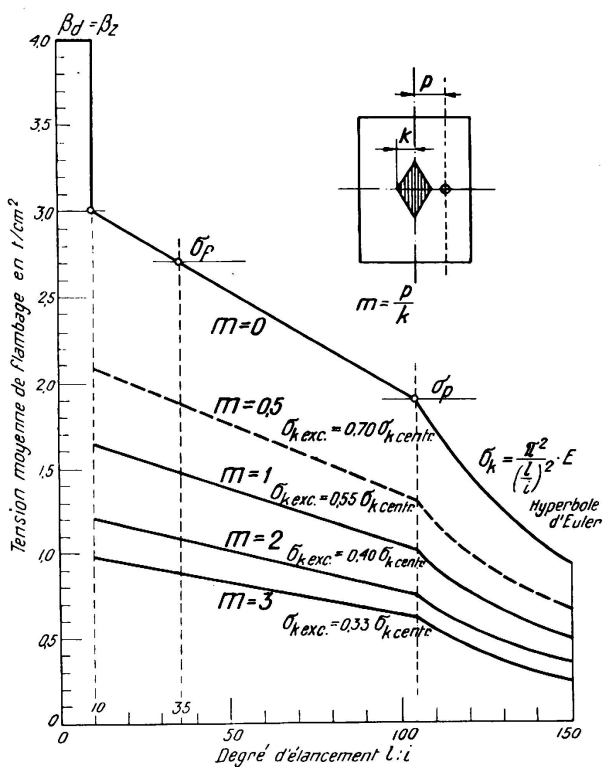


Fig. 7.

Acier de construction. Lignes approximatives des tensions de flambage.  
 Degrés d'excentricité  $m = 0, 0,5, 1,0, 2,0$  et  $3,0$ .  
 Baustahl. Angenäherte Knickspannungslinien.  
 Exzentritätsmasse  $m$ .  
 Structural steel. Approximate buckling tension-lines. Degrees of eccentricity,  $m$ .

pour  $m = \frac{p}{k} = 0,5$  :  $\sigma_{k\text{exc.}} = 0,70 \sigma_{k\text{centr.}}$   
 $m = 1$  : » =  $0,55$  »  
 $m = 2$  : » =  $0,40$  »  
 $m = 3$  : » =  $0,33$  »

(fig. 7).

\*  
\*\*

Le procédé suivant, convenant très bien en pratique, donne une approximation plus grossière mais qui fournit des valeurs utilisables pour les sortes d'aciers les plus différentes : l'hyperbole d'Euler est valable pour  $\sigma_k \leq \sigma_p$  ; on relie par une droite le point  $\sigma_p$  au point  $\sigma_f$  dont l'ordonnée est reportée pour l'élancement  $\frac{l}{i} = 35$ . Cette droite est valable, dans le sens de l'élancement décroissant, jusqu'à  $\frac{l}{i} = 10$  ( $\frac{l}{a} \sim 3$ ). Pour des élancements plus faibles on trace une horizontale d'ordonnée  $\beta_z = \beta_d$  (fig. 7).

En partant des courbes théoriques  $\sigma_k$  (fig. 6) pour le flambage par compression excentrée, on peut calculer, avec une exactitude largement suffisante en pratique, les lignes  $\sigma_k$  pour le flambage par compression excentrée en appliquant les coefficients de réduction suivants :

En vue de la rédaction du présent rapport pour le Congrès des ponts et charpentes de 1932 à Paris, on a appliqué, pendant les années 1929 à 1931, la

théorie du flambage par compression axiale et excentrée aux matériaux de construction les plus différents en se basant sur leurs diagrammes tensions-déformations; en outre, on a exécuté de nombreux contrôles expérimentaux. Les essais exécutés au Laboratoire Fédéral d'Essai des Matériaux comprenaient l'examen de

barres à âme pleine

en acier de construction à haute résistance (Ac 52);

en tubes d'acier pour avions;

en fonte grise;

en métaux légers;

en bois de construction et

en béton armé

de barres à châssis en acier au silicium et de

barres à treillis en acier de construction.

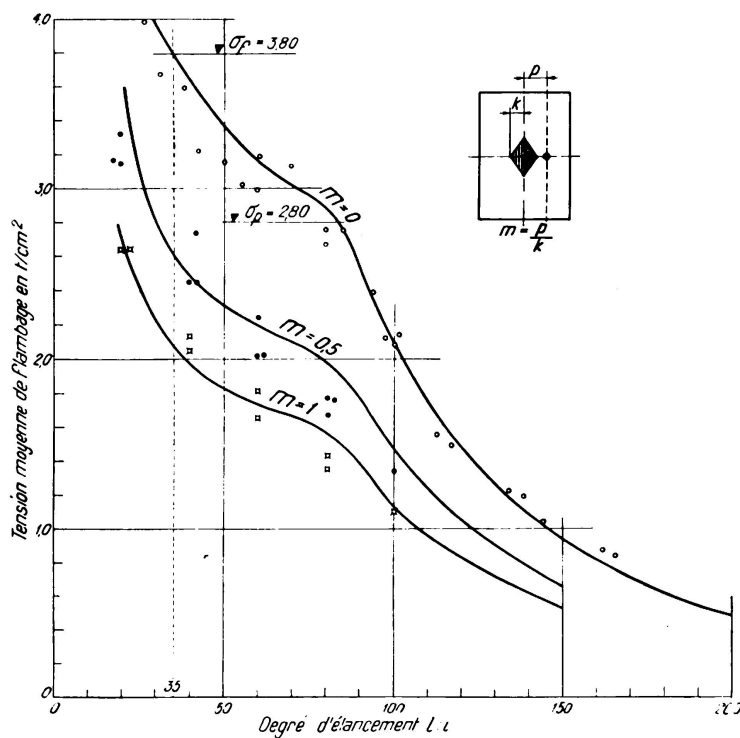


Fig. 8.

Acier de construction au silicium. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité  $m = 0, 0,5$  et  $1,0$ .

Siliziumstahl. Theoretische Knickspannungskurven. Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse  $m$ .

Structural silicon steel. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values. Degrees of eccentricity,  $m$ .

Toutes les barres étaient articulées aux deux bouts de façon à être mobiles dans la direction du plus petit rayon de giration, respectivement de l'excentricité. Le centrage et la mise en place excentrique ont été mis au point géométriquement; les positions furent ensuite vérifiées et corrigées à l'aide de mesures de tensions.

## 3) Acier de construction à haute résistance (Ac 52).

Valeurs de résistance caractérisant le matériau

$$\begin{array}{ll} \sigma_p = 2,9 \text{ t./cm}^2 & \sigma_f = 3,90 \text{ t./cm}^2 \\ \xi_z = 5,8 \text{ } \gg & E = 2.150 \text{ } \gg \end{array}$$

Les essais ont été exécutés sur des barres prélevées sur des profils normaux I P N 20 et P N 30. La fig. 9

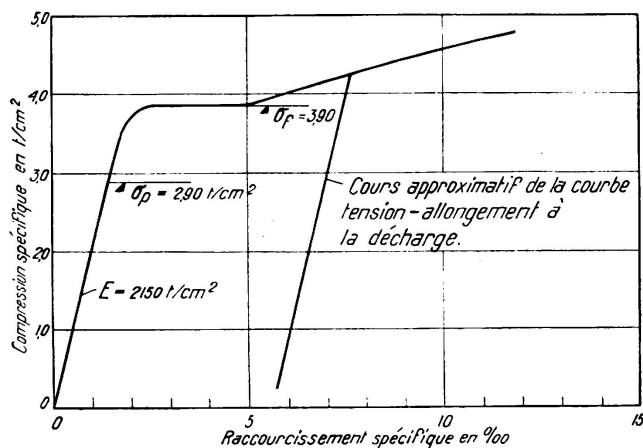


Fig. 9.

Diagramme tension-déformation pour l'acier de construction à hautes résistances. (AC.52).

Spannungs-Dehnungs-Diagramm für hochwertigen Baustahl. (St. 52).

Tension-deformation diagram for high grade structural steel. (St. 52).

montre le diagramme compressions-raccourcissements, tandis que la fig. 10 représente graphiquement les lignes théoriques de tensions au flambage et les valeurs d'essai pour  $m = 0$  (compression centrée) et  $m = 1$  (compression excentrée, agissant sur le périmètre du noyau central). Les résultats d'essais et les courbes théoriques des tensions de flambage présentent une très bonne concordance.

## 4) Tubes en acier pour avions.

Valeurs de résistance caractérisant le matériau :

tubes à l'état de livraison	$\sigma_p = 1,50 \text{ t./cm}^2$	$\sigma_f = 3,9 \text{ t./cm}^2$
	$\xi_z = 5,20 \text{ } \gg$	$E = 1.890 \text{ } \gg$
tubes après traitement thermique	$\sigma_p = 4,37 \text{ } \gg$	$\sigma_f = 5,2 \text{ } \gg$
	$\xi_z = 5,50 \text{ } \gg$	$E = 1.940 \text{ } \gg$

Les essais furent exécutés avec des tubes d'acier étirés, à l'état de livraison et après un traitement thermique approprié. La fig. 11 représente les diagrammes caractéristiques tension-déformation.

Les tubes à l'état de livraison présentent, par rapport à l'acier de construction une limite de proportionnalité très basse ensuite du phénomène de Bauschinger dû à l'étirage

acier de construction	$\sigma_p = 1,90 \text{ t./cm}^2$
tubes à l'état de livraison	$\sigma_p = 1,50 \text{ } \gg$

Par contre, la limite d'écoulement  $\sigma_f = 3,90 \text{ t./cm}^2$  est plus élevée que celle de l'acier de construction  $\sigma_f = 2,70 \text{ t./cm}^2$ . Conformément à ces valeurs d'essai, les points sont groupés plus ou moins près de la courbe du T. K. V. S. B. pour l'acier de construction, tracée là à titre de comparaison.

Grâce au traitement thermique des tubes on a élevé la limite de proportionnalité jusqu'à  $4,37 \text{ t./cm}^2$  et la limite d'écoulement jusqu'à  $5,20 \text{ t./cm}^2$ . En reportant les valeurs d'essais jusqu'à cette haute limite de proportionnalité, on

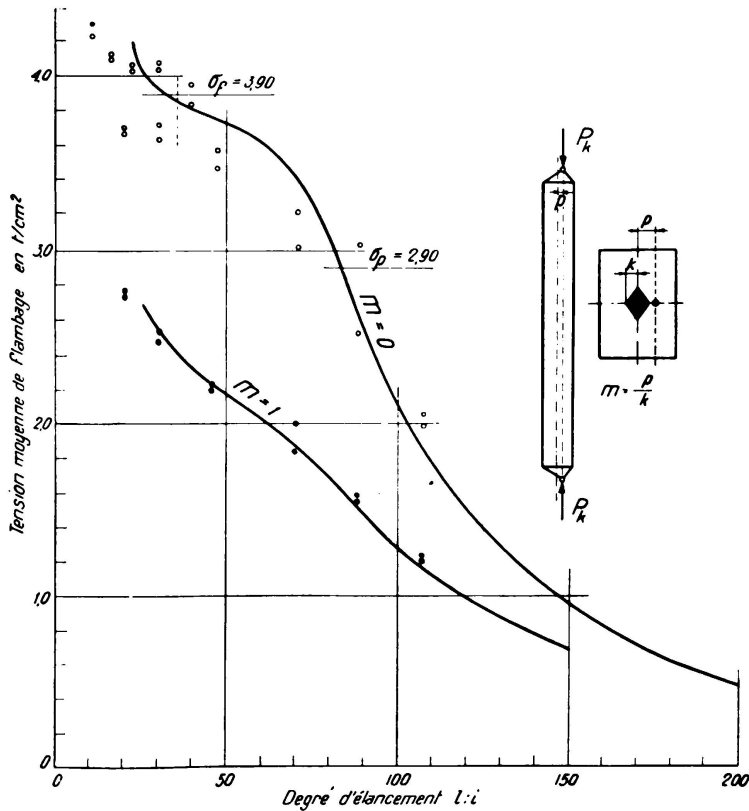


Fig. 10.

Acier de construction à hautes résistances (AC. 52). Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées. Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité :  $m = 0$  et  $m = 1$ .

Hochwertiger Baustahl (St. 52). Theoretische Knickspannungslinien, Versuchswerte, Exzentrizitätsgrade  $m$ .

High grade structural steel (St. 52). Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values. Degrees of eccentricity  $m$ .

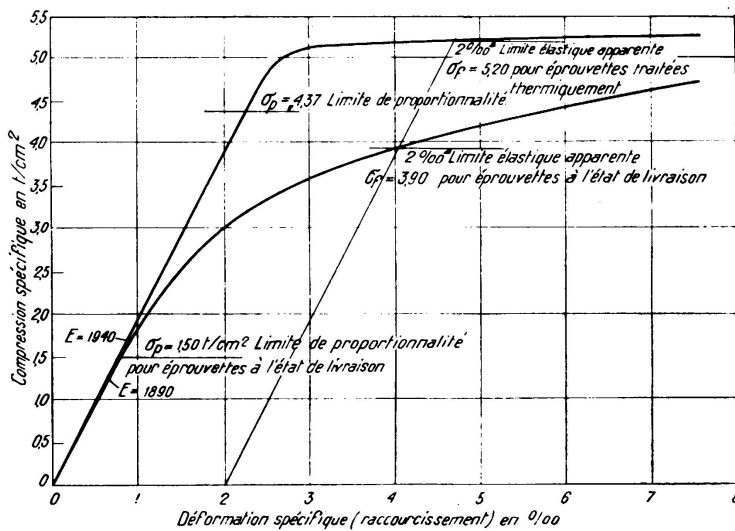


Fig. 11.

Diagrammes tension-déformation pour les tubes en acier.

Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Stahlrohre.

Tension-deformation diagrams for steel tubes.

s'aperçoit que les points ne s'éloignent guère de l'hyperbole d'Euler et qu'ils tendent vers la limite d'écoulement lorsqu'on atteint  $\frac{l}{i} = 35$  (fig. 12 et 13).

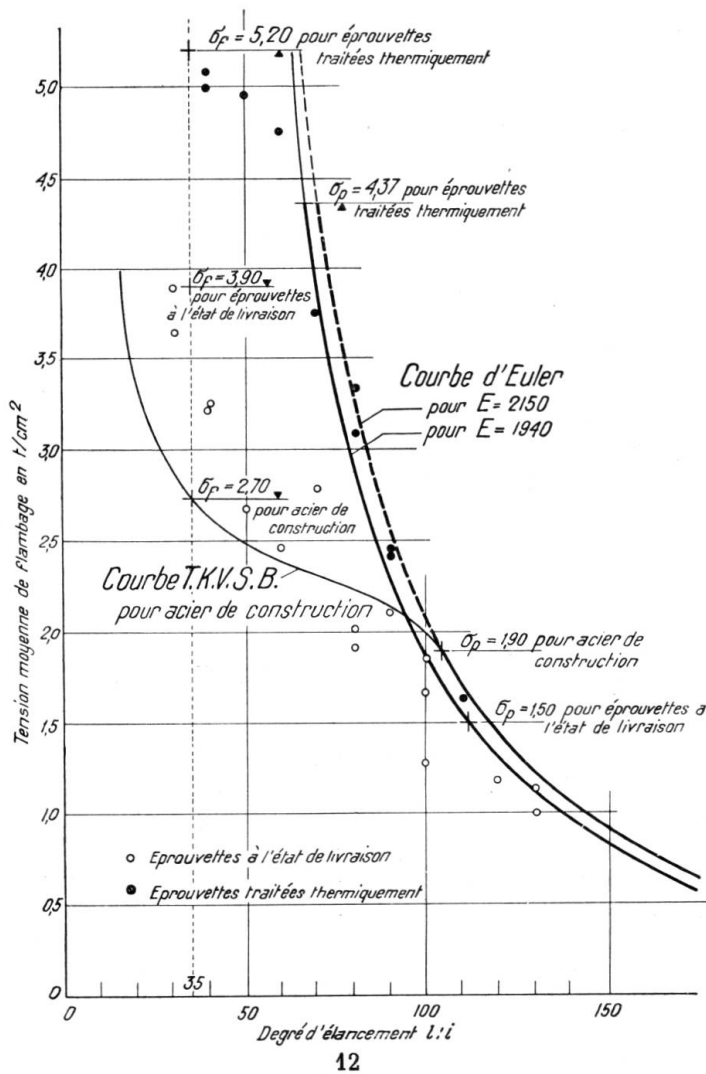


Fig. 12.

Essais de tubes en acier :  
a) Epreuves à l'état de livraison ; b) Epreuves traitées thermiquement.  
Courbes dessinées : Courbe d'Euler et courbes T.K.V.S.B. pour acier de construction.

Versuche mit Stahlrohren :  
a) Stäbe im Anlieferungszustand ; b) Stäbe thermisch behandelt.  
Gezeichnete Kurven : Eulerkurve und T.K.V.S.B. Kurven für Baustahl.

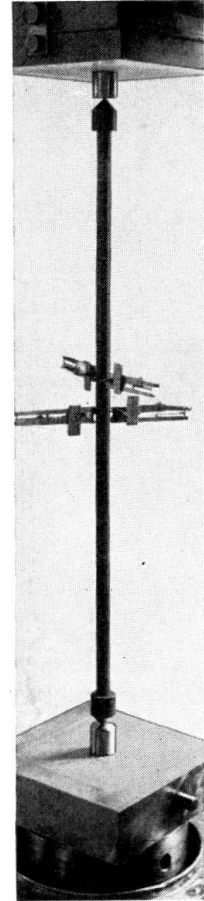
Steel tube tests :  
a) Specimens as received ; b) Specimens thermally treated.  
Curves drawn : Euler curve and T.K.V.S.B. curves for structural steel.

Fig. 13.

Essai de flambage sur un tube en acier. Distance entre les appuis-points 122 cm. Diamètre extérieur 2,8 cm. Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 130$ .

Knickversuch mit Stahlrohr. Spitzenentfernung, Aussendurchmesser, Schlankheitsgrad  $\frac{l}{i}$ .

Buckling test on a steel tube. Distance between bearing points. Outside diameter. Rate of slenderness  $\frac{l}{i}$ .



13

## 5) Fonte grise.

La fonte grise utilisée avait les valeurs de résistance suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_z &= 2,10 \text{ t./cm}^2 \\ \beta_d &= 8,80 \text{ »} & E &= 1.250 \text{ t./cm}^2 \\ \beta_b &= 4,70 \text{ »} \end{aligned}$$

Les essais furent exécutés sur des barres de section rectangulaire dont le diagramme tension-déformation est représenté sur la fig. 14. On peut remarquer

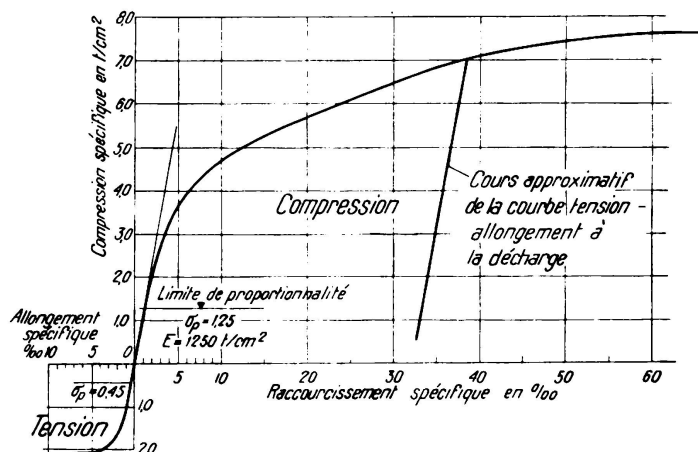


Fig. 14.

Diagramme tension-déformation pour la fonte grise.

Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Gusseisen.

Tension-deformation curve for grey cast iron.

que pour la fonte, le diagramme tension-allongement présente des valeurs très différentes de celles du diagramme compression-raccourcissement, tandis que pour tous les autres métaux examinés, ces deux diagrammes peuvent être considérés comme semblables dans la zone qui entre en considération. Cette particularité se répercute aussi sur la forme des lignes théoriques des tensions au flambage. Les valeurs d'essais pour  $m = 0$  (compression centrée) ;  $m = 1$  (point d'application de la force au bord du noyau) ;  $m = 3$  (point d'application de la force à une distance égale à 3 fois la grandeur du noyau), sont groupées aux abords immédiats de la ligne théorique des tensions (fig. 15 et 16).

## 6) Métaux légers.

Duraluminium, avional et anticorodal.

Valeurs de résistances caractérisant les matériaux :

Duraluminium et avional

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 1,80 \text{ t./cm}^2 & \beta_z &= 4,20 \text{ t./cm}^2 \\ E &= 730 \text{ »} \end{aligned}$$

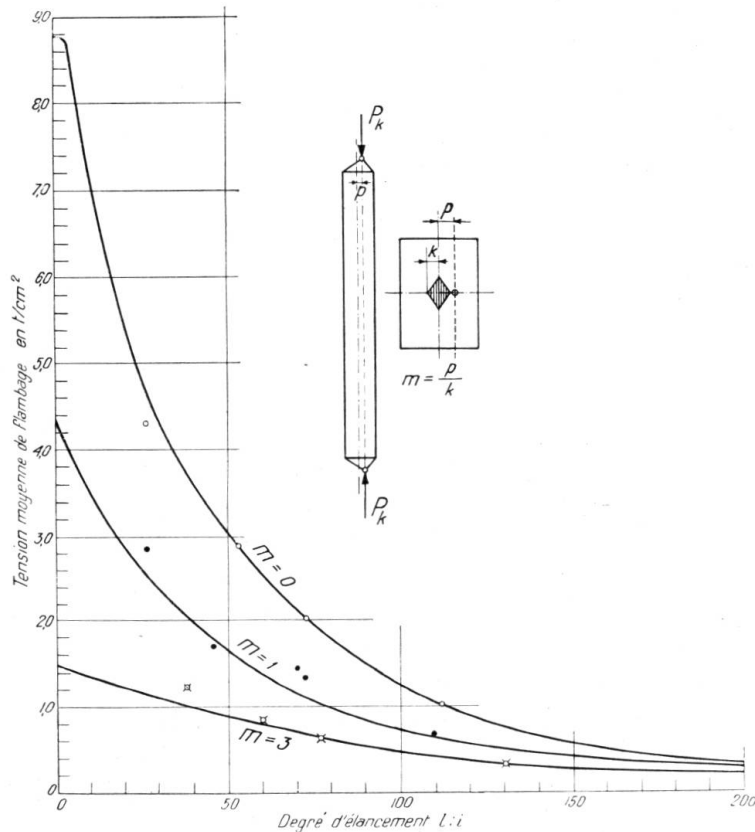
Anticorodal

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 2,1 \text{ t./cm}^2 & \beta_z &= 4,30 \text{ t./cm}^2 \end{aligned}$$

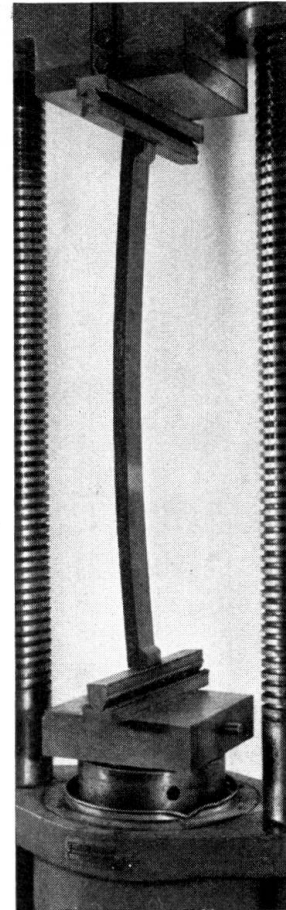
On a exécuté un grand nombre d'essais sur des barres de section rectangulaire et de section circulaire ainsi que sur des tuyaux. Les diagrammes ten-

sion-déformation pour le duraluminium et l'avional ne présentent que des différences peu importantes, tandis que les valeurs pour l'anticorodal sont un peu plus élevées (fig. 17).

La longueur des barres destinées aux essais de flambage varie de 140 à 2.040 mm., leur diamètre extérieur de 10 à 86 mm. et l'épaisseur de leur paroi de 1 à 4 mm.



15



16

Fig. 15.

Fonte grise. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées.  
Valeurs d'essais. Degrés d'excentricité :  $m = 0, 1, 0$  et  $3, 0$ .

Gusseisen. Theoretische Knickspannungslinien, Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse  $m$ .

Grey cast iron. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads. Test values.  
Degrees of eccentricity  $m$ .

Fig. 16.

Essai de flambage sur une barre de fonte grise. Distance entre les appuis à couteau 105 cm.

Degré d'élancement  $\frac{l}{i} = 132$ , degré d'excentricité  $m = 3$ .

Knickversuch mit einem Gusseisenstab. Spitzenentfernung, Schlankheitsgrad  $\frac{l}{i}$ .

Exzentrizitätsmasse  $m$ .

Buckling test on a grey cast iron bar. Distance between knife-edge supports. Rate of slenderness.  
Degree of eccentricity,  $m$ .

La fig. 18 représente graphiquement la ligne théorique des tensions de flambage pour la compression axiale ainsi que les valeurs d'essais correspondantes.

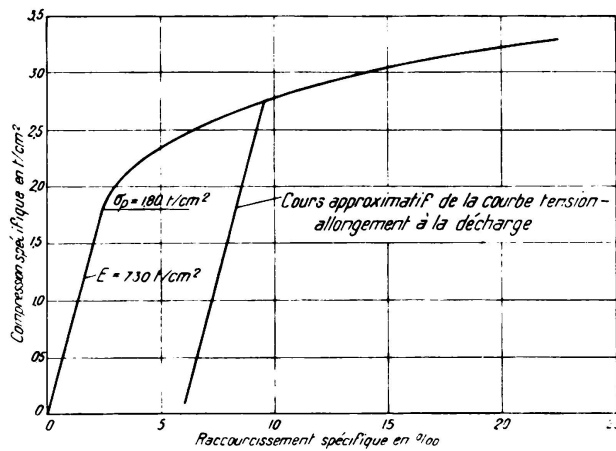


Fig. 17.

Diagramme tension-déformation pour métaux légers.  
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Leichtmetalle.  
Tension-deformation diagram for light metals.

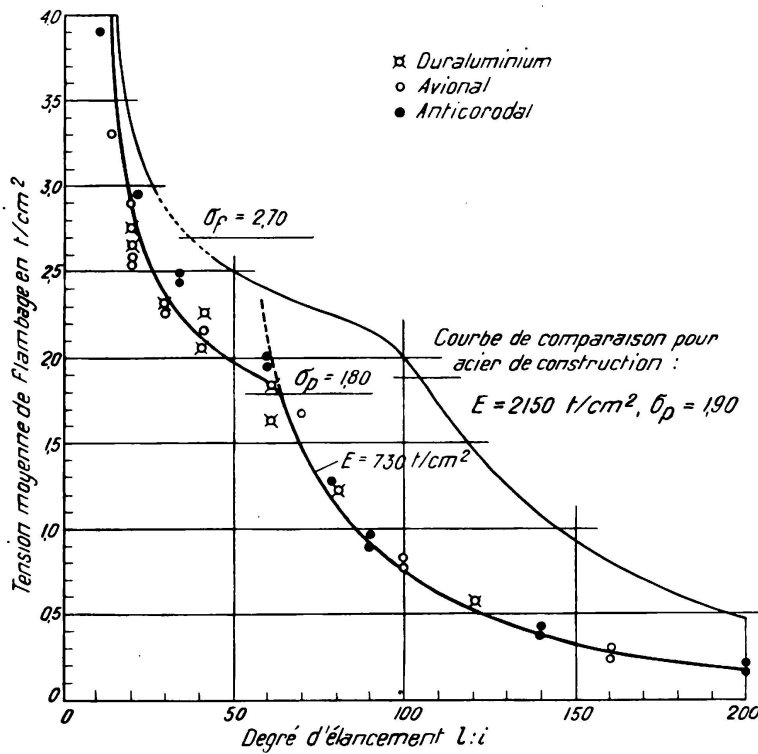


Fig. 18.

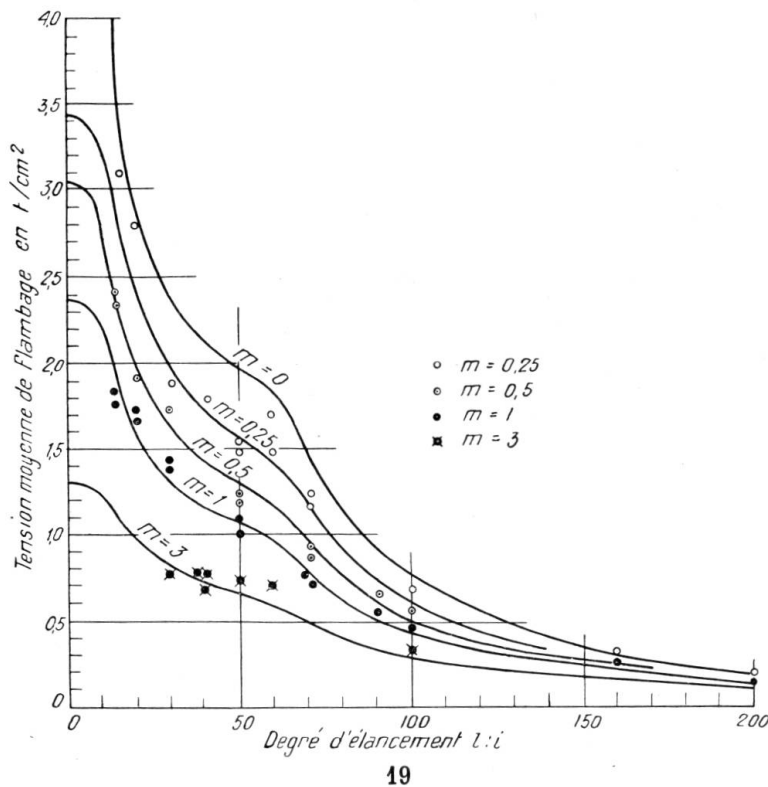
Métaux légers. Courbes théoriques de flambage pour charge centrée. Valeurs d'essais.  
Leichtmetalle. Theoretische Knickspannungskurven für zentrische Last. Versuchswerte.  
Light metals. Theoretical buckling curves for central load. Test values.

Les 22 valeurs d'essai des barres de duraluminium et d'avional sont très proches de la ligne théorique des tensions de flambage. Par contre, les 14 valeurs d'essai pour les barres d'anticorodal sont situées, dans la zone plastique, un peu



plus haut, conformément au diagramme compression-raccourcissement déterminé pour ce matériau.

Relativement à la ligne des tensions de flambage, on peut remarquer les particularités suivantes : jusqu'à la tension de flambage  $\sigma_k = \sigma_p$  (en moyenne 1,80 t./cm<sup>2</sup>), on obtient une ligne correspondant à l'hyperbole d'Euler mais



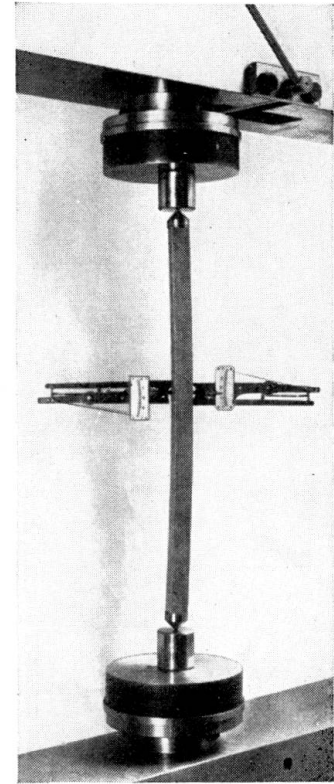
19

Fig. 19.

Métaux légers. Courbes théoriques pour charges excentrées. Valeurs d'essais.  
Degrés d'excentricité  $m = 0,25$  0,5 1,0 et 3,0.

Leichtmetalle. Theoretische Knickspannungskurven für exzentrische Last.  
Versuchswerte. Exzentritätsmasse.

Light metals. Theoretical buckling curves for eccentric loads.  
Test values. Rates of eccentricity  $m$ .



20

Fig. 20.

Essai de flambage sur une barre d'anticorodal à section carrée de 2 cm. d'arête. Distance entre les appuis-pointes 46 cm. Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 80$ . Charge de flambage  $P = 5,0$  t.

Knickversuch mit einem Anticorodalstab. Viereckiger Querschnitt. Spitzenentfernung, Schlankheitsgrad, Knicklast.

Buckling test on an « anticorodal » bar, 2 cm square. Distance between bearing points. Rate of slenderness. Buckling load.

tracée en se basant sur un coefficient d'élasticité de 730 t./cm<sup>2</sup>. De ce fait, la force de flambage des barres dont l'élanement  $\frac{l}{i} > 100$  est environ 3 fois plus faible que celle des barres d'acier de construction, de qualité normale, pour

lesquels  $E = 2.150 \text{ t./cm}^2$ ; lorsque l'élanement s'abaisse, la courbe des tensions de flambage des métaux légers se rapproche de celle de l'acier de construction et atteint presque cette dernière lorsque l'élanement est très faible.

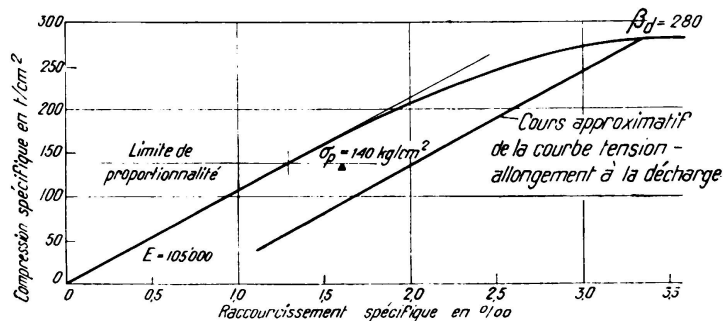


Fig. 21.

Diagramme tension-déformation pour le bois de construction.  
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Bauholz.  
Tension-deformation diagram for timber.

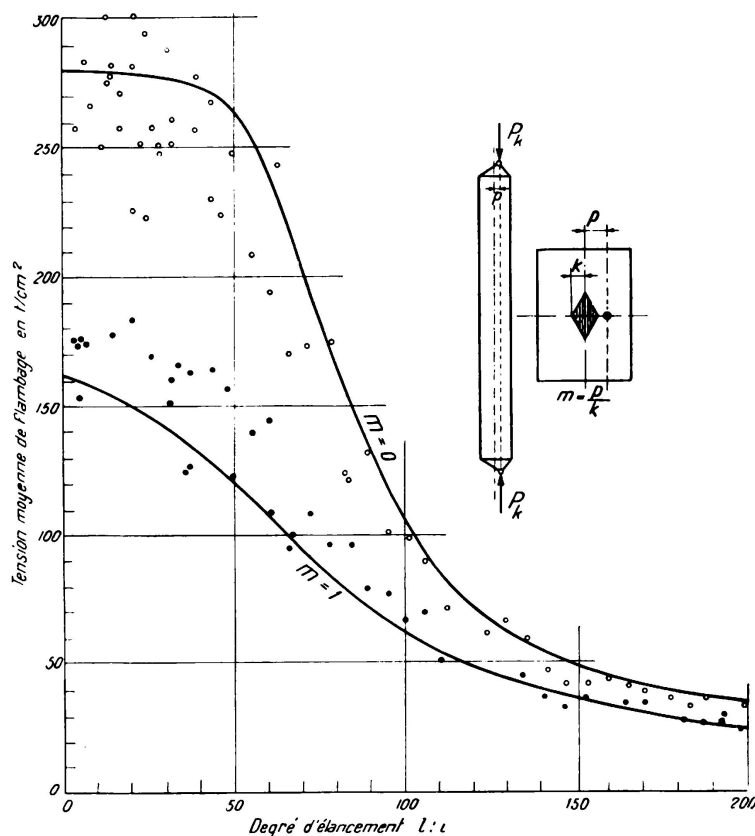


Fig. 22.

Bois de construction. Courbes théoriques de flambage pour charges centrées et excentrées.  
Valeurs d'essais. Degré d'excentricité  $m = 0$  et  $m = 1$ .

Bauholz. Theoretische Knickspannungskurven. Versuchswerte. Exzentrizitätsmasse  $m$ .  
Timber. Theoretical buckling curves for central and eccentric loads.  
Test values. Degrees of eccentricity  $m$ .

On a exécuté, en outre, un grand nombre d'essais avec les excentricités suivantes :  $m = 0,25, 0,5, 1,0$  et  $3,0$ . Les courbes théoriques ont été établies par

approximation en réduisant les valeurs trouvées pour le flambage par force centrée. On a utilisé pour la réduction les rapports déterminés à l'aide des courbes pour l'acier de construction. Les résultats d'essai montrent que ces facteurs de réduction permettent de déterminer aussi pour les métaux légers, des valeurs parfaitement utilisables en pratique (fig. 19 et 20).

### 7) Bois de construction (sapin blanc).

Valeurs de résistance caractérisant le matériau :

$$\sigma_p = 140 \text{ kg./cm}^2$$

$$\beta_z = 600$$

$$E_d = 105.000 \text{ kg./cm}^2.$$

$$\beta_d = 280 \text{ kg./cm}^2$$

$$\beta_b = 450 \text{ »}$$

Il était aisé de concevoir l'application de la théorie développée ci-dessus au

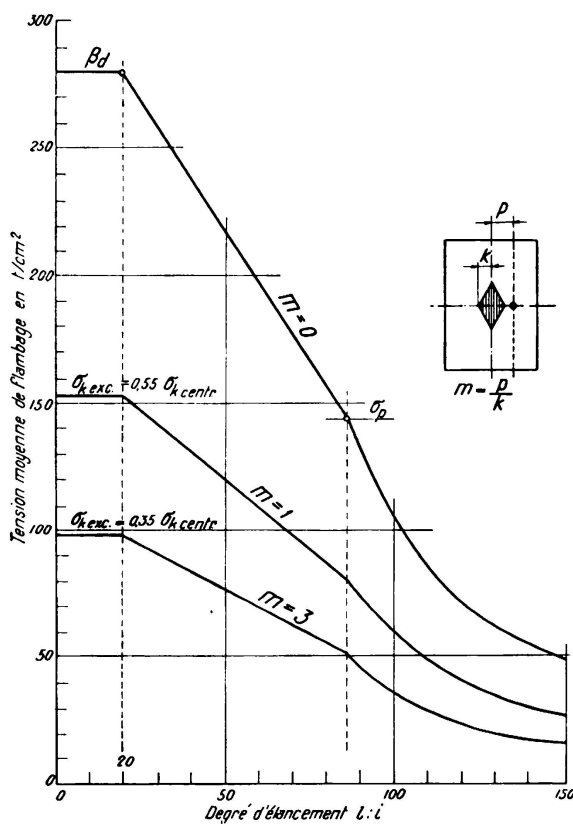


Fig. 23.

Bois de construction. Lignes approximatives de tension de flambage. Degré d'excentricité  $m = 0, 1, 0$  et  $3, 0$ .

l'auholz. Angenäherte Knickspannungslinien, Exzentrizitätsmasse.

Timber. Approximate buckling tension lines. Degrees of eccentricity  $m$ .

calcul du bois de construction. Dans ce but on a exécuté environ 90 essais de flambage sur des poutres de bois, toutes prélevées d'un seul gros tronc afin qu'elles soient de même qualité. La fig. 21 représente le diagramme compression-raccourcissement, la fig. 22 la ligne théorique des tensions de flambage ainsi que les valeurs d'essais pour  $m = 0$  et  $m = 1$ .

Pour le calcul de la résistance au flambage des bois de construction dont on connaît la résistance à la compression des prismes debout  $\beta_d$ , la limite de proportionnalité  $\sigma_p$  et le coefficient d'élasticité  $E$  (valable jusqu'à  $\sigma_p$ ), on peut utiliser la méthode d'approximation suivante qui fournit des valeurs satisfaisantes pour les tensions de flambage.

Tant que la tension de flambage  $\sigma_k$  ne dépasse pas la limite de proportionnalité  $\sigma_p$ , l'hyperbole d'Euler est valable

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E.$$

A partir de la limite de proportionnalité  $\sigma_p$ , la ligne des tensions de flambage se réduit à une droite qui relie le point  $\sigma_p$  au point  $\beta_d$  dont l'ordonnée est reportée pour l'élanement  $\frac{l}{i} = 20$  ( $\frac{l}{b} = 6$ ). Le choix d'un élanement critique  $\frac{l}{i} = 20$  est justifié du fait que les poutres de bois plus trapues n'accusent aucune différence sensible de la résistance à la compression  $\beta_d$  (fig. 23).

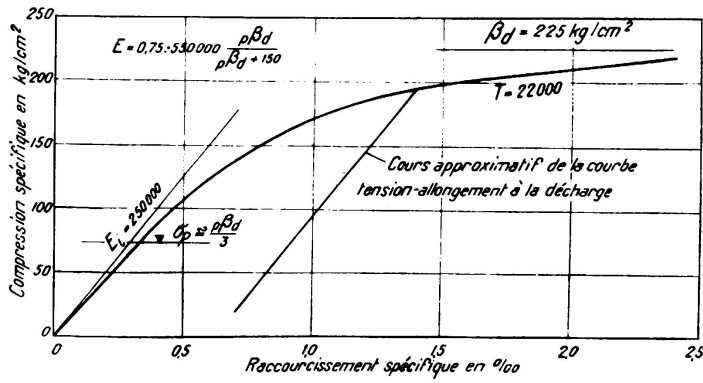


Fig. 24.

Diagramme tension-déformation pour le béton.  
Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Beton.  
Tension-deformation diagram for concrete.

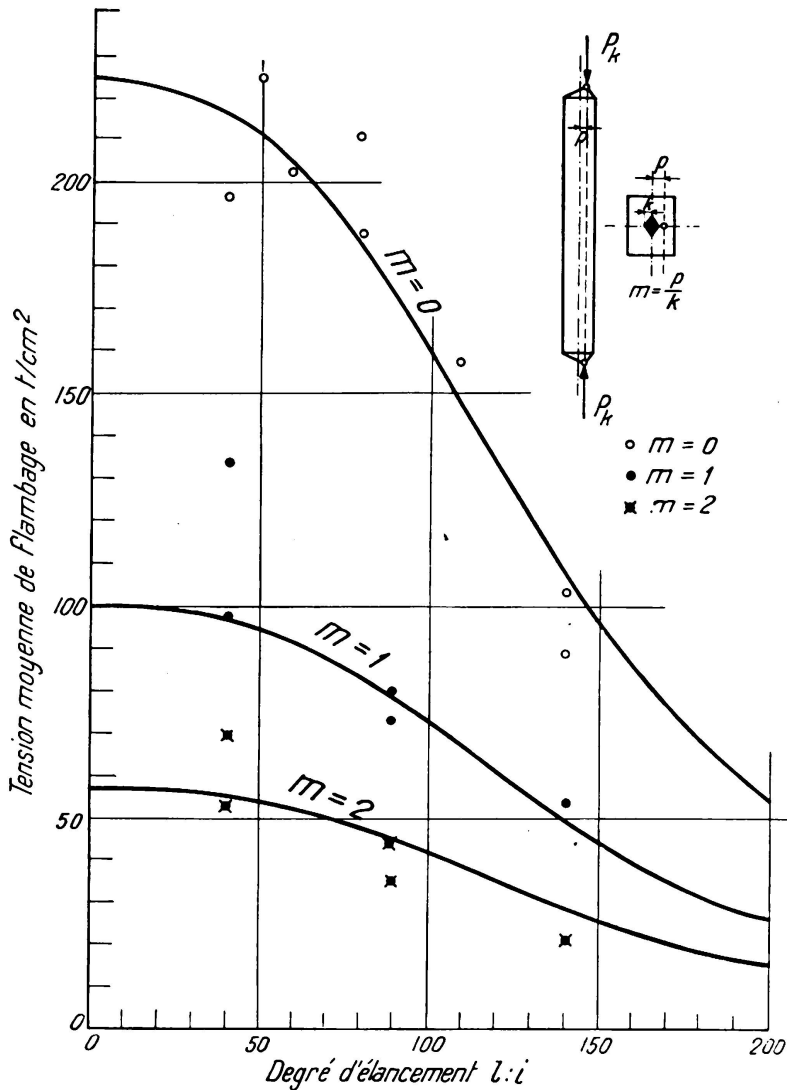


Fig. 25.

Courbes théoriques de flambage du béton armé.  
Résistance à la compression sur prisme  $p\beta_d = 225 \text{ kg/cm}^2$ , Pourcentage d'armature 1 %.  
Theoretische Knickspannungslinien für armierten Beton.  
Prismendruckfestigkeit — Armierungsgrad.  
Theoretical buckling curves for reinforced concrete. Crushing strength on prism.  
Percentage of reinforcement.

C'est dans le domaine intéressant spécialement la pratique, c'est-à-dire dans le cas de barres trapues ou d'élanement moyen ( $\frac{l}{i} < 100$ ), que la chute des tensions pour le flambage par compression centrée, par suite de l'excentricité du point d'application, est la plus considérable. Elle est en moyenne de 45% pour  $m = 1$  et de 65% pour  $m = 3$ . Les relations suivantes assurent une exactitude suffisante pour le calcul des constructions dans le cas de flambage par compression excentrée :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } m = 1 & \sigma_k \text{ excentr.} = 0,55 \sigma_k \text{ axial} \\ \text{pour } m = 3 & \sigma_k \text{ excentr.} = 0,35 \sigma_k \text{ axial.} \end{array} \quad (\text{fig. 23}).$$

Pour les barres très élancées ( $\frac{l}{i} > 100$ ), l'influence de l'excentricité devient de plus en plus faible (fig. 23).

### 8) Béton armé.

Chiffres caractérisant la composition et la résistance du béton :

dosage en ciment 300 kg./m<sup>3</sup>, consistance plastique ( $H_2O = 7,5\%$ ) ;

résistance des prismes debout à la compression  $p_{\beta_d} = 225 \text{ kg./cm}^2$  ;

$E_{el} = 330.000 \text{ kg./cm}^2$  ;

pourcentage d'armature  $\sim 1\%$ .

La figure 24 représente le diagramme compression-raccourcissement, tandis que la fig. 25 donne une image des courbes théoriques de tension au flambage pour

$m = 0$ , compression axiale ;

$m = 1$ , point d'application de la force sur le périmètre du noyau ;

$m = 2$ , point d'application de la force à une distance de deux fois la grandeur du noyau.

Les 18 valeurs d'essais sont aussi reportées sur la fig. 25 après réduction effectuée en admettant une seule résistance à la compression des prismes debout  $p_{\beta_d} = 225 \text{ kg./cm}^2$ . La concordance entre les valeurs théoriques et expérimentales est très satisfaisante.

Il apparaît nettement que l'excentricité du point d'application de la force, dépendant aussi du pourcentage d'armature, diminue de façon très sensible la stabilité au flambage.

La méthode suivante est à conseiller en pratique pour l'établissement des lignes de tensions de flambage.

La formule d'Euler reste valable pour les élancements où la tension au centre de gravité ne dépasse pas  $\sigma = \frac{p_{\beta_d}}{3} \sim \sigma_p$  (à peu près la limite de proportionnalité)

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E.$$

Si la détermination du coefficient d'élasticité n'a pas lieu expérimentale-

ment, on peut en calculer la valeur, avec une exactitude suffisante, à l'aide de la relation

$$E_{kg.}/cm^2 = 0,75 \times 550.000 \cdot \frac{p\beta_d}{p\beta_d + 150}$$

Le coefficient 0,75 a pour but de tenir compte des déformations permanentes qui apparaissent, même si la tension à la compression ne dépasse pas  $\frac{p\beta_d}{3}$ .

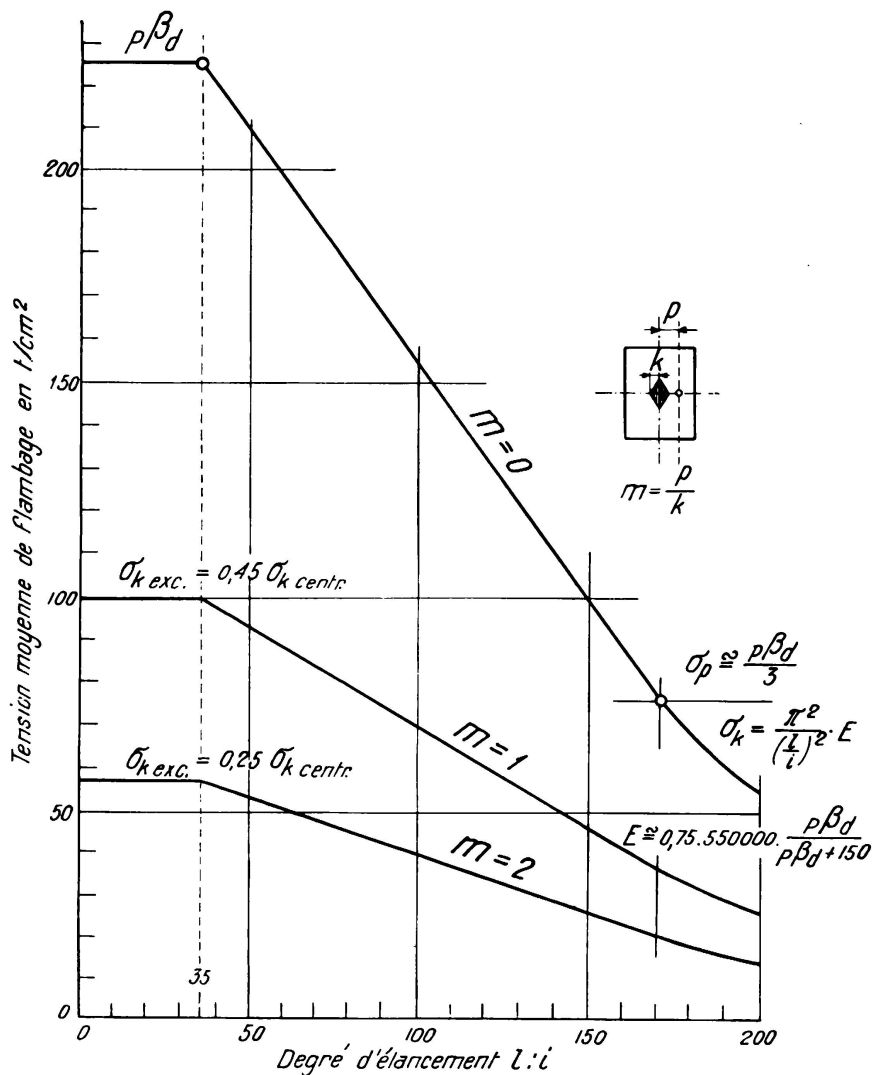


Fig. 26.

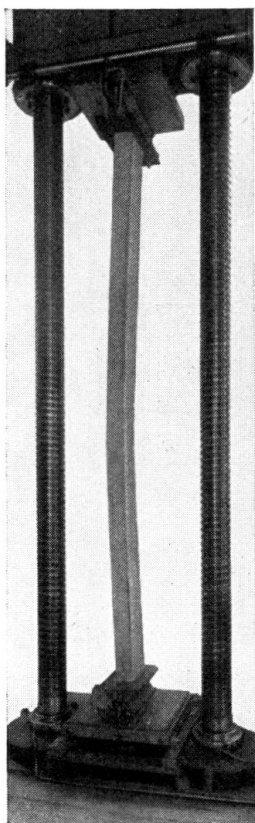
Béton armé. Lignes approximatives de tension de flambage. Degré d'excentricité  $m = 0, 1, 0$  et  $2, 0$ .  
 Armierter Beton. Angenäherte Knickspannungslinien. Exzentrizitätsmasse.  
 Reinforced concrete. Approximate buckling tension lines. Degrees of eccentricity,  $m$ .

Le point répondant à l'ordonnée  $\sigma_p \left( \sigma_p \sim \frac{p\beta_d}{3} \right)$  est relié par une droite à un second point dont l'ordonnée est  $p\beta_d$  et l'abscisse  $\frac{l}{i} = 35$  (correspondant à  $\frac{l}{a} = 10$ ).

Si l'élanement  $\frac{l}{i}$  est plus petit que 35, la résistance à la compression des prismes debout  $p_{\beta_d}$  est valable.

Si on a des forces excentrées parallèles à l'axe de la barre, on réduit les lignes  $\sigma_k$  pour la compression axiale dans les proportions suivantes :

excentricité	$m = 1$	$\sigma_k \text{ excentr.} = 0,45 \sigma_k \text{ axial}$
	$m = 2$	$\sigma_k \text{ excentr.} = 0,25 \sigma_k \text{ axial}$ (fig. 26, 27, 28 et 29).



27



28

Fig. 27.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 3,30 m.

Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 114$ , degré d'excentricité  $m = 0$ .

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidenerntfernung. Schlankheitsgrad, Exzentritätsmasse  $m = 0$ .

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.

Fig. 28.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 6,60 m.

Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 142$ , degré d'excentricité  $m = 1$ .

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidenerntfernung, Schlankheitsgrad, Exzentritätsmass.

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.

#### IV. Flambage dans le cas d'une charge transversale invariable agissant au milieu de la barre.

Les éléments de construction ayant à supporter, en plus d'une charge axiale de flambage, une force latérale agissant en leur milieu ont des rapports communs avec les barres sollicitées par des forces excentrées, aussi bien au point de vue théorique (calcul) qu'au point de vue pratique (construction).

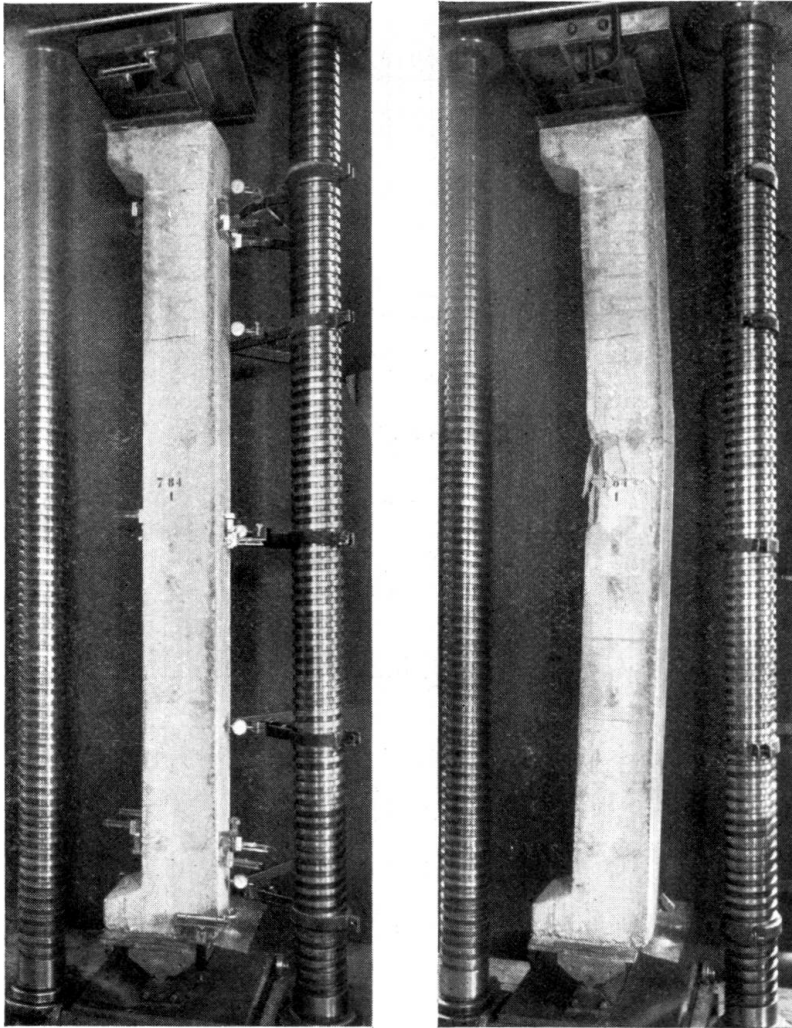


Fig. 29.

Essai de flambage sur une barre de béton armé. Distance entre les appuis à couteau 3,00 m.

Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 42$ . Degré d'excentricité  $m = 1$ .

Knickversuch mit armiertem Betonbalken. Schneidentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on a reinforced concrete bar. Distance between knife-edge supports, Slenderness ratio, degree of eccentricity.

Notre rapport, présenté au Congrès de Vienne, contient un tableau graphique calculé pour l'acier de construction et vérifié expérimentalement. Ce graphique permet de lire immédiatement les valeurs déterminantes des



charges de flambage avec force latérale, en pourcent des charges de flambage sans force latérale (fig. 30).

D'une façon générale on peut déterminer la charge portante au flambage des barres, chargées transversalement en leur milieu par une force  $H$ , à l'aide du graphique établi pour les barres comprimées par des charges excentrées (fig. 6). Cette manière de faire, tout en ne donnant que des valeurs approximatives, présente une exactitude suffisante dans la plupart des cas pratiques.

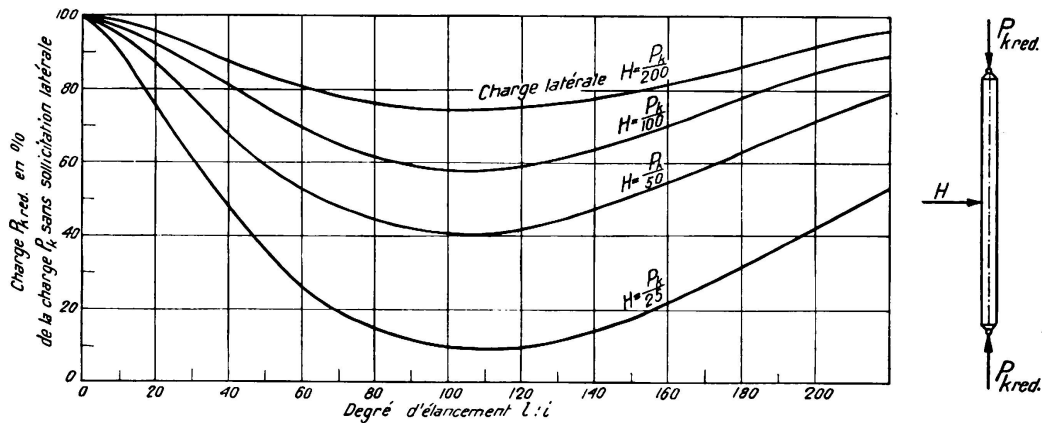


Fig. 30.

Courbes représentant la diminution de la force de flambage par suite d'une charge transversale: Acier de construction voir fig. 6.

Kurven der Knickkraft-Abminderung durch Seitenlast. Baustahl.

Curves showing decrease in buckling strength owing to a transverse load. Structural steel.

L'excentricité ( $p$ ) du point d'application de la force est donnée par la relation

$$p = \frac{M}{P_{k \text{ red}}} = \frac{H \frac{l}{4}}{P_{k \text{ red}}} \dots \dots \dots (7)$$

Par tâtonnements on recherche, pour un élanement déterminé, la concordance entre  $P_{k \text{ red}}$  et  $m = \frac{P}{k}$ . De cette manière il est possible de déterminer la diminution de la charge au flambage des barres comprimées axialement et sollicitées latéralement par rapport à la charge au flambage des barres comprimées axialement, mais sans sollicitation transversale.

La même méthode d'approximation est applicable aux barres comprimées par une charge excentrée, parallèle à l'axe de la barre et sollicitée simultanément par une force transversale agissant en son milieu.

### V. Flambage des barres à axe de courbure continue.

Tout en étant certain d'une exactitude suffisante, on peut traiter et calculer les barres courbes, sans tension initiale, comme des barres comprimées par une charge parallèle à l'axe de celles-ci. On introduit dans le calcul l'excentricité  $p = e$ , respect.  $p = e + p_1$  (fig. 31).

### VI. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique et la direction du flambage perpendiculaire au plan de la force.

Supposons une barre comprimée par une force excentrique située sur un des axes principaux de la section. La force portante subira une diminution, non seulement dans cette direction de flambage, mais encore dans la direction de flambage perpendiculaire au plan de la force si certains éléments de la section

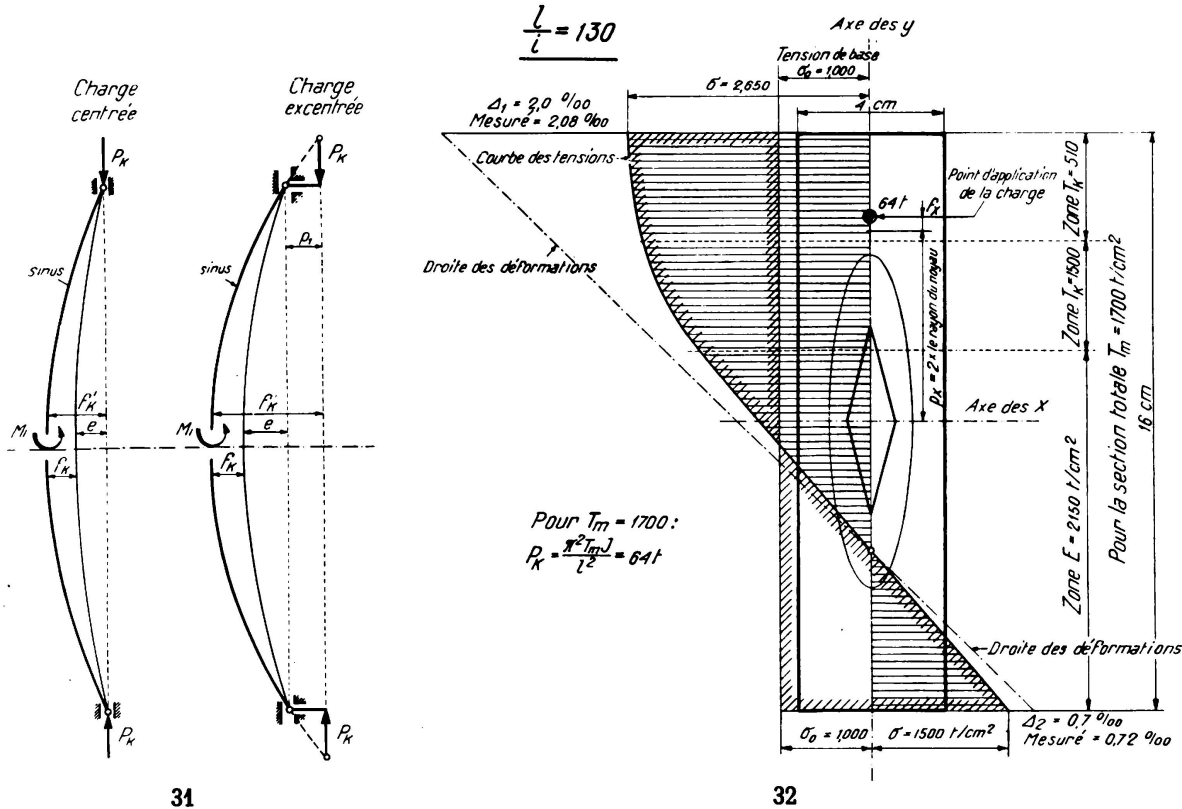


Fig. 31.

Barres d'axe courbe. — Stäbe mit gekrümmter Achse. — Bars with curved axis.

Fig. 32.

Flambage sous charge excentrée, direction du flambage perpendiculaire au plan de la charge. Répartition des tensions pour la charge de flambage évaluée à  $P_K = 64 t.$ ; charge déterminée au moyen du module  $T_K = 1700 :$   $P_K = 64 t.$  (Conforme à l'évaluation.) charge de flambage mesurée (essai)  $P_K = 60 t.$

Knicken bei exzentrischem Lastangriff, Knickrichtung winkelrecht zur Lastebene. Spannungsverteilung für die geschätzte Last, gemessene Knicklast.

Buckling under eccentric load; direction of buckling perpendicular to load plane. Distribution of tensions for buckling load estimated; buckling load measured at tests.

sont sollicités au-dessus de la limite de proportionnalité par le moment dû à l'excentricité initiale et à la flèche. Le module de flambage de ces zones subit de ce fait une diminution.

La détermination de la force de flambage se fait à l'aide de la répartition effective des tensions dans la section flambée. La fig. 32 représente une répartition semblable des tensions et la variation du module de flambage dans les différentes zones. Le tableau I qui suit rassemble les valeurs des forces de flambage obtenues lors d'une série d'essais dans lesquels le flambage a toujours eu lieu perpendiculairement à la direction de l'excentricité.

Tableau 1.

Flambage perpendiculaire au plan de la force. Section : rectangle de  $40 \times 160$  mm.

Forces de flambage							
élançement $\frac{l}{i} = 63$				élançement $\frac{l}{i} = 130$			
$m_x = 0$	$m_x = 1$	$m_x = 2$	$m_x = 3$	$m_x = 0$	$m_x = 1$	$m_x = 2$	$m_x = 3$
132 t	102	73	—	83 t	—	60	51

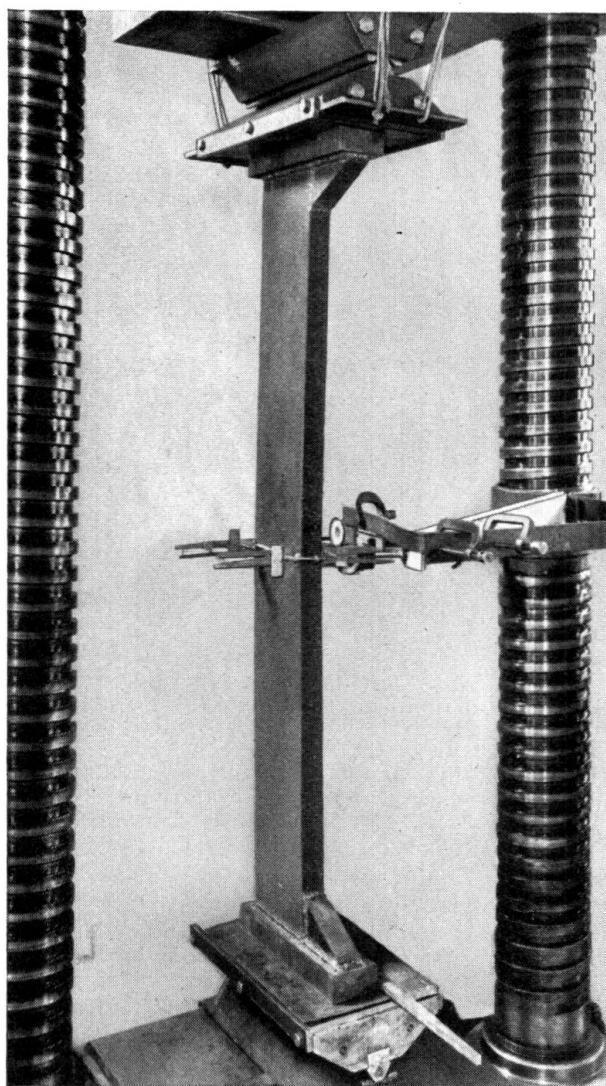


Fig. 33.

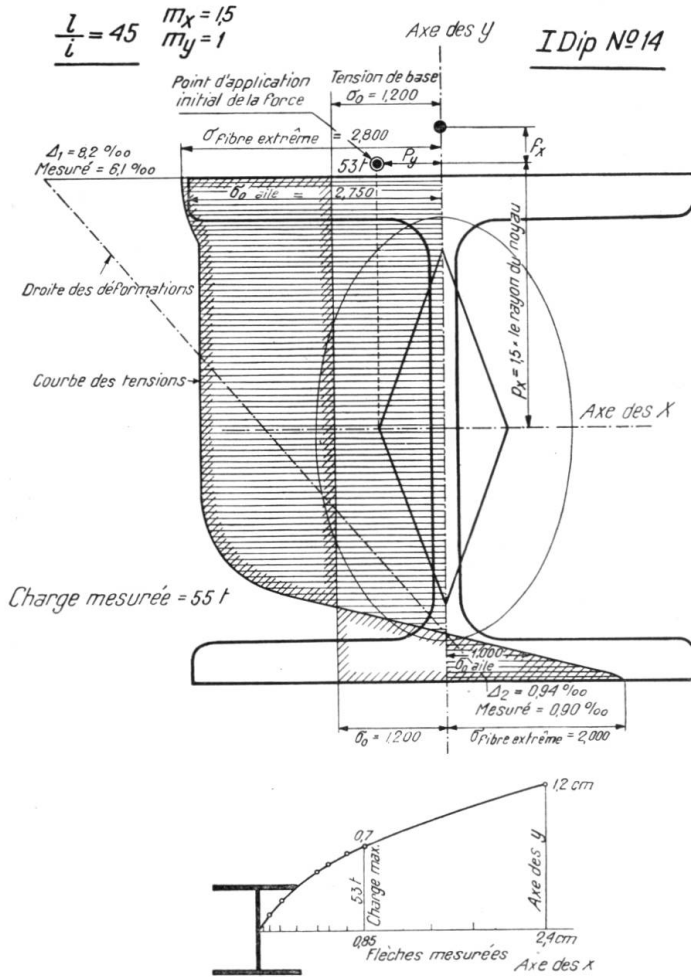
Essai de flambage sur une barre rectangulaire  $16 \times 4$  cm.Distance entre les appuis à couteau 1,52 m  $\frac{l}{i_y} = 130$ ,  $m_x = 2$ ,  $m_y = 0$ .

Knickversuch mit Rechteckeisen. Schneidentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on rectangular bar. Distance between knifeedge supports, Slenderness ratio, degree of eccentricity.

**VII. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.**

Lorsqu'une barre est comprimée excentriquement par rapport aux deux axes principaux, il n'est pas admissible d'examiner d'abord sa sécurité au flam-



34

Fig. 34.

Flambage sous charge excentrée par rapport aux 2 axes principaux. Répartition des tensions pour la charge de flambage évaluée :  $P_K = 53 t$ . Charge de flambage mesurée (essai)  $P_K = 55 t$ .

Knicken bei nach beiden Hauptachsen exzentrischem Lastangriff. Spannungsverteilung für die geschätzte Last, gemessene Last.

Buckling under eccentric load with reference to the two main axes. Distribution of tensions for buckling load estimated. Buckling load measured at test.

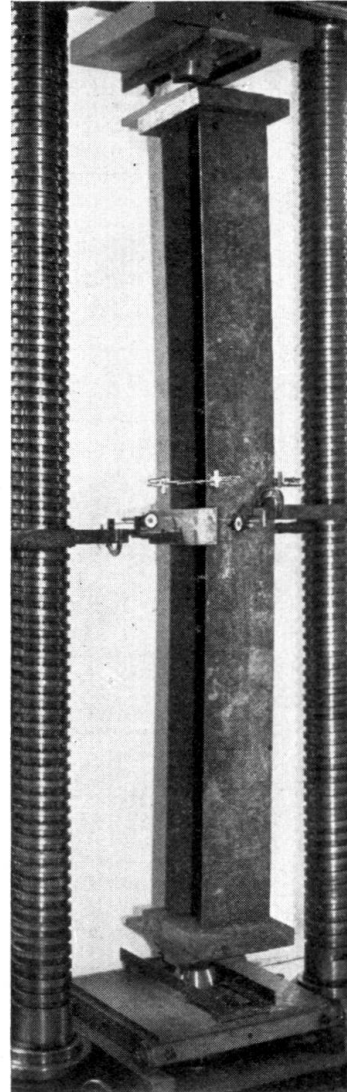
Fig. 35.

Essai de flambage sur un I Diff. N° 22. Distance entre les appuis-pointes 2,38 m

$$\frac{l}{i} = 50, m_x = 1, m_y = 1.$$

Knickversuch mit I Diff. N° 22. Schneidenerntfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on a I Diff. N° 22. Distance between knife-edge supports. Slenderness ratio, degree of eccentricity.



35

bage par rapport à un des axes puis ensuite par rapport à l'autre, du fait que les deux excentricités s'influencent réciproquement.

Lors des essais, le flambage s'est produit essentiellement dans la direction perpendiculaire à l'axe  $y$ . La force de flambage est, d'autre part, influencée

Tableau 2.

Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.

Noyaux et points d'application de la charge				
	$m_x=0$ $m_y=0$	$m_x=0$ $m_y=1$	$m_x=1$ $m_y=1$	$m_x=1,5$ $m_y=1$
Degré d'élanement $\frac{l}{i} = 45$				
Force au flambage mesurée. I Dip. N° 14	120	79	63	55 t
Tension de flambage moyenne	2,72	1,78	1,43	1,25 t/cm <sup>2</sup>
‰	100	66	52	40
Degré d'élanement $\frac{l}{i} = 50$				
Force au flambage mesurée. I. Diff. N° 22	203	117	100	88
Tension de flambage moyenne	2,50	1,41	1,21	1,07
‰	100	57	49	43
Degré d'élanement $\frac{l}{i} = 60$				
Force au flambage mesurée. I Diff. N° 18	110	84	73	64
Tension de flambage moyenne	2,35	1,40	1,22	1,06
‰	100	60	52	46
Degré d'élanement $\frac{l}{i} = 80$				
Force au flambage mesurée. I Dip. N° 14	94	58	47	43
Tension de flambage moyenne	2,13	1,31	1,06	0,97
‰	100	61	50	46

aussi par l'excentricité dans la direction de l'axe des  $x$  lorsque certains éléments de la section sont sollicités en dessus de la limite de proportionnalité. Le matériau possède donc dans ces zones un autre module de flambage. On peut voir sur la fig. 34 la répartition d'une de ces tensions dans un profil en  $\mathbf{I}$ . Par tâtonnements on détermine la stabilité.

Le tableau 2 résume les résultats au flambage, obtenus avec des barres à  $\mathbf{I}$ , dont les élancements atteignaient 45, 50, 60 et 80, c'est-à-dire appartenaient au domaine intéressant spécialement la pratique. Le tableau donne les valeurs des tensions au flambage par charges axiales ainsi que la diminution produite par trois excentricités différentes. Cette diminution est aussi notée en % de telle façon qu'on peut, par interpolation, déterminer des valeurs directement utilisables dans les bureaux de construction, en tenant compte d'un coefficient de sécurité  $n$ .

### VIII. Profils asymétriques. Influence de la forme de la section.

La tension de flambage est, avant tout, fonction de l'élancement  $\frac{l}{i}$ . Dans les cas extrêmes, il peut cependant arriver qu'il faille exécuter des calculs précis, c'est alors que la théorie, aussi bien que les essais, montrent clairement que la forme de la section, quoique n'étant pas déterminante, joue cependant un rôle (fig. 36).

La fig. 37 représente les essais avec des poutrelles à T. Sous une charge axiale, le fer à T flambe du côté de la semelle avec une tension de flambage plus faible qu'un profil rectangulaire de même élancement. Si on oblige la poutrelle à flamber du côté de l'âme, on remarque au contraire que la tension de flambage est plus élevée que celle du profil rectangulaire.

Si la charge est excentrée —  $m = 0,5$  et  $m = 1$  — il est à noter qu'on doit déterminer l'excentricité relative, c'est-à-dire le degré d'excentricité  $m$ , à l'aide du rayon du noyau inversé (rayon opposé au point d'application de la force). Les résultats sont reportés sur la fig. 37; ils permettent de se rendre compte qu'il y a bonne concordance entre théorie et essais.

On a observé que les charges au flambage des profils symétriques en forme de  $\mathbf{I}$  sont un peu plus faibles que celles des profils rectangulaires; cette différence est sans grande importance au point de vue pratique.

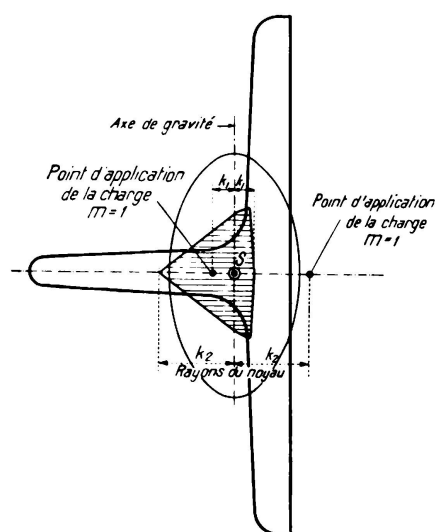


Fig. 36.

Noyau, rayons du noyau et ellipse d'inertie. Points d'application de la charge correspondant aux rayons inversés du noyau.

Kern, Kernweiten und Trägheitsellipse. Druckmittelpunkte mit den verschränkt gemessenen Kernweiten.

Core, core radii and inertia ellipse. Points of application of load corresponding to inversed core radii.

### IX. Calcul des barres à treillis et à châssis.

Pour calculer les assemblages des barres comprimées — diagonales, montants, tôles de liaison — il faut connaître la grandeur de l'effort tranchant au flambage. Cette dernière est donnée par la formule

$$Q_{\max} = P_k \cdot f_k \cdot \frac{\sqrt{v}}{l}. \quad (8)$$

$Q_{\max}$  dépend donc de la valeur du fléchissement  $f_k$  qu'on introduit dans la formule. Dans le cas d'une charge centrée, le fléchissement  $f_k$  est théorique

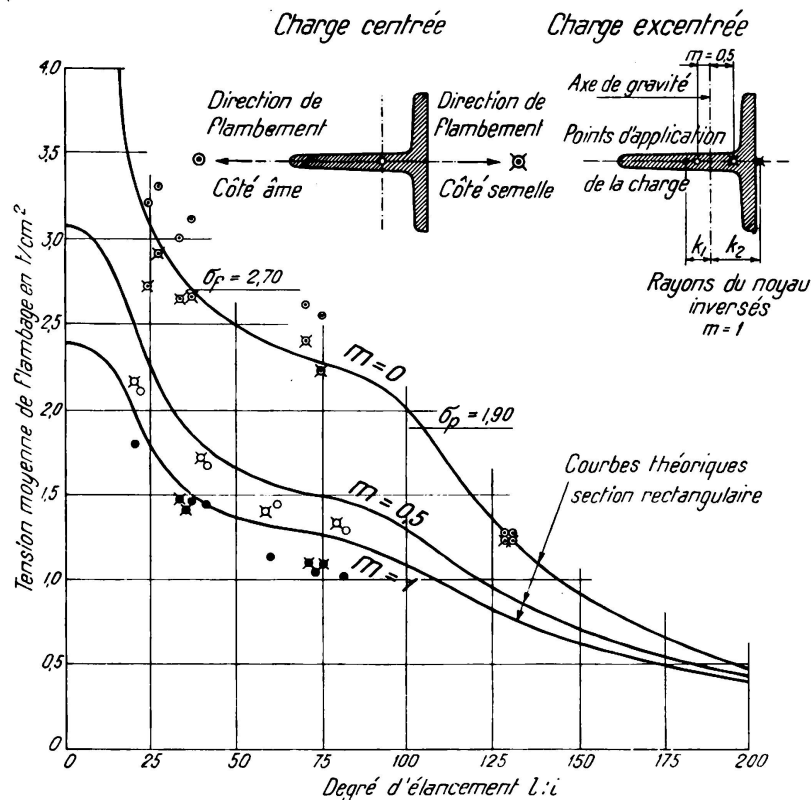


Fig. 37.

Influence de la forme de la section. Profils dissymétriques. Essais avec charges centrées, flambement : libre du côté de la semelle et contraint du côté de l'âme.

Essais avec charges excentrées du côté de l'âme et du côté de la semelle.

Degrés d'excentricité  $m = 0,5$  et  $m = 1,0$ .

Einfluss der Querschnittsform. Unsymmetrische Profile. Versuche mit exzentrischer Last.

Knickrichtungen : frei nach der Flanschseite und erzwungen nach der Stegseite.

Versuche mit exzentrischer Last nach der Stegseite und nach der Flanschseite. Exzentrizitätsmasse.

Influence of section shape. Unsymmetrical profiles. Tests with central loads; buckling :

free on the flange side and constrained on the web side. Tests with eccentric loads, both web and flange. Degrees of eccentricity.

ment égal à zéro. Si l'on admet par contre certaines excentricités  $p$ , on peut recourir à la méthode du T.K.V.S.B. pour déterminer la flèche critique  $f_k$  de la force de flambage  $P_k$ .

En tenant compte de diverses excentricités, on forme les produits  $P_k \cdot f_k$ , nécessaires à la détermination de l'effort tranchant. Lorsque l'excentricité croît, la force de flambage diminue et le fléchissement augmente ; on s'aperçoit qu'à

partir du degré d'excentricité  $m = 0,25$ , les produits  $P_k \cdot f_k$  atteignent une valeur à peu près constante qui fournit le point d'appui désiré pour les calculs.

Pour rendre l'application de la méthode indépendante de la section, on divise l'expression, qui donne la valeur de l'effort tranchant, par la section  $F$  de la barre, de façon à obtenir le quotient

$$\frac{P_k \cdot f_k \cdot \pi}{l \cdot F} = \frac{Q}{F} \quad (9)$$

Si on reporte graphiquement ce quotient en fonction de l'excentricité et de l'élanement, on s'aperçoit qu'il ne varie pas beaucoup, même quand excentricité et élanement varient dans de larges limites (fig. 38).

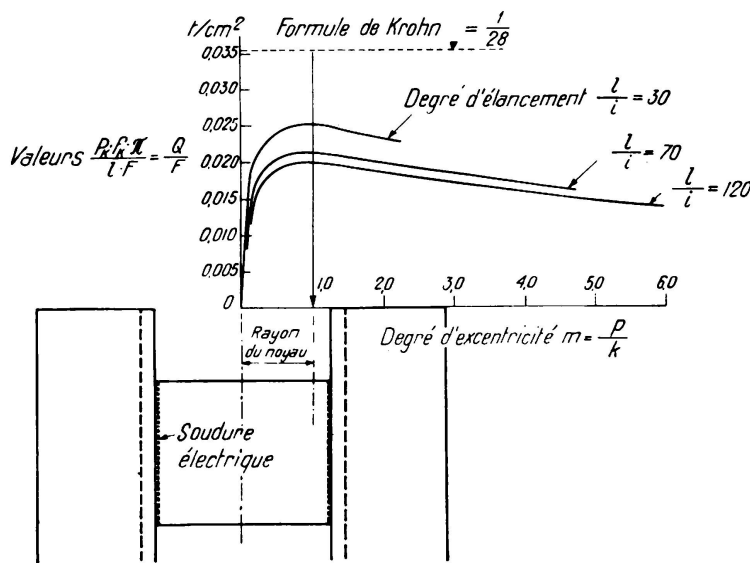


Fig. 38.

Valeurs  $\frac{Q}{F}$  pour différents degrés d'élanement et d'excentricité. — Acier de construction.

Werte  $\frac{Q}{F}$  für verschiedene Schlankheitsgrade und verschiedene Excentrizitäten — Baustahl.

$\frac{Q}{F}$  values for various slenderness ratios and degrees of eccentricity. Structural steel.

Si l'on reporte sur le graphique la valeur de la formule de Krohn  $Q = \frac{F}{28}$ , le quotient  $\frac{Q}{F} = \frac{1}{28} = 0,035$  t/cm<sup>2</sup> se trouve être une droite parallèle aux abscisses. Quoique la formule de Krohn donne des valeurs trop élevées et que les déductions sur lesquelles elle se base ne soient pas à l'abri de toute critique, elle touche le fond même du problème.

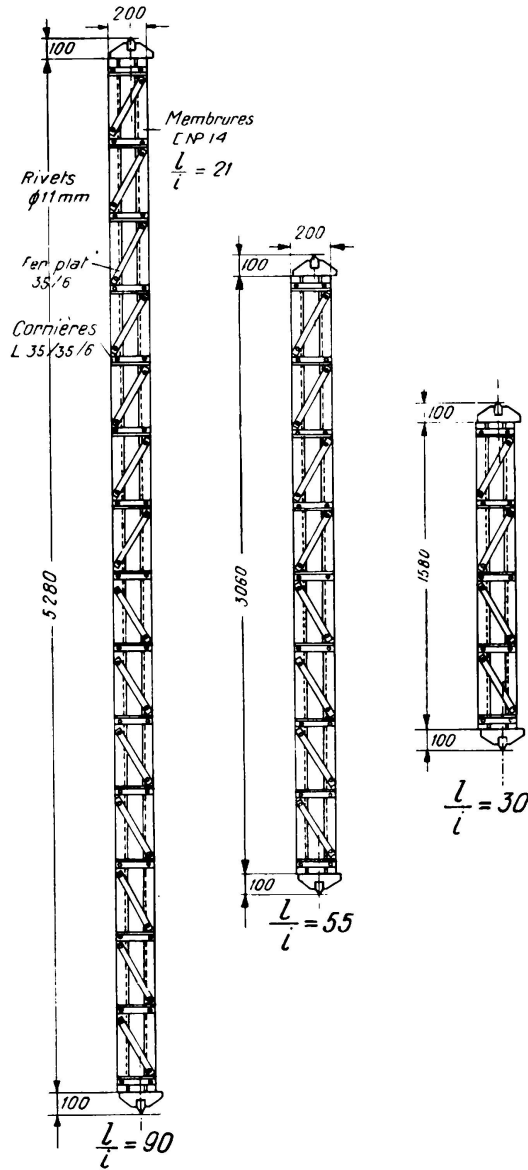
Une fois l'effort tranchant trouvé, on sait que la force de cisaillement pour une barre à âme pleine répond à la formule

$$T = \frac{Q \cdot S}{J} \cdot l$$

où  $l$  = longueur d'un panneau.



Supposons qu'on ait un profil à treillis composé de deux fers à U ; on peut poser pour la valeur  $\frac{S}{J}$  le quotient  $\frac{l}{h}$ , dans lequel  $h$  représente la distance



Degré d'élanement $\frac{l}{i}$	90	55	30
Charge de Flambage théorique $m^2 \cdot t$	47 t	55 t	66 t
Charge de Flambage mesurée $m^2 \cdot t$	42,5	59,5	68,2
Flèche théorique	4,0 cm	1,95 cm	0,90 cm
Flèche mesurée	4,9	2,15	0,94
Tension théorique dans la diagonale extrême	0,73 t/cm <sup>2</sup>	0,80 t/cm <sup>2</sup>	0,90 t/cm <sup>2</sup>
Tension mesurée dans la diagonale extrême	0,60	0,65	0,65

Fig. 39

Barres à treillis. Degrés d'élanement  $\frac{l}{i} = 30, 55$  et  $90$ .

Gitterstäbe. Schlankheitsgrade  $\frac{l}{i}$ . — Lattice bars. Rates of slenderness  $\frac{l}{i}$ .

des centres de gravité des deux profils. On obtient, après ce remplacement

$$T = Q \cdot \frac{l}{h}$$

L'effort dans une diagonale est donné par

$$D = \frac{T}{\cos \alpha}; \alpha = \text{angle que forme la diagonale avec la membrure.}$$

Si la barre est assemblée par des tôles de liaison, l'effort de cisaillement  $T$  crée un moment

$$M = T \cdot \frac{h_0}{2}; h_0 = \text{écartement des rivets (resp. des lignes de soudures) des tôles de liaison.}$$

Lors de ces calculs, on suppose que les membrures sont très rigides par rapport aux tôles de liaison, c'est-à-dire que les tôles sont maintenues parallèles le long de leur intersection avec les membrures.

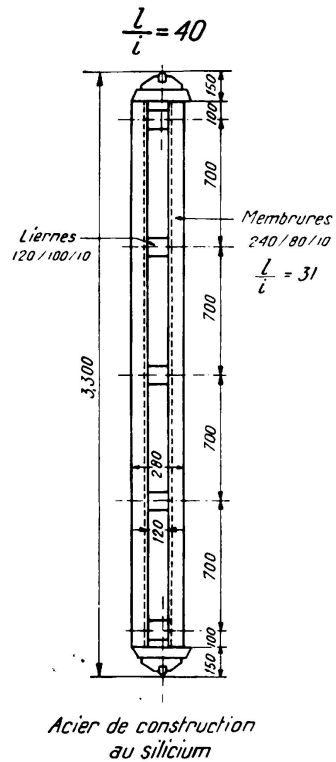
Nous renvoyons à la fig. 3 pour l'examen détaillé de la détermination du fléchissement. Le graphique indique aussi la flèche critique  $f_k$  au point critique de stabilité.

Afin de pouvoir dessiner le graphique de la fig. 38, on a calculé comme indiqué ci-dessus les quotients  $\frac{P_k \cdot f_k \cdot \pi}{l}$  pour un grand nombre

d'élançements en tenant compte pour chacun d'eux d'excentricités variables. Pour l'acier de construction, la fig. 38 donne les valeurs  $\frac{P_k \cdot f_k \cdot \pi}{l \cdot F}$  de façon qu'il est possible sans autres

indications de déterminer l'effort tranchant.

On peut consulter sur le tableau de la fig. 39 les résultats des mesures exécutées sur des barres à treillis en acier de construction. Les tensions mesurées sur les diagonales du treillis sont légèrement inférieures aux valeurs théoriques. Il faut remarquer à ce propos que montants et diagonales ne possèdent pas des nœuds articulés, parfaitement mobiles, même lorsque l'assemblage n'est assuré que par un seul rivet et que, d'autre part, les membrures des poutres sont continues. Il en résulte que l'ensemble agit un peu comme une série de cadres qui aide à répartir les efforts. En calculant selon la théorie développée ci-dessus, on obtient un treillis un peu plus léger que p. ex. en calculant suivant la formule de Krohn; toutefois les valeurs trouvées se rapprochent mieux de la réalité.



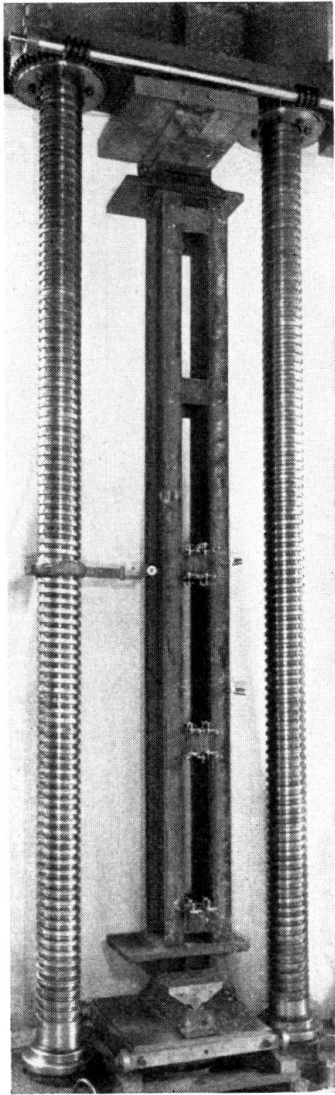
*M = 0,5 Charge de Flambage théorique = 193 t*  
*M = 0,5 Charge de Flambage mesurée { 189 t*  
*Lièrnes extrêmes :*  
*Tension théorique dans la fibre extrême = 135 t/cm<sup>2</sup>*  
*Tension mesurée dans la fibre extrême (moyenne) = 150 t/cm<sup>2</sup>*

Fig. 40.

Barre à châssis. Degré d'élançement  $\frac{l}{i} = 40$ .

Rahmenstab. Schlankheitsgrad. Frame bar. Slenderness ratio.

A propos du tableau de la fig. 40, nous faisons remarquer que les barres à châssis sont en acier au silicium avec tôles de liaison soudées électriquement. Par comparaison avec les valeurs théoriques, on s'aperçoit que les forces de flambage mesurées sont légèrement plus faibles, les tensions aux arêtes un peu plus élevées ; ceci s'explique du fait des forces additionnelles et des tensions dues à l'action des cadres. D'ailleurs les différences constatées sont sans importance pratique.



41

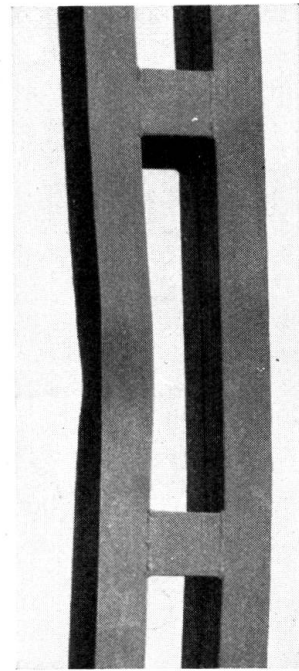
Fig. 41.

Essai de flambage sur une barre à châssis. Distance entre les appuis à couteau 3,30 m.

Degré de l'élanement  $\frac{l}{i} = 40$  ; degré d'excentricité  $m = 0,5$ .

Knickversuch mit Rahmenstab. Schneidentfernung, Schlankheitsgrad, Exzentrizitätsmass.

Buckling test on a frame bar. Distance between knife-edge supports ; slenderness ratio, degree of eccentricity.



42

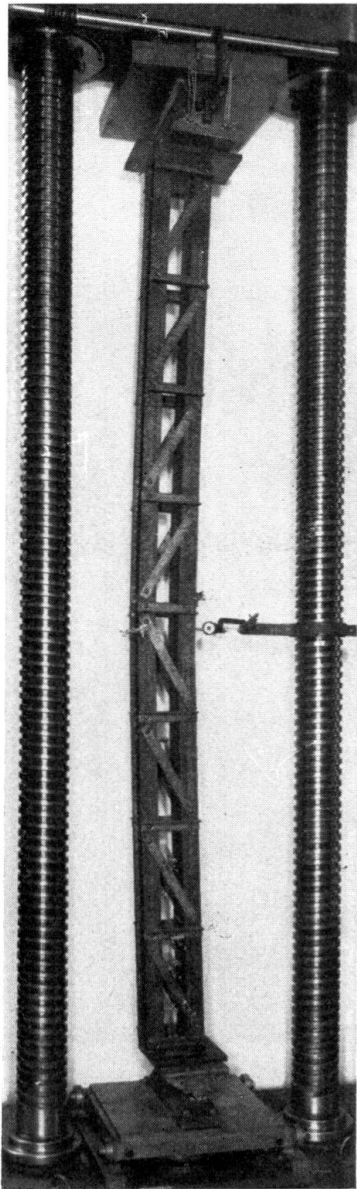
Fig. 42.

Vue de détail de la barre flambée.

Einzelheit zum ausgeknickten Stab.

Illustration of a buckled bar.

La limite de proportionnalité de l'acier au silicium est plus élevée que celle de l'acier de construction. Les fléchissements correspondants à des charges



43

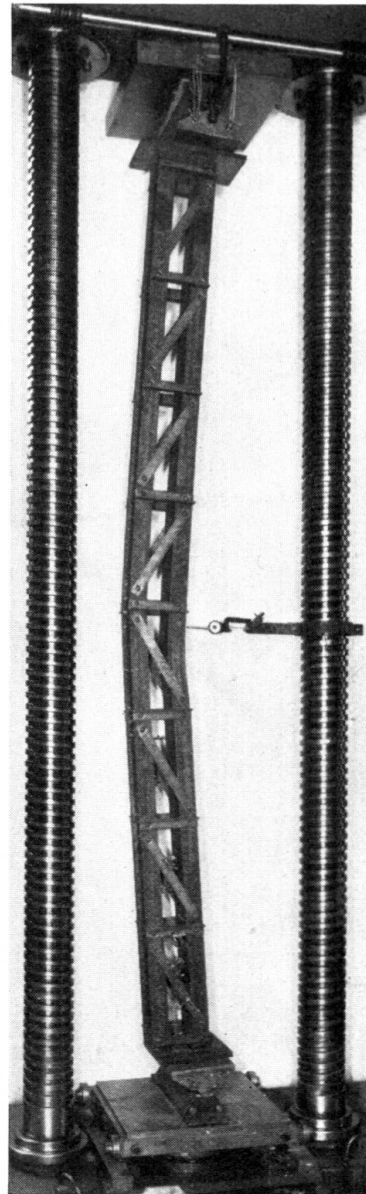
Fig. 43.

Essai de flambage sur une barre à treillis. Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 55$ .

Première phase : Flambage de la barre entière.

Knickversuch mit Gitterstab. Erste Phase : Stab als Ganzes ausgeknickt. Schlankheitsgrad.

Buckling test on a lattice bar. Slenderness ratio. First phase : Buckling of whole bar.



44

Fig. 44.

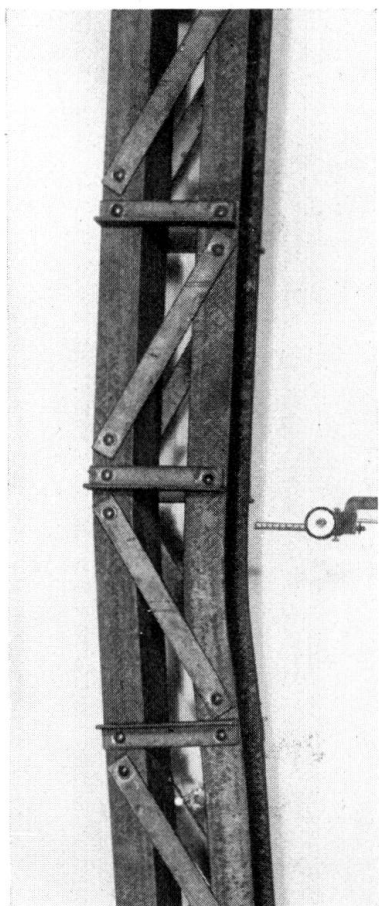
Essai de flambage sur une barre à treillis. Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 55$ .

Deuxième phase : Flambage local de la membrure.

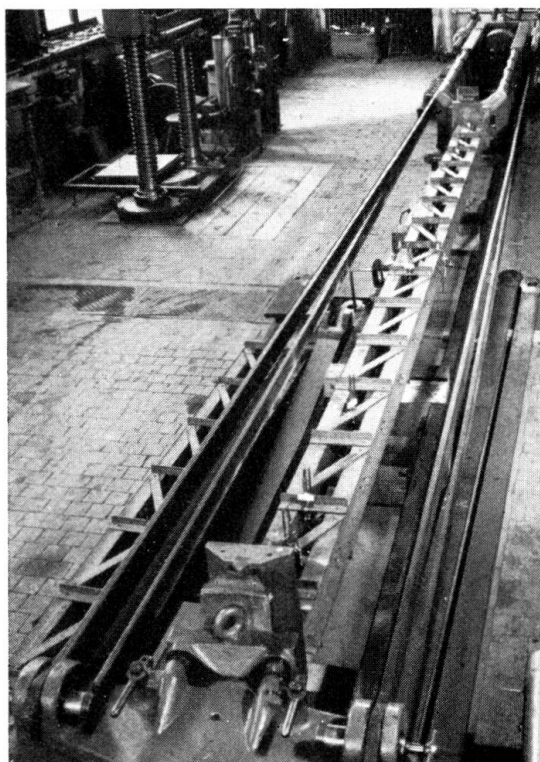
Knickversuch mit Gitterstab. Schlankheitsgrad. Zweite Phase : Gurtungsstab örtlich ausgeknickt.

Buckling test on a lattice bar. Slenderness ratio. Second phase : Local buckling of the component parts.

$\sigma = \frac{P}{F} > \sigma_p$  (acier construct.), sont plus petits que ceux de l'acier de construction ; par contre, la force portante au flambage est plus élevée. Les produits  $\frac{P_k \cdot f_k}{l}$ , déterminés pour l'acier de construction, sont aussi, comme les essais le montrent, valables approximativement pour ces dernières barres.



45



46

Fig. 45.

Vue de détail de la barre flambée.  
Einzelheit zum ausgeknickten Stab.  
Illustration of a buckled bar.

Fig. 46.

Essai de flambage sur une barre à treillis, disposée horizontalement.  
Distance entre les appuis à couteau = 5,48 m. Degré d'élanement  $\frac{l}{i} = 90$ ,  
degré d'excentricité  $m = 1$ .

Knickversuch mit Gitterträger, waagrecht gelagert. Schneidentfernung,  
Schlankheitsgrad, Exzentritätsmass.

Buckling test on a lattice bar, placed horizontally. Distance between knife-edge supports,  
slenderness ratio, degree of eccentricity.

Les barres à treillis et à châssis qui furent examinées avaient été dimensionnées de telle sorte que, théoriquement, elles devaient flamber comme une barre simple et non localement, ce qui est d'ailleurs arrivé lors des essais.

Ce n'est qu'après avoir atteint la charge de flambage, lorsque la barre composée continue de fléchir, que la membrure la plus sollicitée, située du côté concave, a flambé dans le sens du moment d'inertie minimum. Le processus de flambage des barres à treillis est représenté sur les fig. 43-46, celui des barres à châssis sur les fig. 41 et 42.

## Résumé.

### A. Sommaire.

- I. Suppositions.
- II. Processus du flambage.
- III. Compression centrée et excentrée :
  - 1) acier de construction ;
  - 2) acier de construction au silicium ;
  - 3) acier de construction à haute résistance (Ac 52) ;
  - 4) tubes d'acier pour avions ;
  - 5) fonte grise ;
  - 6) métaux légers (duraluminium, avional, anticorodal) ;
  - 7) bois de construction ;
  - 8) béton armé.
- IV. Flambage dans le cas d'une charge transversale invariable agissant au milieu de la barre.
- V. Flambage des barres à axe de courbure continue.
- VI. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique et la direction du flambage perpendiculaire au plan de la force.
- VII. Flambage dans le cas où le point d'application de la force est excentrique par rapport aux deux axes principaux.
- VIII. Profils asymétriques. Influence de la forme de la section.
- IX. Calcul des barres à treillis et à châssis.
- X. Résumé et conclusions.

### B. Conclusions.

1) La méthode de calcul appliquée pour la détermination de la force de flambage des barres comprimées par des forces excentrées a, si on tient compte des suppositions faites, une valeur d'ordre tout à fait général.

Elle se base sur la connaissance du diagramme tension-déformation d'un matériau de construction et présuppose que les conditions d'équilibre et de déformation, exprimées par l'équation différentielle de la ligne élastique de la barre fléchie, sont remplies.

Cette méthode rend possible la détermination de la flèche correspondant à la charge de flambage.

2) Les lois qui régissent le flambage par charges excentrées, dans les domaines de l'élasticité et de la plasticité, ont été examinées théoriquement et vérifiées expérimentalement pour

- l'acier de construction,
- l'acier de construction au silicium,
- l'acier de construction à haute résistance (Ac 52),
- les tubes d'acier pour avions,
- la fonte grise,
- les métaux légers,
- le bois de construction et
- le béton armé.

Les résultats théoriques et les vérifications expérimentales présentent une concordance très satisfaisante. Les écarts constatés restent dans les limites des variations des chiffres de résistance et de déformation du matériau examiné.

3) L'excentricité du point d'application de la force est cause d'une diminution de la charge de flambage. L'influence de cette excentricité est plus à craindre pour les barres trapues et à élancement moyen ( $\frac{l}{i} < 100$ ) que pour les barres élancées et très élancées ( $\frac{l}{i} > 100$ ).

Lorsque l'excentricité augmente, la diminution de la force de flambage est plus faible en comparaison de l'augmentation du degré d'excentricité.

4) Grâce à l'encastrement des deux extrémités des barres d'élancement moyen, on constate une augmentation de la force de flambage qui varie suivant le matériau de construction mais qui est en général peu importante. Si les extrémités de la barre encastree ont un peu de jeu ou subissent de petites déformations, l'augmentation de la force de flambage peut être annulée.

5) On considère comme points caractéristiques du diagramme compression-raccourcissement :

- la limite de proportionnalité  $\sigma_p$ ,
- la limite d'écoulement  $\sigma_f$  et
- la résistance à la compression des prismes debout  $p \beta_d$ .

A l'aide de ces valeurs et du coefficient d'élasticité  $E$ , correspondant à la limite de proportionnalité, il est possible de déterminer approximativement la ligne des tensions de flambage pour la *compression axiale* en fonction de l'élancement.

Jusqu'à la limite de proportionnalité la tension au flambage peut être calculée à l'aide du coefficient  $E$ , d'après Euler.

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} E. \leq \sigma_p.$$

Entre la limite de proportionnalité  $\sigma_p$  et la limite d'écoulement  $\sigma_f$  (c'est-à-dire avec une approximation suffisante, pour  $\frac{l}{i} = 35$ , s'il s'agit d'un acier de construction), la ligne des tensions de flambage se réduit à une droite. Elle est

valable jusqu'aux élancements suivants correspondant à la résistance à la compression des prismes debout :

$$\begin{aligned} \text{pour les aciers de construction} & \frac{l}{i} \sim 10 & \left( \frac{l}{a} = 3 \right) \\ \text{» le bois de construction} & \frac{l}{i} \sim 20 & \left( \frac{l}{a} = 6 \right) \\ \text{» le béton armé} & \frac{l}{i} \sim 35 & \left( \frac{l}{a} = 10 \right) \end{aligned}$$

Dans le domaine de la résistance à la compression des prismes ( $p\beta_d$ ), la ligne des tensions de flambage est parallèle à l'axe  $\frac{l}{i}$ . Pour les aciers de construction, on remplace la résistance à la compression des prismes debout par la résistance à la traction calculée pour la section initiale, non déformée.

Lorsque le diagramme tension-allongement ne présente pas une limite d'écoulement bien caractérisée — bois, béton armé —, la ligne des tensions de flambage se trouve être la droite qui relie la limite de proportionnalité à la résistance à la compression des prismes debout.

Dans le cas du flambage par charges excentrées des matériaux de construction les plus importants :

acier — bois — béton armé,

on se sert des coefficients de réduction suivants pour calculer les valeurs des tensions de flambage. On pose dans ce cas  $\sigma_{k \text{ centré}} = 1,0$ .

Matériau de construction	Degré d'excentricité			
	m=0	m=1	m=2	m=3
Acier	1,0	0,55	0,40	0,33
Bois	1,0	0,55	—	0,35
Béton armé	1,0	0,45	0,25	—

(fig. 7, 23 et 26)

6) Une charge transversale agissant au milieu, et perpendiculairement à l'axe de la barre, diminue la force de flambage de cette barre comprimée par des forces centrées ou excentrées. Le graphique de la fig. 30 donne les valeurs de la charge de flambage avec charge transversale en pourcent de la charge de flambage par force centrée sans charge transversale pour l'acier de construction. Ce graphique peut rendre en pratique des services très appréciables.

Le graphique de la fig. 6, se rapportant à l'acier de construction, permet de déterminer les valeurs des forces de flambage avec une précision bien suffisante pour la pratique. L'excentricité ( $p$ ) du point d'application de la force au milieu de la barre est déterminée à l'aide de la relation

$$p = \frac{l}{P_{k \text{ red.}} \cdot \frac{H}{4}}$$



7) Si une barre est comprimée par des forces excentrées ayant leur point d'application sur un des axes principaux, la force de flambage, dans la direction perpendiculaire au plan d'excentricité, subit une diminution dès que la limite de proportionnalité est dépassée. L'importance de cette diminution dépend de la forme de la section de la barre, de la grandeur de l'excentricité du point d'application de la force et de l'allure du diagramme tension-allongement. Les barres en acier de construction qui ont été examinées fournissent des renseignements très précieux en pratique.

8) Les barres sollicitées à la compression, au-dessus de la limite de proportionnalité, par des forces excentrées par rapport aux deux axes principaux présentent une diminution considérable de leur force de flambage. Il n'est pas possible d'établir des règles générales, chaque cas particulier doit être examiné pour lui-même. La classification sous forme de tableau des résultats d'essais obtenus avec l'acier de construction, peut rendre de précieux services lors d'une première estimation.

9) Lorsqu'on connaît la flèche de flambage  $f_k$ , il est possible de déterminer l'effort tranchant  $Q_{\max} = \frac{P_k \cdot f_k \cdot \pi}{l}$  correspondant à la charge de flambage, et par là de dimensionner les liaisons — treillis, tôles de liaison — des barres comprimées par des forces excentrées. Les barres à treillis ou à châssis, comprimées par des forces excentrées, peuvent de ce fait être composées de telle manière qu'elles aient une charge portante de flambage équivalente à celles des barres à âme pleine. On admettra pour les membrures d'une barre à châssis un degré de sécurité au flambage plus élevé que pour la barre entière, du fait que les membrures ont à supporter des sollicitations additionnelles.

10) Lorsqu'on connaît les modules de flambage pour différentes tensions au centre de gravité — tension initiale uniformément répartie ou tension de base — et diverses différences des déformations spécifiques des fibres extrêmes — courbure de la ligne de flexion —, par exemple pour l'acier de construction suivant la fig. 5, il est possible de calculer :

a) la déformation des poutres sollicitées en dessus de la limite de proportionnalité à la flexion seule ou à la flexion avec force longitudinale ;

b) la stabilité au flambage des barres sollicitées à la compression ou à la compression et à la flexion, même dans le domaine de la plasticité.

En lieu et place du coefficient d'élasticité  $E$ , on introduit le module de flambage  $T_k$ .

La concordance de l'intégration de l'équation différentielle de la ligne de flexion

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k \cdot J}$$

avec la ligne de flexion admise selon le procédé de Mohr-Vianello permet la solution du problème.

## Zusammenfassung.

### A. Inhaltsverzeichnis.

- I. Voraussetzungen.
- II. Wesen des Knickens.
- III. Zentrisches und exzentrisches Knicken.
  - 1) Baustahl
  - 2) Silizium-Baustahl
  - 3) Hochwertiger Baustahl St 52
  - 4) Stahlrohre für Flugzeugbau
  - 5) Gusseisen
  - 6) Leichtmetalle — Duraluminium, Avional, Anticorodal
  - 7) Bauholz
  - 8) Eisenbeton.
- IV. Knicken bei einer in der Stabmitte wirkenden unveränderlichen Querbelastung.
- V. Knicken von Stäben mit stetig gekrümmter Axe.
- VI. Knicken bei exzentrischem Kraftangriff, Knickrichtung winkelrecht zur Kraftebene.
- VII. Knicken bei einem nach beiden Hauptaxen exzentrischen Kraftangriff.
- VIII. Unsymmetrische Profile. Einfluss der Querschnittsform.
- IX. Berechnung der Gitter- und Rahmenstäbe.
- X. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

### B. Schlussfolgerungen.

1) Das angewandte Berechnungsverfahren für die Bestimmung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stäbe besitzt, unter Beachtung der gemachten Voraussetzungen, allgemeine Gültigkeit.

Es stützt sich auf die Kenntnis des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes eines Baustoffes und die Erfüllung der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie des gebogenen Stabes ausgedrückten Gleichgewichts- und Verformungsbedingung.

Es ermöglicht die Bestimmung des der Knicklast entsprechenden Biegepfiles.

2) Die Gesetzmässigkeit des exzentrischen Knickens im elastischen und plastischen Gebiet wurde theoretisch untersucht und durch Versuche überprüft für

Baustahl,  
Silizium-Baustahl,  
hochwertigen Baustahl St 52,  
Stahlrohre für Flugzeugbau,  
Gusseisen,  
Leichtmetalle,  
Bauholz und  
Eisenbeton.

Die Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie und der Versuche ist gut. Die Abweichungen liegen innerhalb des Streuungsgebietes der Festigkeitseigenschaften und des Verformungsvermögens der untersuchten Baustoffe.

3) Die Exzentrizität des Kraftangriffes vermindert die Knicktragkraft. Der Einfluss des exzentrischen Kraftangriffes wirkt sich bei gedrunenen und mittelschlanken Stäben  $\left(\frac{l}{i} < 100\right)$  verhängnisvoller aus als bei schlanken und sehr schlanken Stäben  $\left(\frac{l}{i} > 100\right)$ .

Mit wachsender Exzentrizität fällt das Tragvermögen in vergleichsweise geringerem Masse ab als das Exzentrizitätsmass selbst zunimmt.

4) Durch die Einspannung der Stabenden wird für das Gebiet der mittelschlanken Stäbe die Knicktragkraft für die verschiedenen Baustoffe in verschieden hohem, zumeist geringem Masse erhöht. Kleine Nachgiebigkeiten der elastisch eingespannten Stabenden können die Erhöhung der Tragkraft verwirken.

5) Als charakteristische Punkte des Druck-Stauchungs-Diagrammes gelten die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$   
die Fließgrenze  $\sigma_f$  und  
die Prismendruckfestigkeit  $p\beta_d$ ,  
welche mit dem der Proportionalitätsgrenze zugeordneten Elastizitätsmodul E die angenäherte, für die Praxis sehr wertvolle Bestimmung der Knickspannungslinie für zentrisches Knicken, als Funktion des Schlankheitsgrades ermöglichen.

Bis zur Proportionalitätsgrenze gilt die mit E berechnete Knickspannung

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \cdot E. \leq \sigma_p$$

Zwischen der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  und der Fließgrenze  $\sigma_f$ , welcher bei Baustählen im Mittel und genügend genau ein Schlankheitsgrad von  $\frac{l}{i} = 35$  zugeordnet ist, wird die Knickspannungslinie durch eine Gerade begrenzt, welche bis zu den der Prismendruckfestigkeit  $p\beta_d$  noch entsprechenden Schlankheitsgraden

$$\begin{array}{ll} \text{für Konstruktionsstähle } \frac{l}{i} \sim 10 & \left(\frac{l}{a} = 3\right) \\ \text{für Holz } \frac{l}{i} \sim 20 & \left(\frac{l}{a} = 6\right) \\ \text{für Eisenbeton } \frac{l}{i} \sim 35 & \left(\frac{l}{a} = 10\right) \end{array}$$

gilt.

Innerhalb des Bereiches der Prismendruckfestigkeit  $p\beta_d$  weist die Knickspannungslinie zur  $\frac{l}{i}$ -Axe parallelen Verlauf auf. Bei den Baustählen ist die

Prismendruckfestigkeit durch die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen, unverformten Querschnitt, zu ersetzen.

Zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm keine ausgesprochene Fließgrenze — Holz, Eisenbeton — so gilt die die Proportionalitätsgrenze mit der Prismendruckfestigkeit verbindende Gerade als Knickspannungslinie.

Für exzentrisches Knicken gelten für die wichtigsten Baustoffe

Stahl — Holz — Eisenbeton

nachfolgende Abminderungs-Koeffizienten, bezogen auf die Knickspannungswerte für zentrisches Knicken,  $\sigma_k$  zentrisch gleich 1,0 gesetzt.

Baustoff	Exzentrizitätsmass			
	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
Stahl	1,0	0,55	0,40	0,33
Holz	1,0	0,55	—	0,35
Eisenbeton	1,0	0,45	0,25	—

(Abb. 7, 23, und 26).

6) In der Stabmitte winkelrecht zur Stabaxe wirkende Querbelastungen  $H$  vermindern die Tragkraft auf Knicken von zentrisch und exzentrisch gedrückten Stäben. Das Graphikon der Abb. 30, welches die Knicktragkräfte mit Querbelastung in Prozenten der zentrisch wirkenden Knicktragkräfte ohne Querbelastung für Baustahl angibt, leistet für den praktischen Gebrauch sehr schätzenswerte Dienste.

Für die Praxis ausreichend genaue Werte der Knicktragkräfte lassen sich für Baustahl anhand des Graphikons der Abb. 6 ermitteln. Die Exzentrizität des Kraftangriffes  $p$  in Stabmitte wird aus der Beziehung.

$$p = \frac{H \cdot \frac{l}{4}}{P_{\text{Krit}}}$$

ermittelt.

7) Bei in einer der Hauptaxen exzentrisch gedrückten Stäben wird bei Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze die Knickkraft auch für die zur Exzentrizitätsebene winkelrechte Richtung abgemindert. Das Mass der Abminderung hängt von der Querschnittsform des Stabes, der Grösse der Exzentrizität des Kraftangriffes und vom Verlauf des Spannungs-Dehnungsdiagrammes ab. Die untersuchten Stäbe aus normalem Baustahl liefern für die Praxis wertvolle Anhaltspunkte.

8) Nach beiden Hauptaxen exzentrisch gedrückte und über die Proportionalitätsgrenze beanspruchte Stäbe weisen einen sehr starken Abfall der Knick-Tragfähigkeit auf. Allgemein gültige Regeln lassen sich nicht aufstellen; jeder Einzelfall ist zu untersuchen. Die tabellarische Zusammenstellung der gewonnenen Versuchsergebnisse für normalen Baustahl leistet wertvolle Dienste für die angenäherte, erste Einschätzung.

9) Die Kenntnis des Knickbiegepeiles  $f_k$  ermöglicht die Bestimmung der der Knicklast zugeordneten Querkraft  $Q_{\text{max}} = \frac{P_k f_k \cdot \pi}{l}$ . und dadurch die Be-

messung der Verbindungen — Vergitterungen, Bindebleche — von exzentrisch gedrückten, gegliederten Stäben.

Exzentrisch gedrückte, vergitterte Stäbe oder durch Bindebleche verbundene Rahmenstäbe können somit derart ausgebildet werden, dass sie in ihrer Tragfähigkeit auf Knicken den vollwandigen Stäben praktisch gleichwertig sind. Bei Rahmenstäben ist zufolge zusätzlicher Beanspruchungen der Gurtungen, deren Knicksicherheitsgrad höher zu wählen als für den Rahmenstab als Ganzes.

10) Die Kenntnis der Moduli  $T_k$  für verschieden hohe Schwerpunktspannungen — Grundspannungen — und verschiedene Differenzen der Randfaserdehnungen — Krümmung der Biegelinie — z. B. für Baustahl entsprechend der Abb. 5 ermöglicht die Berechnung der Verformung von auf reine Biegung oder Biegung mit Längskraft über die Proportionalitätsgrenze beanspruchten Trägern, sodann

die Bestimmung der Knickstabilität von beliebig auf Druck oder Druck und Biegung auch im plastischen Bereich versagenden Stäben.

An Stelle des E-Moduls tritt der  $T_k$ -Modul.

Die Uebereinstimmung der Integration der Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k J}$$

mit der angenommenen Biegelinie nach dem Verfahren von Mohr-Vianello gibt die Lösung des Problems.

## Summary.

### A. Contents.

- I. Assumptions.
- II. Mode of buckling.
- III. Buckling under central and eccentric loads.
  1. Structural steel.
  2. Structural silicon-steel.
  3. High grade structural steel (st 52).
  4. Steel tubes for aircraft construction.
  5. Cast iron.
  6. Light metals — duralumin, avional, anticorodal.
  7. Timber.
  8. Reinforced concrete.
- IV. Buckling under a constant transverse load acting in the middle of the bar.
- V. Buckling of bars having a continuous bending axis.
- VI. Buckling in the case of eccentrically applied load, the direction of buckling being perpendicular to the plane of the load.
- VII. Buckling in the case where the load is applied eccentrically with reference to the two main axes.

- VIII. Unsymmetrical sections. Influence of the shape of the section.  
 IX. Calculation of trellis and frame bars.  
 X. Recapitulation and conclusions.

### B. Conclusions.

1) Under the assumptions made in the foregoing, the method of calculation followed for determining the resistance of bars to a load applied eccentrically may be taken to apply in the generality of cases.

It is based upon the information derived from the tension-extension diagram of structural materials, and depends upon compliance with the equilibrium and deformation conditions that ensue from the differential equation of the elastic line of the bent bar.

It allows the deflexion corresponding to the buckling load to be determined.

2) The occurrence of eccentric buckling in the elastic and plastic realm has been investigated theoretically and confirmed by tests for.

Structural steel ;  
 structural silicon steel !  
 high grade structural steel (St 52) ;  
 steel tubes for aircraft construction ;  
 cast iron ;  
 light metals ;  
 timber and ;  
 reinforced concrete.

There is good agreement between the findings of theory and the test results. The deviations lie within the normal variation limits in the figures defining the strength properties and the deformations capacity of the material dealt with.

3) Eccentricity in the application of the stress decreases the buckling load. The influence of the eccentric stress in the case of stout and medium-sized bars ( $\frac{l}{i} < 100$ ) appears to be greater than in that of thin and very thin bars ( $\frac{l}{i} > 100$ ).

With increasing eccentricity, the buckling load decreases proportionately slower than the increase in eccentricity.

4) By clamping the two ends of the bar the buckling strength, in the case of medium thin bars of the various materials, is increased to a varying but mostly small extent. A slight yielding at the elastically clamped bar ends may have a counteracting effect upon an increase in resistance.

5) The pressure-compression diagram is characterised by  
 the limit of proportionality  $\sigma_p$  ;  
 the limit of flow  $\sigma_f$  ;

and the crushing strength of a prism  $p_{\text{c.d}}$  which, with the modulus of elasticity  $E$  coordinated to the limit of proportionality, allow a close determination of the buckling tension-line for central compression as a function of the slenderness ratio, this being of great value in actual practice.

The buckling tension calculated with E from Euler's formula  $\sigma_k = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} E \leq \sigma_p$

applies up to the limit of proportionality.

Between the limit of proportionality  $\sigma_p$  and the limit of flow  $\sigma_f$ , which in the case of structural steels corresponds to a sufficiently approximate average value of  $\frac{l}{i} = 35$  the buckling tension-line is limited by a straight one which still applies to the values  $\frac{l}{i}$  that correspond for the crushing strength of a prism

- for structural steels to  $\frac{l}{i} \sim 10 \left( \frac{l}{a} = 3 \right)$
- for timber to  $\frac{l}{i} \sim 20 \left( \frac{l}{a} = 6 \right)$
- for reinforced concrete to  $\frac{l}{i} = 35 \left( \frac{l}{a} = 10 \right)$

Within the sphere of prism crushing strength, the buckling tension-line shows a parallel run with reference to the  $\frac{l}{i}$ -axis. In structural steels, the prism crushing strength is to be replaced by the tensile strength referred to the original non-deformed section.

When the tension-expansion diagram has no marked limit of flow (Timber, reinforced concrete), then the straight line connecting the limit of proportionality with the prism crushing strength serves as buckling tension-line.

In the case of an eccentric load and for the most important structural materials ;

steel, timber, reinforced concrete, the following, diminishing coefficients, referred to the buckling tension values for a central load, apply, taking  $\sigma_{k \text{ central}} = 1,0$

Structural Material	Degree of eccentricity			
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
Steel.....	1.0	0.55	0.40	0.33
Timber.....	1.0	0.55	—	0.35
Reinforced concrete.....	1.0	0.45	0.25	—

(fig. 7, 23 and 26).

6) The transverse loads H which act in the middle of the bar at right angles to the bar axis decrease the buckling resistance of centrally and eccentrically loaded bars. The diagram, fig. 30, which illustrates the buckling loads with transverse loading in per cent. values of the centrally operating buckling loads without transverse loading for structural steel, gives valuable data in practical work.

For structural steel sufficiently accurate values for buckling resistance figures and for practical purposes can be derived from the diagram fig. 6. The eccentricity ( $p$ ) of the effect of load in the middle of the bar is obtained from the equation

$$p = \frac{H \cdot \frac{l}{4}}{P_{k \text{ re.1}}}$$

7) In the case of bars eccentrically loaded, the overstepping of the limit of proportionality in one of the main axes decreases the buckling load for the eccentric plane in a right angle location. The measure of decrease depends upon the shape of the bar section, the extent of eccentricity, the operation of the load and the run of the tension-expansion diagram. The bars of structural steel experimented with provide valuable information for practical work.

8) In the case of bars which have been eccentrically loaded in regard to both main axes and over the limit of proportionality, there is a very heavy drop in buckling load. Rules for general application cannot be arrived at; every instance must be considered separately. The data in tabular form yielded by the test already made for structural steel are most serviceable for making a first approximation.

9) When knowing the buckling deflection  $F_k$  one can determine the transverse load  $Q_{\max} = \frac{P_k \cdot F_k \cdot \pi}{l}$  coordinated to the buckling load and hence the dimensions max. of connexions, such as lattice work and junction plates, of bars under an eccentric load.

Bars arranged in lattice work or frame bars connected by junction straps, and subjected to an eccentric load, can be so designed that in resistance to buckling they are practically equal to full plate bars. In frame bars, owing to the additional stress, the buckling safety coefficient of the straps should be selected higher than for the frame bar in itself.

10) When knowing the buckling moduli for differently high centre of gravity stresses (initial stresses) and various differences in the elongation of the outside fibres — curvature of the bending line — for example in the case of structural steel (see fig. 5) it is possible to calculate the deformation of girders subjected to pure bending or bending under longitudinal force above the limit of proportionality, then to determine the buckling stability of bars which fail under pressure, or pressure and bending, also in the plastic range.

The E modulus is replaced by the  $T_k$  one.

The agreement of the integration of the differential equation of the bending line

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k \cdot J}$$

with the bending line according to the Mohr-Vianello process gives the solution of the problem.



## Designations

## Bezeichnungen

$M_i$	Moment intérieur	Inneres Moment	Internal moment
$M_a$	Moment extérieur	Aeusseres Moment	External moment
$P$	Force ou charge	Kraft oder Last	Force or load
$P_k$	Force de flambage	Knickkraft	Buckling load
$E$	Module d'élasticité	Elastizitätsmodul	Modulus of elasticity
$T_k$	Coefficient de flambage	Knickmodul	Modulus of buckling
$F$	Section	Querschnitt	Section
$J$	Moment d'inertie	Trägheitsmoment	Moment of inertia
$i$	Rayon de giration	Trägheitsradius	Radius of gyration
$\sigma_p$	Limite de proportionnalité	Proportionalitätsgrenze	Limit of proportionality
$\sigma_f$	Limite d'écoulement	Fliessgrenze	Limit of flow
$\beta_z$	Résistance à la traction	Zugfestigkeit	Tensile strength
$\beta_d$	Résistance à la compression	Druckfestigkeit	Compression strength
$\beta_b$	Résistance à la flexion	Biegezugfestigkeit	Bending strength
$p\beta_d$	Résistance d'un prisme à la compression	Prismendruckfestigkeit	Crushing strength of prism
$\sigma$	Tension	Spannung	Tension
$\sigma_k$	Tension de flambage	Knickspannung	Buckling tension
$l$	Longueur, longueur au flambage	Länge, Knicklänge	Length, collapsing length
$h$	Hauteur, hauteur de la section	Höhe, Querschnittshöhe	Height, height of section
$a$	Largeur	Breite	Width
$\rho$	Rayon de courbure	Krümmungsradius	Radius of curvature
$\Delta$	Différence des allongements des fibres extrêmes	Differenz der Randfaserdehnungen	Difference in elongation of outside fibres
$f$	Flèche	Pfeil	Deflection
$f_k$	Flèche au flambage	Knickpfeil	Buckling deflection
$p$	Excentricité	Excentrizität	Eccentricity
$k$	Grandeur du noyau central	Kernweite	Core dimension
$\frac{l}{i}$	Degré d'élancement	Schlankheitsgrad	Slenderness ratio
$m = \frac{p}{k}$	Degré d'excentricité	Excentrizitätsmass	Degree of eccentricity

## Littérature.

ENGESSER FR. Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin, 1892.

TETMAJER L. Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe.

Mitteilung der Eidg. Materialprüfungsanstalt, Heft 8. Zürich, 1901

MONCRIEFF J. M. The Practical Column under Central or Eccentric Loads. American Society of Civil Engineers. 1901.

KÁRMÁN Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit.

Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 81. Berlin, 1910.

RUDELOFF M. Untersuchung von Druckstäben auf Knickfestigkeit. Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes. 1912/14.

HABERKALT K. Versuche mit hochwertigem Eisen für Tragwerke. Wien, 1915.

WESTERGAARD H. M. Buckling of Elastic Structures.

American Society of Civil Engineers. 1922.

KROHN R. Knickfestigkeit. Berlin, 1923.

GREENE T. W. Strength of Steel Tubing under Combined Column and Transverse Loading, Including Tests of Columns and Beams. 1924.

CHWALLA E. Die Stabilität des Rahmenstabes. Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl.

Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Wien, 1928.

GRAF O. Knickversuche mit Bauholz. Bautechnik, Heft 15. Berlin, 1928.

Bruch- und Biegeversuche mit gegliederten Stäben aus Holz.

Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 319 Berlin.

OSTENFELD A. Exzentrisch beanspruchte Säulen, Versuche mit Holzsäulen, Querschnittsbemessungen. Kopenhagen, 1929.

REIN W. Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Deutscher Stahlbau-Verband. Berlin, 1930.

MONNIN M. La résistance au flambage des pièces de bois.

Manuscrit. Paris, 1931.

BOYD J. E. Investigation of the Compressive Strength of Spruce Struts of Rectangular Cross Section and the Derivation of Formulas Suitable for use in Air plane Designe.

Special Committee. Steel column research.

American Society of Civil Engineers, 1931.

PETERMANN. Zur Berechnung von Rahmenstäben. Die Bautechnik, Heft, 19. Berlin, 1931.

TUCKERMANN L. B. et STANG A. H. Tests of large Columns with H-Shaped Sections. United States Bureau of Standards.

BOYD J. E. Tapered Struts. A Theoretical and Experimental Investigation. Bulletin, Engineering Experiment Station of the Ohio State University.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide